Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 7 (T1)

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Tarea 1 (tema 7) (curso 2020-2021)

Enunciado

Sea la ecuación diferencial

$$x'(t) = \frac{x(t)^2 - 4}{t}. \tag{1.1}$$

a) Compruébese que la familia de funciones

$$x(t) = \frac{2(1 - Kt^4)}{1 + Kt^4},\ \forall t \in I,\ K \in \mathbb{R},$$

es una solución de (1.1) (siendo I un intervalo a determinar para cada condición inicial posible).

b) ¿Cuándo admite solución el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)^2-4}{t}, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

siendo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$? ¿Cuándo hay unicidad de solución?

c) Resuélvase, si es posible, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)^2-4}{t}, \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

d) Resuélvase, si es posible, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)^2-4}{t}, \\ x(1) = 2. \end{cases}$$

e) Resuélvase, si es posible, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)^2-4}{t}, \\ x(1) = \frac{-2}{3}. \end{cases}$$

Resolución

a) Para comprobar que la familia de funciones

$$x(t) = \frac{2(1 - Kt^4)}{1 + Kt^4}, \ \forall t \in I, \ K \in \mathbb{R},$$

es una solución de (1.1), calculamos la derivada de cada elemento de la familia.[1]

$$x'(t) = 2\frac{-4Kt^3(1 + Kt^4) - (1 - Kt^4)4Kt^3}{(1 + Kt^4)^2} = 2\frac{-4Kt^3 - 4K^2t^7 - 4Kt^3 + 4K^2t^7}{(1 + Kt^4)^2} = \frac{-16Kt^3}{(1 + Kt^4)^2}.$$

Ahora, sustituyendo las expresiones de $x(t)$ y $x'(t)$ en (1.1),

$$\frac{-16Kt^3}{(1 + Kt^4)^2} = \frac{\left(\frac{2(1-Kt^4)}{1+Kt^4}\right)^2 - 4}{t} \iff \frac{-16Kt^3}{(1 + Kt^4)^2} = \frac{\left(2(1 - Kt^4)\right)^2 - 4(1 + Kt^4)^2}{t(1 + Kt^4)^2} \iff$$

$$\frac{-16Kt^3}{(1 + Kt^4)^2} = \frac{4(1 - Kt^4)^2 - 4(1 + Kt^4)^2}{t(1 + Kt^4)^2} \iff$$

$$\frac{-16Kt^3}{(1 + Kt^4)^2} = \frac{4(1 - 2Kt^4 + K^2t^8) - 4(1 + 2Kt^4 + K^2t^8)}{t(1 + Kt^4)^2}.$$

Como ya es fácil comprobar, esta última igualdad es cierta y, por consiguiente, se deduce que la familia de funciones dada es solución de la ecuación (1.1).[2]

b) Para que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)^2-4}{t}, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admita solución, es necesario tomar pares de datos $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ donde esté bien definida y sea continua la función $f(t, x) = \frac{x(t)^2-4}{t}$. Por tanto, bastará considerar $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $t_0 \neq 0$.

Por otra parte, para asegurar la unicidad de solución, podemos exigir que la derivada parcial de $f(t, x)$ con respecto a x también sea continua. Ya que $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{2x}{t}$, podemos afirmar que, en el problema de valores iniciales dado, habrá (existencia y) unicidad de solución para cualquier par $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $t_0 \neq 0$.

c) Como la condición inicial está dada en $t = 0$, no tiene sentido resolver el problema planteado.

---

[1]Conviene observar que (1.1) no esta definida en $t = 0$, por lo que las soluciones de esta ecuación no estarán definidas en intervalos que contengan a $t = 0$.

Por otra parte, cada elemento de la familia puede estar definido en cualquier intervalo real tal que el denominador no se anule. Así, tenemos que:

a) Si K es positivo, entonces $1+Kt^4$ es positivo para todo t real. Por tanto, en este caso $x(t)$ se puede definir en cualquier intervalo que no contenga a $t = 0$, siendo $I =]-\infty, 0[$ o $I =]0, +\infty[$ los intervalos maximales posibles.

b) Si K es nula, entonces $x(t) = 2$ para cualquier t y, como en el caso anterior, $x(t)$ se puede definir en cualquier intervalo que no contenga a $t = 0$, siendo $I =]-\infty, 0[$ o $I =]0, +\infty[$ los intervalos maximales posibles.

c) Si K es negativo, entonces $1 + Kt^4$ se anula en $t = \frac{1}{\sqrt[4]{-K}}$. Por tanto, $x(t)$ estará definida en cualquier intervalo que no contenga ni a $t = 0$ ni a $t = \frac{1}{\sqrt[4]{-K}}$ y, en particular, los intervalos maximales serán $I =]-\infty, 0[$, $I =]0, \frac{1}{\sqrt[4]{-K}}[$ o $]I = \frac{1}{\sqrt[4]{-K}}, +\infty[$.

Por último, $x(t)$ es siempre derivable en su dominio.

[2]Comentar que en la familia dada no están todas las soluciones de (1.1). En efecto, faltaría $x(t) = -2$, que tendría como intervalos maximales de definición a $I =]-\infty, 0[$ o $I =]0, +\infty[$.

d) Como en el punto $(t_0, x_0) = (1, 2)$ la función $f(t,x) = \frac{x(t)^2-4}{t}$ satisface las condiciones para la existencia y unicidad de solución, tiene sentido resolver el problema planteado.

A partir de la familia de soluciones ya vista,

$$x(1) = \frac{2(1-K\cdot 1^4)}{1+K\cdot 1^4} = \frac{2(1-K)}{1+K} = 2 \Longleftrightarrow \frac{1-K}{1+K} = 1 \Longleftrightarrow 1-K = 1+K \Longleftrightarrow K = 0.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que $1 > 0$, la solución del problema es

$$x(t) = 2, \ \ \forall t > 0.$$

e) Para el punto $(t_0, x_0) = \left(1, \frac{-2}{3}\right)$ la función $f(t,x) = \frac{x(t)^2-4}{t}$ satisface las condiciones para la existencia y unicidad de solución. Por consiguiente tiene sentido resolver el problema planteado.

A partir de la familia de soluciones ya vista,

$$x(1) = \frac{2(1-K\cdot 1^4)}{1+K\cdot 1^4} = \frac{2(1-K)}{1+K} = \frac{-2}{3} \Longleftrightarrow \frac{1-K}{1+K} = \frac{-1}{3} \Longleftrightarrow 3(1-K) = -(1+K) \Longleftrightarrow K = 2.$$

Por tanto, puesto que $1 > 0$, la solución del problema es

$$x(t) = \frac{2(1-2t^4)}{1+2t^4}, \ \ \forall t > 0.$$