Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – **Curso: 2022–2023**

Ejercicios desarrollados - Tema 5(2)

El objetivo principal de este documento es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Observación: en los ejercicios resueltos a continuación, y salvo que se diga lo contrario, la función ϕ será la usual. Esto es, si $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ son dos puntos del espacio afín considerado, entonces $\overrightarrow{PQ} = \phi(P, Q) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, q_n - p_n)$.

Ejercicio 5.3

Enunciado

En el espacio afín $(\mathcal{A}_2, V_2, \phi)$ se consideran los sistemas de referencia

$$\mathcal{R} = \{O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}' = \{O'; \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}\},$$

siendo $\overrightarrow{OO'} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{v}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ y $\vec{v}_2 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

a) Determina las ecuaciones de los cambios de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ y de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

b) Si el punto P respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}$ tiene coordenadas $(3, 5)$, halla sus coordenadas respecto de $\mathcal{R}'$.

c) Si Q respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$ tiene coordenadas $(2, 3)$, halla sus coordenadas respecto de $\mathcal{R}$.

Resolución

a) Consideremos un punto P cualquiera del espacio afín $(\mathcal{A}_2, V_2, \phi)$. Supongamos que las coordenadas de P en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ son $(x, y)_{\mathcal{R}}$. Entonces, tenemos que $\overrightarrow{OP} = (x, y)_B$.

Por otra parte, si las las coordenadas de P en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ son $(x', y')_{\mathcal{R}'}$, entonces $\overrightarrow{O'P} = (x, y)_{B'}$.

Ahora bien, teniendo en cuenta que $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP}$ y que $\overrightarrow{OO'} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = (3, 3)_B$, entonces

$$(3, 3)_B + (x, y)_{B'} = (x, y)_B \Rightarrow (x', y')_{B'} = (x, y)_B - (3, 3)_B \Rightarrow (x', y')_{B'} = (x - 3, y - 3)_B.$$

Observemos que, al estar considerando bases distintas en la última igualdad, en general no es cierto que $x' = x - 3$ o que $y' = y - 3$. Necesitamos, pues, un cambio de base: el de B a B' o el de B' a B. Para esto haremos uso de las relaciones (dadas en el enunciado) entre los vectores de B y de B'.

Sea un vector $\vec{w}$ con coordenadas $(x, y)_B$ en la base B y coordenadas $(x', y')_{B'}$ en la base B'. Entonces

- $\vec{w} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$,
- $\vec{w} = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2 = x'(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) + y'(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = (2x' - y')\vec{e}_1 + (-x' + 2y')\vec{e}_2$,

de donde

$$\left.\begin{array}{r} x = 2x' - y' \\ y = -x' + 2y' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2x' - y' \\ -x' + 2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{B'}.$$

Por tanto, la matriz de cambio de base de B' a B es

$$M(B', B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Volviendo a nuestro punto P y la relación $(x', y')_{B'} = (x-3, y-3)_B$, aplicando la matriz de cambio de base de B' a B, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_B \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{B'} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_B.$$

Por tanto, el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ vendrá dado por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

Para hallar el cambio de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$, partimos de la expresión anterior y despejamos las coordenadas con respecto a $\mathcal{R}'$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \right] \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \right].$$

(Compruébese que la inversa se ha calculado correctamente. Por cierto, esta inversa es la matriz $M(B, B')$ de cambio de base de B a B').

Finalmente,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

es el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. Obsérvese que, en este caso, se verifica que $(-3, -3)_{\mathcal{R}} = (-3, -3)_{\mathcal{R}'}$ (ya que $M(B, B')\vec{v} = \vec{v}$ siempre que $\vec{v} = (\alpha, \alpha)^T$ con $\alpha \in \mathbb{R}$).

b) Si $P = (3, 5)_{\mathcal{R}}$, entonces

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}.$$

c) Si $Q = (2, 3)_{\mathcal{R}'}$, entonces

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

Ejercicio 5.5

Enunciado

En el espacio afín $(\mathcal{A}_3, V_3, \phi)$ se considera el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\}$.

