UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Doble Grado Ing. Civil–ADE

Matemática Aplicada

Convocatoria Extraordinaria

5 de julio de 2019

Apellidos, Nombre	DNI, TIE o Pasaporte

ACLARACIONES SOBRE EL EXAMEN

- La duración del examen es de **3 horas**.
- **Dos ejercicios no se desarrollarán en una misma cara de una hoja de examen.**

1. Sea $W = L\{(1,3,2),(2,1,1),(3,-1,0)\}$.

   a) (2) Halla una base de W.

   b) (2) Considerando el producto escalar usual, halla una base de $W^{\perp}$.

   c) (3) Halla unas ecuaciones cartesianas de W y de $W^{\perp}$.

   d) (3) Sean los vectores $v = (1,1,1)$ y $u = \left(-\frac{1}{35}, -\frac{3}{35}, \frac{1}{7}\right)$. ¿Es u la mejor aproximación por mínimos cuadrados de v en $W^{\perp}$? Justifica la respuesta.

2. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$A = M(f, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

   a) (2) Halla $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ y $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   b) (3) Halla bases del núcleo y de la imagen de f.

   c) (3) Halla dos vectores $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ tales que $L\{f(v_2), f(v_3)\} = \mathrm{Im}(f)$. Halla $f(v_2)$ y $f(v_3)$.

   d) (2) Sea v_1 un vector de una base de $\mathrm{N}(f)$ y sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Halla $M(f, B, B)$.

3. Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio afín euclídeo tridimensional usual, con el sistema de referencia $R = \{O; B\}$, donde $O = (0,0,0)$ y $B = \{e_1, e_2, e_2\}$, con $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$.

   a) (2) Sea $\mathcal{R}' = \{O'; B'\}$, donde $O' = (1,-1,1)$ y $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, con $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2$ y $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Prueba que $\mathcal{R}'$ es un sistema de referencia del espacio considerado.

   b) (1.5) ¿Cuáles son las coordenadas respecto del sistema $\mathcal{R}'$ del punto cuyas coordenadas respecto del sistema $\mathcal{R}$ son $(1,0,1)$?

   c) (1.5) ¿Cuáles son las coordenadas respecto del sistema $\mathcal{R}$ del punto cuyas coordenadas respecto del sistema $\mathcal{R}'$ son $(1,0,1)$?

   d) (2.5) Halla las ecuaciones del cambio del sistema de referencia $\mathcal{R}'$ al sistema $\mathcal{R}$.

   e) (2.5) Halla las ecuaciones del cambio del sistema de referencia $\mathcal{R}$ al sistema $\mathcal{R}'$.

4. En el sistema de referencia usual $\mathcal{R}$ del plano afín $\mathbb{R}^2$, considera la cónica dada por

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0.$$

   a) (5) Encuentra su ecuación reducida, indicando, de forma detallada, los cambios de sistema de referencia necesarios para llegar a ella. ¿Qué tipo de cónica es?

   b) (2) ¿Cuáles son sus elementos notables en el sistema de referencia final?

   c) (3) Determina sus elementos notables en el sistema de referencia inicial.

5. Considera la ecuación diferencial de primer orden

$$x' + \frac{1}{t}x = tx^2, \quad \forall t > 0. \tag{1}$$

   a) (2) Comprueba que el cambio de variable $x = \frac{1}{u}$ transforma la ecuación (1) en la ecuación lineal

$$u' - \frac{1}{t}u = -t, \quad \forall t > 0. \tag{2}$$

   b) (4) Resuelve (2), indicando explícitamente el dominio de cada solución.

   c) (2) A partir del apartado anterior, resuelve (1), indicando explícitamente el dominio de cada solución.

   d) (2) Halla la solución de (1) que satisface la condición inicial $x(1) = 1$, indicando su dominio de manera explícita.

