Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 5 (T2)

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Tarea 2 (tema 5) (curso 2020–2021)

Enunciado

En el espacio afín euclídeo usual $\mathbb{R}^3$, con el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$ usual, se considera la aplicación afín $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por la expresión matricial

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -9 & -6+\sqrt{14} & -3-2\sqrt{14} \\ -6-\sqrt{14} & -4 & -2+3\sqrt{14} \\ -3+2\sqrt{14} & -2-3\sqrt{14} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 29-\sqrt{14} \\ 24+\sqrt{14} \\ 5+\sqrt{14} \end{pmatrix}.$$

a) Comprueba que T es un isometría afín en $\mathbb{R}^3$.

b) Halla el conjunto de puntos fijos $F(T)$ y la variedad invariante $I(T)$.

c) Sea la recta afín r dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda, \\ y = 1 + 2\lambda, \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = \lambda, \end{cases}$$

Comprueba que r es una variedad invariante por T.

d) Sea el plano afín π dado por la ecuación cartesiana $3x + 2y + z = 5$. Comprueba que π es una variedad invariante por T.

e) ¿Qué tipo concreto de isometría afín es T?

Resolución

a) Recordemos que T será una isometría afín si, y solo si, la aplicación lineal asociada τ es una isometría (transformación ortogonal). Además, por la expresión de T, sabemos que la matriz asociada a τ en la base B será

$$M = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -9 & -6+\sqrt{14} & -3-2\sqrt{14} \\ -6-\sqrt{14} & -4 & -2+3\sqrt{14} \\ -3+2\sqrt{14} & -2-3\sqrt{14} & -1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, puesto que $\mathcal{R}$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$ (como espacio afín), entonces $\mathcal{R}$ es un sistema de referencia rectangular, es decir, tenemos que B es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (como espacio vectorial).

A partir de todo lo anterior, y sabiendo que

- T es una isometría afín si, y solo si, τ es una isometría lineal,
- τ es una isometría lineal si, y solo si, M es una matriz ortogonal,

bastará con comprobar que $M \cdot M^T = M^T \cdot M = I$. Realizando ambos productos de matrices, se confirma que M^T es la inversa de M (¡Hágase!).

b) Para hallar el conjunto $F(T)$ de puntos fijos de T, resolvemos el siguiente sistema:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-9 & -6+\sqrt{14} & -3-2\sqrt{14}\\ -6-\sqrt{14} & -4 & -2+3\sqrt{14}\\ -3+2\sqrt{14} & -2-3\sqrt{14} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\frac{1}{14}\begin{pmatrix}29-\sqrt{14}\\24+\sqrt{14}\\5+\sqrt{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-9 & -6+\sqrt{14} & -3-2\sqrt{14}\\ -6-\sqrt{14} & -4 & -2+3\sqrt{14}\\ -3+2\sqrt{14} & -2-3\sqrt{14} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}29-\sqrt{14}\\24+\sqrt{14}\\5+\sqrt{14}\end{pmatrix}=14\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-9 & -6+\sqrt{14} & -3-2\sqrt{14}\\ -6-\sqrt{14} & -4 & -2+3\sqrt{14}\\ -3+2\sqrt{14} & -2-3\sqrt{14} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-14\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}29-\sqrt{14}\\24+\sqrt{14}\\5+\sqrt{14}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}-9x+(-6+\sqrt{14})y+(-3-2\sqrt{14})z-14x=-29+\sqrt{14}\\ (-6-\sqrt{14})x-4y+(-2+3\sqrt{14})z-14y=-24-\sqrt{14}\\ (-3+2\sqrt{14})x+(-2-3\sqrt{14})y-z-14z=-5-\sqrt{14}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}-23x+(-6+\sqrt{14})y+(-3-2\sqrt{14})z=-29+\sqrt{14}\\ (-6-\sqrt{14})x-18y+(-2+3\sqrt{14})z=-24-\sqrt{14}\\ (-3+2\sqrt{14})x+(-2-3\sqrt{14})y-15z=-5-\sqrt{14}\end{array}\right\}.$$

