El objetivo principal de este documento es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Ejercicio 6.2

Enunciado

Determina la ecuación general de la elipse de focos $(0,1)$ y $(-1,2)$ y semieje $a=\sqrt{2}$.

Resolución

Sabemos que una elipse es el lugar geométrico de los puntos (del plano) cuya suma de distancias a los focos es constantemente igual a un cierto valor $2a$. Para que esto sea así, es necesario que el valor de a sea mayor que la mitad de la distancia entre los focos. En nuestro caso tenemos que

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\left((0,1),(-1,2)\right)=\frac{1}{2}\|(-1,1)\|=\frac{\sqrt{2}}{2}<a=\sqrt{2},$$

por lo que se cumple la condición exigida.

Pasamos a calcular la ecuación general de la elipse.

$$\begin{gathered}
\mathrm{d}\left((x,y),(0,1)\right)+\mathrm{d}\left((x,y),(-1,2)\right)=2\sqrt{2}\Rightarrow\|(-x,1-y)\|+\|(-1-x,2-y)\|=2\sqrt{2}\Rightarrow\\
\sqrt{(-x)^2+(1-y)^2}+\sqrt{(-1-x)^2+(2-y)^2}=2\sqrt{2}\Rightarrow\\
\sqrt{x^2+y^2-2y+1}+\sqrt{x^2+2x+y^2-4y+5}=2\sqrt{2}\Rightarrow\\
\sqrt{x^2+2x+y^2-4y+5}=2\sqrt{2}-\sqrt{x^2+y^2-2y+1}\Rightarrow\\
(\sqrt{x^2+2x+y^2-4y+5})^2=(2\sqrt{2}-\sqrt{x^2+y^2-2y+1})^2\Rightarrow\\
x^2+2x+y^2-4y+5=8+x^2+y^2-2y+1-4\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2-2y+1}\Rightarrow\\
2x-2y-4=-4\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2-2y+1}\Rightarrow\\
x-y-2=-2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2-2y+1}\Rightarrow\\
x^2+y^2-2xy-4x+4y+4=8(x^2+y^2-2y+1)\Rightarrow\\
7x^2+7y^2+2xy+4x-20y+4=0.
\end{gathered}$$

Ejercicio 6.4.b

Enunciado

Escribe, cuando proceda, las coordenadas del centro, vértices y focos, así como unas ecuaciones de los ejes, asíntotas y directrices de la cónicas $-x^2+3y^2=-5$.

Resolución

A partir de la expresión dada de la cónica,

$$-x^2+3y^2=-5\Rightarrow\frac{x^2}{5}-\frac{3y^2}{5}=1\Rightarrow\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{\frac{5}{3}}=1\Rightarrow\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2}=1,$$

que es la ecuación reducida de una hipérbola.

Por tanto, las constantes de la hipérbola son $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{\frac{5}{3}}$ y $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{20}{3}}$. En consecuencia,

- el centro está en $C = (0, 0)$;
- los vértices están en $V = (\pm\sqrt{5}, 0)$;
- los focos están en $F = \left(\pm\sqrt{\frac{20}{3}}, 0\right)$;
- los ejes de simetría son $x = 0$ e $y = 0$;
- las asíntotas son $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

Ejercicio 6.5.c

Enunciado

Obtén la ecuación reducida de la cónica $2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0$, especificando el cambio de sistema de referencia realizado e indicando de qué tipo de cónica se trata.

Resolución

A partir de la ecuación $2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0$, la expresión matricial de la cónica es

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 18 = 0.$$

Como la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de la cónica ya es diagonal, pasamos directamente a eliminar los términos en x e y mediante una traslación.

$$2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) + 18 = 0 \Rightarrow$$

$$2(x-3)^2 - 2\cdot 9 + (y-2)^2 - 4 + 18 = 0 \Rightarrow 2(x-3)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0.$$

Así pues, tomando $x_1 = x - 3$ e $y_1 = y - 2$, tenemos que

$$2(x-3)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2x_1^2 + y_1^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2x_1^2 + y_1^2 = 4 \Rightarrow \frac{x_1^2}{2} + \frac{y_1^2}{4} = 1.$$

Por tanto, la cónica definida por la ecuación $2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0$ es una elipse y el cambio que permite obtener su ecuación reducida viene dado por la expresión

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Podemos interpretar este cambio como un giro (de ángulo 0 y centro el origen de coordenadas) compuesto con una traslación (de vector $(3, 2)$).

Ejercicio 6.6.b

Enunciado

Indica qué tipo de cónica representa la ecuación $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$ y calcula sus elementos geométricos: ejes, centro, vértices, focos, asíntotas y directriz, caso de existir.