6. Considera la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$x'' - 3x' + 2x = 4t - e^t. \tag{3}$$

   a) (3) Resuelve la ecuación homogénea asociada a (3), indicando explícitamente el dominio de cada solución.

   b) (2) Halla una solución particular de (3) del tipo $x_p(t) = a + bt + cte^t$, indicando explícitamente su dominio.

   c) (2) Halla la solución general de (3), indicando explícitamente el dominio de cada solución.

   d) (3) Halla la solución de (3) que satisface las condiciones iniciales

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0,$$

   indicando su dominio de manera explícita.

(1) $W = \mathcal{L}\{(1,3,2),(2,1,1),(3,-1,0)\}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -10 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\{(1,3,2),(2,1,1)\}$ es una base de W.

b) $(x,y,z) \in W^{\perp} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x,y,z)\cdot(1,3,2)=0 \\ (x,y,z)\cdot(2,1,1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x+3y+2z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r} x+3y+2z=0 \\ -5y-3z=0 \end{array}\right\}$ $z=-5 \Rightarrow y=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$

$\{(1,3,-5)\}$ es una base de $W^{\perp}$.

c) Por lo hecho en b), unas cartesianas de $W^{\perp}$ son

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{array}\right\}.$$

Como $\{(1,3,-5)\}$ es una base de $W^{\perp}$, entonces

$$(x,y,z) \in W = (W^{\perp})^{\perp} \Leftrightarrow (x,y,z)\cdot(1,3,-5)=0.$$

Así, una cartesiana de W es

$$x+3y-5z=0.$$

d) $\{(1,3,2),\ (2,1,1)\}$ base de W
$\{(1,3,-5)\}$ base de $W^\perp$

$$(1,1,1) = \alpha(1,3,2) + \beta(2,1,1) + \gamma(1,3,-5)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 1 \\ 3\alpha + \beta + 3\gamma &= 1 \\ 2\alpha + \beta - 5\gamma &= 1 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -7 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 7 & -1/5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/35 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8/35 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/35 \end{array}\right) \Rightarrow (1,1,1) = \frac{8}{35}(1,3,2) + \frac{14}{35}(2,1,+1) - \frac{1}{35}(1,3,-5)$$

$$\Rightarrow (1,1,1) = \underset{\underset{W}{\cap}}{\left(\frac{36}{35}, \frac{38}{35}, \frac{30}{35}\right)} + \underset{\underset{W^\perp}{\cap}}{\left(\frac{-1}{35}, \frac{-3}{35}, \frac{5}{35}\right)}$$

Por tanto, u <u>sí</u> es la mejor aproximación por mínimos cuadrados de v en $W^\perp$.

También se puede justificar la respuesta comprobando que $v-u = \left(\frac{36}{35}, \frac{38}{35}, \frac{30}{35}\right) \in W$. En efecto:

$$\left(\frac{36}{35}, \frac{38}{35}, \frac{30}{35}\right) = \alpha(1,3,2) + \beta(2,1,1) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 36/35 \\ 3\alpha + \beta &= 38/35 \\ 2\alpha + \beta &= 30/35 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \alpha &= 8/35 \\ \beta &= 14/35 \end{aligned}\right\} \text{ OK}$$

(2)

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A = M(f, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a)

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & -3/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & -3/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Claramente $(2,1,1)$ y $(-3/2, -1/2, -3/2)$ son linealmente independientes, por lo que

- $\{(2,1,1), (-3/2, -1/2, -3/2)\}$ es una base de $Im(f)$
- $\{(1,1,1)\}$ es una base de $N(f)$.

c)

$$\left.\begin{array}{l} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow L\left\{ f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Im(f)$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) $\{v_1 = (1,1,1)\}$ es una base de $N(f) \Rightarrow$

$$B = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,1,1), (1,0,0), (0,1,0)\}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_B = f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}_B$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_B = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=2\\ \alpha+\gamma=1\\ \alpha=1\end{array}\right\} \quad \alpha=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\gamma=0\\ \beta=1\end{array}\right. \Rightarrow f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_B$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_B = f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\\-3/2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=-3/2\\ \alpha+\gamma=-1/2\\ \alpha=-3/2\end{array}\right\} \quad \alpha=-3/2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\beta=0\\ \gamma=1\end{array}\right. \Rightarrow f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}-3/2\\0\\1\end{pmatrix}_B$$