a) Sean los puntos O, P_1, P_2, P_3 que respecto a $\mathcal{R}$ tienen coordenadas $O = (0, 0, 0)$, $P_1 = (1, 2, 0)$, $P_2 = (-1, 1, 0)$ y $P_3 = (0, 0, 1)$. Comprueba que $\mathcal{R}' = \left\{O; \left\{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\right\}\right\}$ forma un sistema de referencia del espacio afín dado.

b) Halla las ecuaciones de los cambios de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ y de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

c) Determina las coordenadas, respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}'$, del punto $X \in \mathcal{A}_3$ sabiendo que las coordenadas de X respecto de $\mathcal{R}$ son $(-1, 2, 1)$.

Resolución

a) Para comprobar que $\mathcal{R}'$ es un sistema de referencia del espacio afín dado, bastará con justificar que $B' = \left\{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\right\}$ es una base del espacio vectorial asociado.

Tomando $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, tenemos que

- $\overrightarrow{OP_1} = P_1 - O = (1, 2, 0) - (0, 0, 0) = (1, 2, 0)_B$,
- $\overrightarrow{OP_2} = P_2 - O = (-1, 1, 0) - (0, 0, 0) = (-1, 1, 0)_B$,
- $\overrightarrow{OP_3} = P_3 - O = (0, 0, 1) - (0, 0, 0) = (0, 0, 1)_B$.

Así, para ver que $B' = \left\{\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\right\}$ es una base, necesitamos comprobar que B' es un sistema de generadores formado por vectores linealmente independientes.

Empecemos con la independencia lineal. Para ello sea la combinación lineal

$$a(1, 2, 0) + b(-1, 1, 0) + c(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Como el sistema

$$\left.\begin{array}{r} a - b = 0 \\ 2a + b = 0 \\ c = 0 \end{array}\right\}$$

admite $a = b = c = 0$ como única solución (¡compruébese! que efectivamente es la única solución), tenemos que los vectores $(1, 2, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)$ son linealmente independientes.

Para ver que B' es un sistema de generadores, sea $\vec{v} = (x, y, z)_B$ un vector cualquiera de V. Entonces nos planteamos si siempre existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x, y, z) = a(1, 2, 0) + b(-1, 1, 0) + c(0, 0, 1).$$

Analizando el sistema correspondiente

$$\left.\begin{array}{r} a - b = x \\ 2a + b = y \\ c = z \end{array}\right\},$$

tenemos que es compatible determinado (¡compruébese!) y, por tanto, B' es un sistema de generadores.

b) Para hallar el cambio de sistema de referencia partimos de la igualdad $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP}$ para algún punto P con coordenadas $(x, y, z)_{\mathcal{R}}$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ y coordenadas $(x', y', z')_{\mathcal{R}'}$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$. Puesto que $O' = (0, 0, 0)_{\mathcal{R}}$, entonces

$$\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow (0, 0, 0)_B + (x', y', z')_{B'} = (x, y, z)_B \Rightarrow (x', y', z')_{B'} = (x, y, z)_B.$$

Necesitamos, pues, una matriz de cambio de base: la de B a B' o la de B' a B.

Sabiendo que $\vec{v}_1 = \overrightarrow{OP_1} = (1, 2, 0)_B$, $\vec{v}_2 = \overrightarrow{OP_2} = (-1, 1, 0)_B$ y $\vec{v}_3 = \overrightarrow{OP_3} = (0, 0, 1)_B$, si un vector $\vec{w}$ tiene coordenadas $(x, y, z)_B$ con respecto a la base B y coordenadas $(x', y', z')_{B'}$ con respecto a la base B', entonces

- $\vec{w} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$,
- $\vec{w} = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2 + z'\vec{v}_3 = x'(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) + y'(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + z'(\vec{e}_3) = (x' - y')\vec{e}_1 + (2x' + y')\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$,

de donde

$$\left.\begin{array}{c} x = x' - y' \\ y = 2x' + y' \\ z = z' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x' - y' \\ 2x' + y' \\ z' \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'}.$$

Por tanto, la matriz de cambio de base de B' a B es

$$M(B', B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, aplicando esta matriz de cambio a la relación $(x', y', z')_{B'} = (x, y, z)_B$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

es el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$.

