**Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023**

**Ejercicios desarrollados - Tema 6 (T1)**

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

# Tarea 1 (tema 6) (curso 2020–2021)

### Enunciado

En el plano afín euclídeo usual $\mathbb{R}^2$, con el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$ usual, se considera la cónica dada por la expresión

$$4x^2 + 24xy + 11y^2 - 16x - 38y - 5 = 0.$$

**a)** Obtén la ecuación reducida de dicha cónica, especificando el cambio de sistema de referencia $\mathcal{R}'$ realizado e indicando de qué tipo de cónica se trata.

**b)** Calcula los elementos geométricos de la cónica (ejes de simetría, centro, vértices, focos, asíntotas y directriz, caso de existir) en el sistema de referencia $\mathcal{R}$.

### Resolución

**a)** A partir del enunciado, la cónica viene dada por ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 & -38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 5 = 0.$$

Empezamos diagonalizando por semejanza ortogonal la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$ (lo que es posible por ser $A$ simétrica). Primero resolvemos la ecuación característica asociada a $A$ con el fin de hallar sus valores propios:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 12 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)(11-\lambda) - 12^2 = 0 \Rightarrow 44 - 15\lambda + \lambda^2 - 144 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 15\lambda - 100 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 + 4 \times 100}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{15 \pm 25}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 20 \text{ o } \lambda_2 = -5.$$

Para determinar un vector propio asociado a $\lambda_1 = 20$, resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 4-20 & 12 \\ 12 & 11-20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando eliminación gaussiana,

$$\begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -16 & 12 & 0 \\ 12 & -9 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$-4x + 3y = 0 \Rightarrow (a_1, b_1) = (3, 4).$$

Pero como queremos que la diagonalización sea por semejanza ortogonal, entonces debemos normalizar el vector obtenido.

$$\|(3,4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \to (a_1, b_1) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Para determinar un vector propio (con norma igual a uno) asociado a $\lambda_2 = -5$, podemos repetir el proceso anterior (¡hágase!) o, de modo alternativo, podemos tener en cuenta que, al ser $A$ simétrica, entonces cualquier vector propio $(a_2, b_2)$ asociado a $\lambda_2 = -5$ debe ser ortogonal a cualquier vector propio $(a_1, b_1)$ asociado a $\lambda_1 = 20$. Ahora bien, como todos los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 20$ son múltiplos de $(a_1, b_1) = (3, 4)$, entonces es claro que todos los vectores asociados a $\lambda_2 = -5$ serán múltiplos del vector $(a_2, b_2) = (-4, 3)$. Finalmente, normalizamos este vector.[1]

$$\|(-4,3)\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5 \to (a_2, b_2) = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

A partir de los vectores calculados, podemos definir el cambio de sistema de referencia[2]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Cambio que, introducido en la ecuación general de la cónica, nos lleva a una expresión sin términos en $x_1 y_1$. En efecto,[3]

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 & -38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 & -38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -40 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$20(x_1)^2 - 5(y_1)^2 - 40x_1 - 10y_1 - 5 = 0.$$

Ahora, para eliminar los términos lineales, consideramos un cambio de sistema dado por una traslación.

$$(x_1, y_1) = (x' + \alpha, y' + \beta) \Rightarrow 20(x' + \alpha)^2 - 5(y' + \beta)^2 - 40(x' + \alpha) - 10(y' + \beta) - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$20\left((x')^2 + 2\alpha x' + \alpha^2\right) - 5\left((y')^2 + 2\beta y' + \beta^2\right) - 40x' - 40\alpha - 10y' - 10\beta - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$20(x')^2 - 5(y')^2 + (40\alpha - 40)\, x' + (-10\beta - 10)\, y' + 20\alpha^2 - 5\beta^2 - 40\alpha - 10\beta - 5 = 0.$$

Por tanto, para que no haya términos en $x'$ e $y'$, es necesario que $40\alpha - 40 = 0$ y que $-10\beta - 10 = 0$, de donde, $\alpha = 1$ y $\beta = -1$. Así, con lo valores calculados, tenemos que

$$20(x')^2 - 5(y')^2 - 20 = 0 \Rightarrow \frac{(x')^2}{1^2} - \frac{(y')^2}{2^2} = 1.$$

Teniendo en cuenta la expresión reducida obtenida, la cónica dada es una hipérbola.

Por otra parte, el cambio de sistema de referencia, que transforma la ecuación general de la hipérbola en su ecuación reducida, viene dado por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' + 1 \\ y' - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

[1] Podemos tomar también el vector $(4, -3)$ pero, como comprobaremos posteriormente, el vector $(-4, 3)$ nos permitirá definir un cambio de sistema de referencia correspondiente a un giro en el plano.

[2] El cambio de sistema de referencia definido se corresponde con un giro en el plano. En efecto, al estar considerando un sistema de referencia rectangular y verificarse que la matriz de cambio es ortogonal (esto es, $M \cdot M^T = I$) y con determinante igual a uno, podemos asegurar que tal matriz representa un giro en el plano.

[3] ¡Varios cálculos deben completarse!

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Aunque no se pide, pero sí será necesario en el apartado siguiente, el cambio inverso es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

**b)** A partir de la ecuación reducida (considerando los valores $a = 1$, $b = 2$ y $c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$), sabemos que los elementos de la hipérbola en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ son

- focos: $F_1 = (\sqrt{5}, 0)$ y $F_2 = (-\sqrt{5}, 0)$;
- vértices: $V_1 = (1, 0)$ y $V_2 = (-1, 0)$;
- centro: $C = (0, 0)$;
- los ejes de simetría son: $x' = 0$ e $y' = 0$;
- las asíntotas son: $y' = 2x'$ e $y' = -2x'$.

Entonces, usando el cambio (1.1), tenemos que en el sistema de referencia $\mathcal{R}$

- los focos son:
$$F_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7+3\sqrt{5}}{5} \\ \frac{1+4\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$
y
$$F_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7-3\sqrt{5}}{5} \\ \frac{1-4\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix};$$
- los vértices son:
$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
y
$$V_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{-3}{5} \end{pmatrix};$$
- el centro es:
$$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Por último, usando el cambio (1.2), tenemos que en el sistema de referencia $\mathcal{R}$

- los ejes de simetría son $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0$ y $\frac{-4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1 = 0$;
- las asíntotas son $\frac{-4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1 = 2\left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1\right)$ y $\frac{-4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1 = -2\left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1\right)$.

Operando y simplificando las expresiones, entonces[4]

- los ejes de simetría son $3x + 4y - 5 = 0$ y $4x - 3y - 5 = 0$;
- las asíntotas son $2x + y - 3 = 0$ y $2x + 11y - 5 = 0$.

[4]Es interesante observar que, como debe ser, el centro está en los dos ejes de simetría y en las dos asíntotas. Por su parte, los dos focos y los dos vértices están, como también debe ser, en el segundo eje de simetría hallado, es decir, en la recta $4x - 3y - 5 = 0$.