Por tanto, $M(f,B,B) = \begin{pmatrix}0 & 1 & -3/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

e) $B' = \{\underbrace{(2,1,1), (-3/2,-1/2,-3/2)}_{Im(f)}, \underbrace{(x,y,z)}_{(Im(f))^\perp}\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2x+y+z=0\\ -\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z=0\end{array}\right\}$

$$\Rightarrow B' = \{\underset{w_1}{(2,1,1)}, \underset{w_2}{(-3/2,-1/2,-3/2)}, \underset{w_3}{(2,-3,-1)}\}$$

Simetría: $g(w_1)=w_1$, $g(w_2)=w_2$, $g(w_3)=-w_3$

$$M(g,B',B') = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$M(g,B_c,B_c) = M(B',B_c)\,M(g,B',B')\,M(B_c,B') = \begin{pmatrix}2 & -3/2 & 2\\ 1 & -1/2 & -3\\ 1 & -3/2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3/2 & 2\\ 1 & -1/2 & -3\\ 1 & -3/2 & -1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}2 & -3/2 & 2\\ 1 & -1/2 & -3\\ 1 & -3/2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{14}\begin{pmatrix}8 & 9 & -11\\ 4 & 8 & -16\\ 2 & -3 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & 6 & 2\\ 6 & -2 & -3\\ 2 & -3 & 6\end{pmatrix}$$

3

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow B'$ es una base de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow R'$ es un sistema de referencia

b) $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_R \Rightarrow \overrightarrow{O'P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \gamma = 0 \\ \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{R'}$$

c) $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{R'}$, $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R$

$$\overrightarrow{O'Q} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_R$$

d) $S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{R'} \Rightarrow \overrightarrow{O'S} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4 $\quad x^2-2xy+y^2+4x-6y+1=0$

a) $$(x \ y)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(4 \ -6)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+1=0$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=1-2\lambda+\lambda^2-1=\lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=2 \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\\ \lambda=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underbrace{(x \ y)\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}}_{(x_1 \ y_1)}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}}+(4 \ -6)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+1=0$$

$$(x_1 \ y_1)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}+(4 \ -6)\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}+1=0 \Rightarrow$$

$$2x_1^2+\frac{10}{\sqrt{2}}x_1-\frac{2}{\sqrt{2}}y_1+1=0 \Rightarrow 2\left(x_1^2+\frac{5}{\sqrt{2}}x_1\right)-\sqrt{2}y_1+1=0$$

$$\Rightarrow 2\left(x_1+\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2-2\frac{25}{8}+1-\sqrt{2}y_1=0 \Rightarrow$$

$$2\left(x_1+\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2-\sqrt{2}y_1-\frac{21}{4}=0 \Rightarrow 2\big(\underbrace{x_1+\frac{5}{2\sqrt{2}}}_{x_2}\big)^2-\sqrt{2}\big(\underbrace{y_1+\frac{21}{4\sqrt{2}}}_{y_2}\big)=0$$

$$\Rightarrow 2x_2^2 - \sqrt{2}\, y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 2\frac{1}{\sqrt{2}} x_2^2$$

Parábola con parámetro $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Vértice: $(0,0)$ | Directriz: $y_2 = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$

Foco: $\left(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ | Eje de simetría: $x_2 = 0$

c) $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - \frac{5}{2\sqrt{2}} \\ y_2 - \frac{21}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{31}{8} \\ y = \frac{-1}{\sqrt{2}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{11}{8} \end{array}\right\}$$

