Asignatura: MATEMÁTICA APLICADA – Curso: 2022–2023

Ejercicios desarrollados - Tema 7 (T3)

El objetivo principal de estas notas es comprender que la resolución de un ejercicio no consiste en una simple sucesión de cálculos. Al contrario, un ejercicio debe contener explicaciones sobre **qué se va a hacer, cómo se va a hacer y, quizás lo más importante, por qué se va a hacer lo que se hace**.

Tarea 3 (tema 7) (curso 2020-2021)

Enunciado

Considera la ecuación diferencial

$$x'''(t) - 3x''(t) + 4x'(t) - 2x(t) = -2t^3. \tag{1.1}$$

Responde, justificadamente, las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuál es el intervalo maximal de definición de las soluciones de (1.1)?

b) Resuelve la ecuación lineal homogénea asociada a (1.1).

c) Calcula una solución particular de (1.1).

d) Resuelve (1.1).

Resolución

a) La ecuación (1.1) es una ecuación diferencial lineal de orden tres y con coeficientes constantes. Por otra parte, la función $b(t) = -2t^3$ está definida en $\mathbb{R}$ y, además, es continua.

Por tanto, las soluciones de (1.1) están definidas en $\mathbb{R}$.

b) Como (1.1) es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, para resolver la ecuación lineal homogénea asociada hacemos uso de la ecuación característica, que en este caso viene dada por la expresión

$$r^3 - 3r^2 + 4r - 2 = 0.$$

Aplicando Ruffini con $r = 1$, tenemos que

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 4 & -2 \\ 1) & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & (0) \end{array}$$

De donde

$$r^3 - 3r^2 + 4r - 2 = 0 \Longrightarrow (r-1)(r^2 - 2r + 2) = 0.$$

Resolviendo la ecuación $r^2 - 2r + 2 = 0$,

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Por tanto, las raíces de $r^3 - 3r^2 + 4r - 2 = 0$ son $r = 1$, $r = 1 + i$ y $r = 1 - i$.

A partir de los cálculos realizados, tenemos que $\{e^t, e^t\cos(t), e^t\operatorname{sen}(t)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de $x''' - 3x'' + 4x' - 2x = 0$ y, en consecuencia, todas las soluciones de esta ecuación diferencial serán de la forma

$$x_h(t) = ae^t + be^t\cos(t) + ce^t\operatorname{sen}(t),\ \forall t \in \mathbb{R},\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

c) Para hallar una solución particular $x_p(t$ de (1.1) aplicaremos el método de coeficientes indeterminados.

Puesto que (1.1) es de coeficientes constantes y $b(t) = -2t^3$ es un polinomio de grado menor o igual que tres, podemos suponer que la solución particular buscada será de la forma[1]

$$x_p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

Si así fuera, entonces

$$x_p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2,\ x_p''(t) = 2a_2 + 6a_3 t,\ x_p'''(t) = 6a_3,$$

de donde, sustituyendo en (1.1),

$$6a_3 - 3(2a_2 + 6a_3 t) + 4(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2) - 2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = -2t^3 \iff$$

$$(6a_3 - 6a_2 + 4a_1 - 2a_0) + (-18a_3 + 8a_2 - 2a_1)t + (12a_3 - 2a_2)t^2 - 2a_3 t^3 = -2t^3 \iff$$

$$\left.\begin{array}{r} 6a_3 - 6a_2 + 4a_1 - 2a_0 = 0 \\ -18a_3 + 8a_2 - 2a_1 = 0 \\ 12a_3 - 2a_2 = 0 \\ -2a_3 = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_3 = 1,\ a_2 = 6,\ a_1 = 15,\ a_0 = 15.$$

Por tanto, una solución particular de (1.1) es

$$x_p(t) = 15 + 15 + 6t^2 + t^3,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

d) A partir de lo hecho en los apartados *b*) y *c*), tenemos que la solución general de (1.1) es

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \Longrightarrow x(t) = ae^t + be^t\cos(t) - ce^t\operatorname{sen}(t) + 15 + 15 + 6t^2 + t^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

[1]Como el sistema fundamental de soluciones de la homogénea no contiene funciones polinómicas, podemos suponer que la solución particular $x_p(t)$ será un polinomio del mismo grado que el término $b(t)$.