Resolución

Para hallar los elementos de la cónica, primero obtendremos su forma reducida mediante un cambio de sistema de referencia adecuado. Una vez hecho esto, determinaremos los elementos de la cónica (original) a partir de los elementos de la reducida y la aplicación del cambio de sistema de referencia.

A partir de la ecuación $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$, la expresión matricial de la cónica es

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0. \tag{5.1}$$

Como la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ asociada a la cónica es simétrica, procedemos a diagonalizarla ortogonalmente (esto es, el cambio de base aplicado debe ser entre bases ortonormales).

Para hallar los valores propios de A, estudiamos el determinante de la matriz $A - \lambda I_2$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ y } \lambda_2 = 0.$$

Para hallar el subespacio vectorial V_1 asociado a $\lambda_1 = 2$ resolvemos el sistema $(A - 2I_2)v = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha, \\ y = -\alpha, \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, V_1 es el subespacio vectorial generado por el vector $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ (que ya hemos normalizado).

Para hallar el subespacio vectorial V_2 asociado a $\lambda_2 = 0$ resolvemos el sistema $(A - 2I_0)v = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1-0 & -1 \\ -1 & 1-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha, \\ y = \alpha, \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, V_2 es el subespacio vectorial generado por el vector $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (que ya hemos normalizado).[1]

A partir de lo hecho, tenemos que $B' = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ es una base ortonormal que permite simplificar la expresión de la cónica dada. En efecto, tomando el cambio de base[2]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

si sustituimos en (5.1),

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2x_1^2 + \frac{10}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 + 1 = 0. \tag{5.2}$$

Ahora procederemos a eliminar el término en x_1 (pues no podemos eliminar el término en y_1 al no haber término en y_1^2). Para ello[3] consideramos la traslación dada por $x_1 = x_2 + \alpha$, $y_1 = y_2 + \beta$ y sustituimos en (5.2).

$$2(x_2+\alpha)^2 + \frac{10}{\sqrt{2}}(x_2+\alpha) - \frac{2}{\sqrt{2}}(y_2+\beta) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2x_2^2 + 4\alpha x_2 + 2\alpha^2 + \frac{10}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{10}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{2}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\beta + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2x_2^2 + \left(4\alpha + \frac{10}{\sqrt{2}}\right)x_2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_2 + \left(2\alpha^2 + \frac{10}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{2}{\sqrt{2}}\beta + 1\right) = 0.$$

Como queremos que quede la expresión $2x_2^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_2 = 0$, necesitamos que

$$\left.\begin{array}{r} 4\alpha + \frac{10}{\sqrt{2}} = 0 \\ 2\alpha^2 + \frac{10}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{2}{\sqrt{2}}\beta + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{-5}{2\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{-21}{4\sqrt{2}}.$$

[1]Podemos evitar los cálculos para V_2 si tenemos en cuenta que, por ser A simétrica, el subespacio V_2 es siempre ortogonal a V_1. Entonces, como $\dim V_2 = 1$ y V_1 está generado por $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, es claro que V_2 estará generado por $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

[2]Este cambio corresponde a un giro de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y centro el origen de coordenadas.

[3]Esto mismo se puede hacer mediante ajuste de cuadrados, tal como se aplicó en el Ejercicio 6.5.c.

Por tanto, la ecuación reducida de la cónica es

$$x_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$$

y, para llegar a ella, se ha empleado el cambio de sistema de referencia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - \frac{5}{2\sqrt{2}} \\ y_2 - \frac{21}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{31}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix}.$$

A partir de la ecuación reducida, la cónica es una parábola (simétrica con respecto al eje de ordenadas) con parámetro $p = \frac{1}{2\sqrt{2}}$y sus elementos son

- vértice: $(x_2, y_2) = (0, 0)$;
- foco: $(x_2, y_2) = \left(0, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$;
- eje de simetría: $x_2 = 0$;
- directriz: $y_2 = \frac{-1}{4\sqrt{2}}$.

Considerando el cambio de (x_2, y_2) a (x, y), tenemos que el la cónica original

- vértice: $(x, y) = \left(\frac{-31}{8}, \frac{-11}{8}\right)$;
- foco: $(x, y) = \left(\frac{-15}{4}, \frac{-5}{4}\right)$.

Para el eje de simetría y la directriz es mejor determinar el cambio de (x, y) a (x_2, y_2). Para ello,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{31}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{31}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{31}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{31}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{4\sqrt{2}} \\ \frac{21}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos que

- eje de simetría: $x - y + \frac{5}{2} = 0$;
- directriz: $x - y + \frac{11}{2} = 0$.