Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 5 (T1)

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Tarea 1 (tema 5) (curso 2020–2021)

Enunciado

En el espacio afín usual $\mathbb{R}^3$, se consideran los sistemas de referencia $\mathcal{R} = \{O; B = \{u_1, u_2, u_3\}\}$ y $\mathcal{R}' = \{O'; B' = \{v_1, v_2, v_3\}\}$, donde

- $O' = (1, 2, 3)_\mathcal{R}$;
- $u_1 = -v_1 + v_2 + v_3$; $u_2 = v_1 - 2v_2 + v_3$; $u_3 = v_1 + v_2 - v_3$.

a) Determina, paso a paso y justificando todos los cálculos, las expresiones matriciales de los cambios de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ y de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$.

b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto $A = (1, 1, 1)_\mathcal{R}$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$?

c) ¿Cuáles son las coordenadas del punto $B = (1, 1, 1)_{\mathcal{R}'}$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}$?

d) Determina todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ que tienen las mismas coordenadas en $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$.

Resolución

a) Consideremos un punto cualquiera P de $\mathbb{R}^3$. Este punto tendrá unas coordenadas (x, y, z) en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ y unas coordenadas (x', y', z') en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$. Entonces, por la definición de coordenadas en un espacio afín:

- $P = (x, y, z)_\mathcal{R} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = (x, y, z)_B = xu_1 + yu_2 + zu_3 \Rightarrow P - O = xu_1 + yu_2 + zu_3$.
- $P = (x', y', z')_{\mathcal{R}'} \Rightarrow \overrightarrow{O'P} = (x', y', z')_{B'} = x'v_1 + y'v_2 + z'v_3 \Rightarrow P - O' = x'v_1 + y'v_2 + z'v_3$.

Por otra parte, por los datos dados en el enunciado:

- $O' = (1, 2, 3)_\mathcal{R} \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = (1, 2, 3)_B = u_1 + 2u_2 + 3u_3 \Rightarrow O' - O = u_1 + 2u_2 + 3u_3$.

Entonces, ya que $(P - O') + (O' - O) = P - O$, tenemos que

$$(x'v_1 + y'v_2 + z'v_3) + (u_1 + 2u_2 + 3u_3) = xu_1 + yu_2 + zu_3,$$

de donde

$$x'v_1 + y'v_2 + z'v_3 = (xu_1 + yu_2 + zu_3) - (u_1 + 2u_2 + 3u_3) \Rightarrow$$
$$x'v_1 + y'v_2 + z'v_3 = (x - 1)u_1 + (y - 2)u_2 + (z - 3)u_3.$$

Esta última igualdad se puede expresar de la forma[1]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'} \equiv \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix}_B . \tag{1.1}$$

[1] Ya que manejamos bases distintas, las dos expresiones no son realmente iguales, aunque sí representan al mismo vector (concretamente, al vector $\overrightarrow{O'P}$). Por este motivo, usaremos el símbolo de equivalencia en lugar del símbolo de igualdad.

Ahora bien, de los datos del enunciado, también sabemos que, si $v = (a, b, c)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ expresado en la base B, entonces v vendrá dado por unas coordenadas (a', b', c') en la base B' tales que

$$(a, b, c)_B = au_1 + bu_2 + cu_3 = a(-v_1 + v_2 + v_3) + b(v_1 - 2v_2 + v_3) + c(v_1 + v_2 - v_3) =$$

$$(-a + b + c)v_1 + (a - 2b + c)v_2 + (a + b - c)v_3 = (-a + b + c, a - 2b + c, a + b - c)_{B'} = (a', b', c')_{B'}.$$

Escribiendo la última igualdad mediante vectores columnas, deducimos la matriz $M(B, B')$ de cambio de base de B a B'. En efecto,

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} -a+b+c \\ a-2b+c \\ a+b-c \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_B \Rightarrow M(B, B') = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Introduciendo la matriz $M(B, B')$ en la expresión (1.1), tenemos que[2]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix}_B .$$

Operando en esta igualdad y teniendo en cuenta que (x', y', z') son las coordenadas del vector $\overrightarrow{O'P}$ en la base B' y, así mismo, son las coordenadas del punto P en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ (análogamente, (x, y, z) son las coordenadas de $\overrightarrow{OP}$ en la base B y también son las coordenadas de P en el sistema de referencia $\mathcal{R}$), obtenemos la expresión matricial del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. En efecto,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} .$$

Finalmente, para obtener el cambio de sistema de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$, basta con despejar $(x, y, z)_{\mathcal{R}}$ en el cambio anterior[3]:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \right) \Rightarrow$$

[2]Obsérvese que, al introducir la matriz de cambio, la equivalencia dada en (1.1) pasa a ser una igualdad.

[3]En los cálculos que siguen usaremos la matriz $M(B, B')^{-1}$, que es precisamente la matriz $M(B', B)$. Además,

$$M(B', B) = M(B, B')^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

b) A partir de lo hecho en el apartado **a)**, tenemos que las coordenadas del punto $A = (1, 1, 1)_{\mathcal{R}}$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ serán

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}.$$

Por tanto, $A = (-3, 0, 1)_{\mathcal{R}'}$.

c) A partir de lo hecho en el apartado **a)**, tenemos que las coordenadas del punto $B = (1, 1, 1)_{\mathcal{R}'}$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ serán

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

Así, $B = \left(\frac{5}{2}, 3, \frac{9}{2}\right)_{\mathcal{R}}$.

d) Como queremos calcular todos los puntos que tengan las mismas coordenadas en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ y en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$, o sea, como queremos determinar los puntos $(x, y, z)_{\mathcal{R}}$ tales que $(x', y', z')_{\mathcal{R}'} = (x, y, z)_{\mathcal{R}'}$, entonces es suficiente con resolver la ecuación matricial[4]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{x+2y+3z}{4} \\ \frac{x+z}{2} \\ \frac{3x+2y+z}{4} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

De donde se llega al sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{x+2y+3z}{4} + 1 \\ y &= \tfrac{x+z}{2} + 2 \\ z &= \tfrac{3x+2y+z}{4} + 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4x &= x + 2y + 3z + 4 \\ 2y &= x + z + 4 \\ 4z &= 3x + 2y + z + 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3x - 2y - 3z &= 4 \\ -x + 2y - z &= 4 \\ -3x - 2y + 3z &= 12 \end{aligned}\right\}.$$

Resolviendo el último sistema (¡hágase!), se tiene que el único punto con las mismas coordenadas en ambos sistemas de referencia es el punto $P = \left(\frac{-20}{3}, -4, \frac{-16}{3}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{-20}{3}, -4, \frac{-16}{3}\right)_{\mathcal{R}'}$.

[4] La ecuación matricial surge de exigir que $(x', y', z')_{\mathcal{R}'} = (x, y, z)_{\mathcal{R}'}$ en el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$. Se obtendrá el mismo resultado si exigimos que $(x, y, z)_{\mathcal{R}} = (x', y', z')_{\mathcal{R}}$ en el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.