Para resolver el sistema planteado, aplicaremos eliminación gaussiana.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-23 & -6+\sqrt{14} & -3-2\sqrt{14} & -29+\sqrt{14}\\ -6-\sqrt{14} & -18 & -2+3\sqrt{14} & -24-\sqrt{14}\\ -3+2\sqrt{14} & -2-3\sqrt{14} & -15 & -5-\sqrt{14}\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{6-\sqrt{14}}{23} & \frac{3+2\sqrt{14}}{23} & \frac{29-\sqrt{14}}{23}\\ -6-\sqrt{14} & -18 & -2+3\sqrt{14} & -24-\sqrt{14}\\ -3+2\sqrt{14} & -2-3\sqrt{14} & -15 & -5-\sqrt{14}\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{6-\sqrt{14}}{23} & \frac{3+2\sqrt{14}}{23} & \frac{29-\sqrt{14}}{23}\\ 0 & -\frac{392}{23} & \frac{84\sqrt{14}}{23} & -\frac{392}{23}\\ 0 & -\frac{84\sqrt{14}}{23} & -\frac{392}{23} & -\frac{84\sqrt{14}}{23}\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{6-\sqrt{14}}{23} & \frac{3+2\sqrt{14}}{23} & \frac{29-\sqrt{14}}{23}\\ 0 & 1 & -\frac{84\sqrt{14}}{392} & 1\\ 0 & -\frac{84\sqrt{14}}{23} & -\frac{392}{23} & -\frac{84\sqrt{14}}{23}\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{6-\sqrt{14}}{23} & \frac{3+2\sqrt{14}}{23} & \frac{29-\sqrt{14}}{23}\\ 0 & 1 & -\frac{84\sqrt{14}}{392} & 1\\ 0 & 0 & -\frac{140}{23} & 0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{6-\sqrt{14}}{23} & \frac{3+2\sqrt{14}}{23} & \frac{29-\sqrt{14}}{23}\\ 0 & 1 & -\frac{84\sqrt{14}}{392} & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{6-\sqrt{14}}{23} & 0 & \frac{29-\sqrt{14}}{23}\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right).$$

Por tanto, podemos concluir que $F(T)=\{(1,1,0)\}$, es decir, $(1,1,0)$ es el único punto fijo de T.

Para hallar la variedad $I(T)$, recurrimos a la ecuación $(M-I_2)^2P+(M-I_2)T(O)=0$, donde

$$T(O)=T\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}29-\sqrt{14}\\24+\sqrt{14}\\5+\sqrt{14}\end{pmatrix}.$$

Ya que

$$M-I_2=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-23 & -6+\sqrt{14} & -3-2\sqrt{14}\\ -6-\sqrt{14} & -18 & -2+3\sqrt{14}\\ -3+2\sqrt{14} & -2-3\sqrt{14} & -15\end{pmatrix},$$

entonces

$$(M-I_2)^2 = \frac{1}{196}\begin{pmatrix} -23 & -6+\sqrt{14} & -3-2\sqrt{14} \\ -6-\sqrt{14} & -18 & -2+3\sqrt{14} \\ -3+2\sqrt{14} & -2-3\sqrt{14} & -15 \end{pmatrix}^2 \Rightarrow$$

$$(M-I_2)^2 = \frac{1}{196}\begin{pmatrix} 504 & 336-28\sqrt{14} & 168+56\sqrt{14} \\ 336+28\sqrt{14} & 224 & 112-84\sqrt{14} \\ 168-56\sqrt{14} & 112+84\sqrt{14} & 56 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(M-I_2)^2 = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 36 & 24-2\sqrt{14} & 12+4\sqrt{14} \\ 24+2\sqrt{14} & 16 & 8-6\sqrt{14} \\ 12-4\sqrt{14} & 8+6\sqrt{14} & 4 \end{pmatrix}.$$

Y, por otra parte,

$$(M-I_2)T(O) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -23 & -6+\sqrt{14} & -3-2\sqrt{14} \\ -6-\sqrt{14} & -18 & -2+3\sqrt{14} \\ -3+2\sqrt{14} & -2-3\sqrt{14} & -15 \end{pmatrix}\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 29-\sqrt{14} \\ 24+\sqrt{14} \\ 5+\sqrt{14} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(M-I_2)T(O) = \frac{1}{196}\begin{pmatrix} -840+28\sqrt{14} \\ -560-28\sqrt{14} \\ -280-28\sqrt{14} \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -60+2\sqrt{14} \\ -40-2\sqrt{14} \\ -20-2\sqrt{14} \end{pmatrix}.$$