Por último, para el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ hay que calcular la inversa de $M(B', B)$ (¡hágase!) y, una vez hecho dicho cálculo, tenemos que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

c) A partir del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$, tenemos que

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}.$$

Ejercicio 5.8

Enunciado

En el espacio afín $(\mathcal{A}_2, V_2, \phi)$, con sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\}$, se considera el punto P de coordenadas $(1, -1)_{\mathcal{R}}$ y el subespacio vectorial W de V_2 dado por la ecuación cartesiana $2x - y = 0$ respecto de $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Determina las ecuaciones paramétricas, respecto de $\mathcal{R}$, de la variedad afín S que contiene a P y que tiene por subespacio vectorial asociado W.

Resolución

Empecemos determinando una base de W, para lo que resolvemos la ecuación cartesiana que lo define.

$$2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha, \\ y = 2\alpha, \end{array}\right. \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow W = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Es claro que todos los vectores de W son múltiplos del vector $(1, 2)$, por lo que $B = \{(1, 2)\}$ es un sistema de generadores de W. Además, como $(1, 2)$ es un vector no nulo, entonces es linealmente independiente. Concluimos así que $B = \{(1, 2)\}$ es una base de W.

Para determinar la variedad afín S que contiene a P y que tiene por subespacio vectorial asociado W, por definición de variedad afín

$$S = \{X \in \mathcal{A}_2 \mid \overrightarrow{PX} \in W\} = \{(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{A}_2 \mid (x, y)_{\mathcal{R}} - (1, -1)_{\mathcal{R}} \in W\} =$$
$$\{(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{A}_2 \mid (x, y)_{\mathcal{R}} - (1, -1)_{\mathcal{R}} = (\alpha, 2\alpha)_B \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de S, en el sistema de referencia $\mathcal{R}$, son

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + \alpha, \\ y = -1 + 2\alpha, \end{array}\right. \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 5.11.a

Enunciado

En el espacio afín $(\mathcal{A}_3, V_3, \phi)$, con sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$, se consideran planos

$$\pi_1 \equiv x - y + z = 2, \quad \pi_2 \equiv 2x - 2y + z = 1$$

a) Determina la posición relativa de π_1 y π_2.

b) Halla la distancia entre los planos π_1 y π_2.

Resolución

a) Para determinar la posición relativa de π_1 y π_2 analizaremos el sistema formado por las ecuaciones cartesianas de ambos planos.

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 2 & -2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -3 \end{pmatrix}.$$

Es claro que el conjunto de soluciones de este sistema viene dado por

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha - 1, \\ y = \alpha, \\ z = 3, \end{array}\right. \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, los planos π_1 y π_2 se cortan en la recta r que pasa por el punto $P = (-1, 0, 3)$ con vector director $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$.

b) Puesto que los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta, la distancia entre ellos es igual a cero.

Ejercicio 5.11.b

Enunciado

En el espacio afín $(\mathcal{A}_3, V_3, \phi)$, con sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$, se consideran la recta

$$r \equiv \left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 1 \\ 2y - z = 1 \end{array}\right\}$$

y el plano

$$\pi \equiv x - y + z = 1.$$

a) Determina la posición relativa de r y π.

b) Halla la distancia entre la recta r y el plano π.

Resolución

a) Para determinar la posición relativa de la recta r y el plano π estudiamos el sistema formado por las ecuaciones cartesianas de ambas variedades afines.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 1 \\ 2y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Es claro que la única solución de este sistema es $\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{2}\right)$. Por tanto, la recta r y el plano π se cortan en el punto $P = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{2}\right)$.

b) Ya que la recta r y el plano π se cortan en un punto, la distancia entre ellos es igual a cero.