Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 7 (T2)

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Tarea 2 (tema 7) (curso 2020-2021)

Enunciado

Responde, justificadamente, las siguientes cuestiones.

a) ¿Es $x^2x' + t^2 = 0$ una ecuación diferencial en variables separadas?

b) ¿Es $x' = \frac{-t^2}{x^2}$ una ecuación diferencial homogénea?

c) ¿Es $t^2\,dt + x^2\,dx = 0$ una ecuación diferencial exacta?

d) Resuelve las tres ecuaciones, de acuerdo con su tipo, y compara los resultados obtenidos.

Resolución

a) La ecuación $x^2x' + t^2 = 0$ es de variables separadas, pues puede expresarse como $x' = h(t)g(x)$. En efecto, pasando a su forma normal,

$$x' = \frac{-t^2}{x^2}$$

por lo que podemos tomar $h(t) = -t^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y $g(x) = \frac{1}{x^2}$, para todo $x \in I =]-\infty, 0[$ o para todo $x \in I =]0 + \infty[$.

b) La ecuación $x' = \frac{-t^2}{x^2}$ es homogénea, pues podemos expresarla como $x' = q(\frac{x}{t})$ tomando

$$q(\xi) = \frac{-1}{\xi^2}.$$

c) Consideremos $M(t,x) = t^2$ y $N(t,x) = x^2$. Entonces $M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0$ se corresponde con la ecuación propuesta. Además,

- $\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = 0$,
- $\frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = 0$.

Por tanto, $\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}$, esto es, se cumple la condición de exactitud y, en consecuencia, la ecuación dada es exacta.

d) En primer lugar, observemos que (siendo $x \neq 0$)

$$t^2\,dt + x^2\,dx = 0 \implies x^2\,dx = -t^2\,dt \implies \frac{dx}{dt} = \frac{-t^2}{x^2} \implies x' = \frac{-t^2}{x^2}.$$

Por tanto, las tres ecuaciones planteadas son la misma, ya que vienen dadas por la misma forma normal. Consecuentemente, al resolverlas debemos obtener las mismas soluciones (aunque quizás estén expresadas de modo distinto, pero equivalente).

Antes de realizar cálculos, debemos observar que los posibles dominios maximales de la ecuación serán

$$D_1 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$$

o

$$D_2 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\},$$

ya que la función $f(t, x) = \frac{-t^2}{x^2}$ está bien definida (y es continua) en tales dominios.

Ahora hallaremos las expresiones de las soluciones generales de la ecuación para, posteriormente, analizar los posibles dominios maximales de las soluciones.

d.1) (Variables separadas). Operando,

$$x' = \frac{-t^2}{x^2} \implies \frac{dx}{dt} = \frac{-t^2}{x^2} \implies x^2\,dx = -t^2\,dt \implies \int x^2\,dx = -\int t^2\,dt \implies$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{-t^3}{3} + C,\ \ C \in \mathbb{R} \implies x^3 = C - t^3 \implies x(t) = \sqrt[3]{C - t^3},\ \ C \in \mathbb{R}.$$

d.2) (Homogénea). Tomando el cambio $u = \frac{x}{t}$, entonces

$$u = \frac{x}{t} \implies x = ut \implies x' = u't + u,$$

de donde, sustituyendo en $x' = \frac{-t^2}{x^2}$, tenemos que

$$u't + u = \frac{-1}{u^2} \implies u't = \frac{-1}{u^2} - u \implies u't = \frac{-1 - u^3}{u^2} \implies \frac{du}{dt}t = \frac{-1 - u^3}{u^2} \implies$$

$$\frac{u^2}{1 + u^3}\,du = \frac{-1}{t}\,dt \implies \int \frac{u^2}{1 + u^3}\,du = \int \frac{-1}{t}\,dt \implies \frac{1}{3}\int \frac{3u^2}{1 + u^3}\,du = -\int \frac{1}{t}\,dt \implies$$

$$\frac{1}{3}\ln|1 + u^3| = -\ln|t| + C,\ \ C \in \mathbb{R} \implies \ln|1 + u^3| = -3\ln|t| + C,\ \ C \in \mathbb{R} \implies$$

$$\ln|1 + u^3| + 3\ln|t| = C,\ \ C \in \mathbb{R} \implies \ln|1 + u^3| + \ln|t|^3 = C,\ \ C \in \mathbb{R} \implies$$