Así, $(M-I_2)^2P + (M-I_2)T(O) = 0$ viene dada por el sistema

$$\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 36 & 24-2\sqrt{14} & 12+4\sqrt{14} \\ 24+2\sqrt{14} & 16 & 8-6\sqrt{14} \\ 12-4\sqrt{14} & 8+6\sqrt{14} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -60+2\sqrt{14} \\ -40-2\sqrt{14} \\ -20-2\sqrt{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 36 & 24-2\sqrt{14} & 12+4\sqrt{14} \\ 24+2\sqrt{14} & 16 & 8-6\sqrt{14} \\ 12-4\sqrt{14} & 8+6\sqrt{14} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -60+2\sqrt{14} \\ -40-2\sqrt{14} \\ -20-2\sqrt{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 36 & 24-2\sqrt{14} & 12+4\sqrt{14} \\ 24+2\sqrt{14} & 16 & 8-6\sqrt{14} \\ 12-4\sqrt{14} & 8+6\sqrt{14} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60-2\sqrt{14} \\ 40+2\sqrt{14} \\ 20+2\sqrt{14} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 12-\sqrt{14} & 6+2\sqrt{14} \\ 12+\sqrt{14} & 8 & 4-3\sqrt{14} \\ 6-2\sqrt{14} & 4+3\sqrt{14} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30-\sqrt{14} \\ 20+\sqrt{14} \\ 10+\sqrt{14} \end{pmatrix}.$$

Usaremos eliminación gaussiana para resolver este sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 12-\sqrt{14} & 6+2\sqrt{14} & 30-\sqrt{14} \\ 12+\sqrt{14} & 8 & 4-3\sqrt{14} & 20+\sqrt{14} \\ 6-2\sqrt{14} & 4+3\sqrt{14} & 2 & 10+\sqrt{14} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{12-\sqrt{14}}{18} & \frac{6+2\sqrt{14}}{18} & \frac{30-\sqrt{14}}{18} \\ 12+\sqrt{14} & 8 & 4-3\sqrt{14} & 20+\sqrt{14} \\ 6-2\sqrt{14} & 4+3\sqrt{14} & 2 & 10+\sqrt{14} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{12-\sqrt{14}}{18} & \frac{6+2\sqrt{14}}{18} & \frac{30-\sqrt{14}}{18} \\ 0 & \frac{14}{18} & \frac{28-84\sqrt{14}}{18} & \frac{14}{18} \\ 0 & \frac{-28+84\sqrt{14}}{18} & \frac{56}{18} & \frac{-28+84\sqrt{14}}{18} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{12-\sqrt{14}}{18} & \frac{6+2\sqrt{14}}{18} & \frac{30-\sqrt{14}}{18} \\ 0 & 1 & 2-6\sqrt{14} & 1 \\ 0 & -1+3\sqrt{14} & 2 & -1+3\sqrt{14} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{12-\sqrt{14}}{18} & \frac{6+2\sqrt{14}}{18} & \frac{30-\sqrt{14}}{18} \\ 0 & 1 & 2-6\sqrt{14} & 1 \\ 0 & 0 & 256-12\sqrt{14} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{12-\sqrt{14}}{18} & \frac{6+2\sqrt{14}}{18} & \frac{30-\sqrt{14}}{18} \\ 0 & 1 & 2-6\sqrt{14} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{12-\sqrt{14}}{18} & 0 & \frac{30-\sqrt{14}}{18} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Así que $I(T) = \{(1,1,0)\}$, es decir, $(1,1,0)$ es el único punto de la variedad $I(T)$. Por cierto, en este caso se verifica que $F(T) = I(T)$, algo que no es cierto en general.

c) Para comprobar que la recta r es una variedad invariante de T, veamos que, si P es un punto cualquiera de r, entonces su imagen $T(P)$ es también un punto de r.

$$P \in r \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1+3\lambda \\ 1+2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$T(P) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -9 & -6+\sqrt{14} & -3-2\sqrt{14} \\ -6-\sqrt{14} & -4 & -2+3\sqrt{14} \\ -3+2\sqrt{14} & -2-3\sqrt{14} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+3\lambda \\ 1+2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} + \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 29-\sqrt{14} \\ 24+\sqrt{14} \\ 5+\sqrt{14} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T(P) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -15+\sqrt{14}-42\lambda \\ -10-\sqrt{14}-28\lambda \\ -5-\sqrt{14}-14\lambda \end{pmatrix} + \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 29-\sqrt{14} \\ 24+\sqrt{14} \\ 5+\sqrt{14} \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 14-42\lambda \\ 14-28\lambda \\ -14\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow T(P) = \begin{pmatrix} 1-3\lambda \\ 1-2\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T(P) = \begin{pmatrix} 1+3(-\lambda) \\ 1+2(-\lambda) \\ (-\lambda) \end{pmatrix}, \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow T(P) \in r.$$

d) Como en el apartado anterior, para comprobar que el plano π es una variedad invariante de T, veamos que, si P es un punto cualquiera de π, entonces su imagen $T(P)$ es también un punto de π.

Para poder continuar, determinemos las ecuaciones paramétricas de π resolviendo su ecuación cartesiana.

$$3x+2y+z=5 \Rightarrow z = 5-3x-2y \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\alpha, \\ y=\beta, \\ z=5-3\alpha-2\beta, \end{array}\right. \quad \text{con } \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

A partir de aquí,

$$P \in \pi \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 5-3\alpha-2\beta \end{pmatrix}, \text{ para ciertos } \alpha,\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$T(P) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -9 & -6+\sqrt{14} & -3-2\sqrt{14} \\ -6-\sqrt{14} & -4 & -2+3\sqrt{14} \\ -3+2\sqrt{14} & -2-3\sqrt{14} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 5-3\alpha-2\beta \end{pmatrix} + \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 29-\sqrt{14} \\ 24+\sqrt{14} \\ 5+\sqrt{14} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T(P) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6\sqrt{14}\alpha+5\sqrt{14}\beta+14-11\sqrt{14} \\ -10\sqrt{14}\alpha-6\sqrt{14}\beta+14+16\sqrt{14} \\ 2\sqrt{14}\alpha-3\sqrt{14}\beta+\sqrt{14} \end{pmatrix}, \text{ para ciertos } \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Ahora, para verificar que $T(P)$ está en π, sustituimos el punto obtenido en la ecuación cartesiana de π:

$$3\frac{6\sqrt{14}\alpha+5\sqrt{14}\beta+14-11\sqrt{14}}{14} + 2\frac{-10\sqrt{14}\alpha-6\sqrt{14}\beta+14+16\sqrt{14}}{14} + \frac{2\sqrt{14}\alpha-3\sqrt{14}\beta+\sqrt{14}}{14} =$$

$$\frac{0\alpha + 0\beta + 70 + 0\sqrt{14}}{14} = \frac{70}{14} = 5.$$

Por tanto, $T(P)$ verifica la ecuación cartesiana de π, es decir, $T(P) \in \pi$.

e) Como $\det(M) = -1$ (¡compruébese!), tenemos que T es una isometría afín inversa en $\mathbb{R}^3$. Además, como el conjunto $F(T)$ está formado por un único punto, podemos asegurar que "T es la composición de un giro y una simetría, siendo el eje de giro y el plano de simetría perpendiculares entre sí. Además, el punto de corte del eje (de giro) y el plano (de simetría) es el único punto fijo" (véase la página 10 del archivo "Tema4_apendice.pdf").

Además, por lo visto en los apartados anteriores, deducimos que el eje de giro es la recta r y el plano de simetría es el plano π, ambos dados en el enunciado.

Aunque no se pide, vamos a determinar el ángulo del giro efectuado. Para ello procedemos del siguiente modo.

- Consideramos el punto $P = (1,1,0)$, que es el único punto fijo de T y, además, el único punto de $r \cap \pi$.
- Por otra parte, tomamos un punto cualquiera $Q \in \pi$ distinto de P. Por ejemplo, $Q = (0,0,5)$ (resultado de elegir $\alpha = \beta = 0$ en las paramétricas de π).
- Es claro que $T(P) = P$ y que $Q' = T(Q) \in \pi$.
- Finalmente, el ángulo de giro es el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{PQ'}$.

Realicemos los cálculos correspondientes.[1]

$$Q' = T(Q) = T\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-9 & -6+\sqrt{14} & -3-2\sqrt{14}\\ -6-\sqrt{14} & -4 & -2+3\sqrt{14}\\ -3+2\sqrt{14} & -2-3\sqrt{14} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{14}\begin{pmatrix}29-\sqrt{14}\\24+\sqrt{14}\\5+\sqrt{14}\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Q' = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}14-11\sqrt{14}\\14+16\sqrt{14}\\\sqrt{14}\end{pmatrix}.$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (0,0,5) - (1,1,0) = (-1,-1,5).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ'} = \frac{1}{14}(14-11\sqrt{14}, 14+16\sqrt{14}, \sqrt{14}) - (1,1,0) = \frac{1}{14}(-11\sqrt{14}, 16\sqrt{14}, \sqrt{14}).$$

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\langle \vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{0}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{27}} = 0.$$

Por tanto, a falta de saber si el giro es en el sentido de las agujas del reloj o en el sentido contrario, concluimos que el ángulo de giro de la isometría afín T es igual a $\frac{\pi}{2}$.

[1] Al realizar los cálculos, veremos que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. Esto no debe sorprendernos, puesto que T es una isometría afín y, por tanto, la aplicación lineal asociada τ es una isometría (transformación ortogonal). En consecuencia, y ya que $\vec{v}$ está definido por las imágenes de los puntos que definen a $\vec{u}$, deducimos que $\tau(\vec{u}) = \vec{v}$ y, así, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ han de tener la misma norma.