$$\ln|1 + u^3| + \ln|t^3| = C,\ \ C \in \mathbb{R} \implies \ln\big(|1 + u^3| \cdot |t^3|\big) = C,\ \ C \in \mathbb{R} \implies$$

$$\ln\big(|(1 + u^3) \cdot (t^3)|\big) = C,\ \ C \in \mathbb{R} \implies \ln|t^3 + u^3t^3| = C,\ \ C \in \mathbb{R} \implies$$

$$|t^3 + u^3t^3| = K,\ \ K > 0 \implies |t^3 + (ut)^3| = K,\ \ K > 0.$$

Deshaciendo el cambio $x = ut$,

$$|t^3 + (ut)^3| = K,\ \ K > 0 \implies |t^3 + x^3| = K,\ \ K > 0 \implies \begin{cases} t^3 + x^3 = K, & K > 0 \\ t^3 + x^3 = -K, & K > 0 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} t^3 + x^3 = K, & K > 0 \\ t^3 + x^3 = K, & K < 0 \end{cases} \implies t^3 + x^3 = K,\ \ K \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Por otra parte, si $K = 0$, entonces tendríamos

$$t^3 + x^3 = 0 \implies x^3 = -t^3 \implies x = \sqrt[3]{-t^3} \implies x = -t.$$

Y podemos comprobar, por sustitución directa, que $x(t) = -t$ es también solución de $x' = \frac{-t^2}{x^2}$. Concluimos que

$$t^3 + x^3 = K,\ \ K \in \mathbb{R},$$

es solución, en implícitas, de la ecuación dada. Pero, en este caso, podemos despejar:

$$t^3 + x^3 = K,\ \ K \in \mathbb{R} \implies x^3 = K - t^3,\ \ K \in \mathbb{R} \implies x(t) = \sqrt[3]{K - t^3},\ \ K \in \mathbb{R}.$$

d.3) (Exacta). Buscamos $F(t,x)$ tal que $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x)$ y $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = N(t,x)$.

- $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = M(t,x) \implies \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = t^2 \implies F(t,x) = \int t^2\, dt \implies F(t,x) = \frac{t^3}{3} + h(x)$.
- $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = N(t,x) \implies \frac{\partial\left(\frac{t^3}{3}+h(x)\right)}{\partial x} = x^2 \implies h'(x) = x^2 \implies h(x) = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$.
- $F(t,x) = \frac{t^3}{3} + \frac{x^3}{3}$.

A partir de los cálculos realizados, concluimos que

$$\frac{t^3}{3} + \frac{x^3}{3} = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

es solución, en implícitas, de la ecuación dada. De nuevo podemos despejar:

$$\frac{t^3}{3} + \frac{x^3}{3} = C, \quad C \in \mathbb{R} \implies t^3 + x^3 = C, \quad C \in \mathbb{R} \implies x^3 = C - t^3, \quad C \in \mathbb{R} \implies$$

$$x(t) = \sqrt[3]{C - t^3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como presuponíamos antes de resolver por los tres métodos, la expresión de la solución ha sido exactamente la misma en los tres casos. A saber,

$$x(t) = \sqrt[3]{K - t^3}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Pasamos a analizar los dominios maximales posibles. Para ello, recordemos que x no puede anularse, según vimos al describir los dominios D_1 y D_2 de la ecuación, por lo que es conveniente determinar si existen valores de t para los que $x(t) = 0$.

$$x(t) = \sqrt[3]{K - t^3} = 0 \iff K - t^3 = 0 \iff t = \sqrt[3]{K}.$$

Por otra parte, y a partir de la forma normal de la ecuación diferencial considerada, tenemos que

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{-t^2}{x^2}\right)}{\partial x} = \frac{-2t^2}{x^3}$$

es una función continua, tanto en D_1 como en D_2. De esta forma, podemos asegurar la existencia y unicidad de solución para todo par (t_0, x_0) perteneciente al dominio D_1 o al dominio D_2.

Finalmente, podemos concluir que las soluciones de la ecuación diferencial $x' = \frac{-t^2}{x^2}$ son las dadas por

$$x(t) = \sqrt[3]{K - t^3}, \quad \forall t \in I, \ K \in \mathbb{R},$$

donde $I = \left]-\infty, \sqrt[3]{K}\right[$ o $I = \left]\sqrt[3]{K}, +\infty\right[$.