Vértice: $(-31/8, -11/8)$ // Foco: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + \left(-31/8, \frac{-11}{8}\right) = \left(\frac{-29}{8}, \frac{-9}{8}\right)$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/2\sqrt{2} \\ 21/4\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y + \frac{5}{2\sqrt{2}} \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y + \frac{21}{4\sqrt{2}} \end{array}\right\}$$

Directriz: $\frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y + \frac{21}{4\sqrt{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x + y = \frac{-1}{2} - \frac{21}{4}$

$$\Rightarrow x + y = \frac{-23}{4}$$

Eje de simetría: $\frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y + \frac{5}{2\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow x - y = \frac{-5}{2}$

5

$$x' + \frac{1}{t}x = tx^2, \quad t>0$$

a) $x = \frac{1}{u} = u^{-1} \Rightarrow x' = -u^{-2}u' \Rightarrow$

$$-u^{-2}u' + \frac{1}{t}u^{-1} = tu^{-2} \Rightarrow -u' + \frac{1}{t}u = t$$

$$\Rightarrow u' - \frac{1}{t}u = -t, \quad t>0$$

b) $u' - \frac{1}{t}u = 0 \Rightarrow u' = \frac{1}{t}u \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{dt}{t} \overset{t>0}{\Longrightarrow}$

$\ln|u| = \ln t + C \Rightarrow |u| = e^C \cdot t = kt, \; k>0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} u = kt, \; k \neq 0 \\ k=0 \Rightarrow u=0 \Rightarrow u'=0 \Rightarrow 0 - \frac{1}{t}\cdot 0 = 0 \; \underline{\underline{OK}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$u_h(t) = kt, \; \forall t>0, \; k \in \mathbb{R}$ (*1)

$u_p(t) = h(t)\cdot t \Rightarrow u_p' = h'\cdot t + h \Rightarrow$

$$h'\cdot t + h - \frac{1}{t}\cdot h\cdot t = -t \Rightarrow h' = -1 \Rightarrow h(t) = -t$$

$\Rightarrow u_p(t) = -t^2, \forall t>0$ (*2)

(*1), (*2) $\Rightarrow u(t) = kt - t^2, \forall t>0, \; k \in \mathbb{R}$.

c) $x(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{kt - t^2}, \quad k \in \mathbb{R}$

$$kt - t^2 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=0 \\ t=k \end{array}\right.$$

$$k<0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{kt-t^2}, \quad \forall t>0$$

$$k=0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{-t^2}, \quad \forall t>0$$

$$k>0 \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{k\cancel{t}t-t^2}, & \forall t \in \,]0,k[\\ \text{o} & \\ x(t) = \dfrac{1}{kt-t^2}, & \forall t \in \,]k,+\infty[\end{cases}$$

d) $x(1) = \frac{1}{k-1} = 1 \Leftrightarrow k-1 = 1 \Leftrightarrow k = 2 \Rightarrow$

$$x(t) = \frac{1}{2t-t^2}, \quad \forall t \in \,]0,2[.$$

⑥ $$x'' - 3x' + 2x = 4t - e^t$$

a) $x'' - 3x' + 2x = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \iff \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

$$x_h(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^t, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) $$\left.\begin{aligned} x_p(t) &= a + bt + cte^t \\ x_p'(t) &= b + c(1+t)e^t \\ x_p''(t) &= c(2+t)e^t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$c(2+t)e^t - 3b - 3c(1+t)e^t + 2a + 2bt + 2cte^t = 4t - e^t$$

$$\Rightarrow (-3b + 2a) + 2bt + e^t\{2c - 3c + (c - 3c + 2c)t\} = 4t - e^t$$

$$\Rightarrow (-3b + 2a) + 2bt - ce^t = 4t - e^t \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -3b + 2a &= 0 \\ 2b &= 4 \\ c &= 1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} c &= 1 \\ b &= 2 \\ 2a &= 3b = 6 \Rightarrow a = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$x_p(t) = 3 + 2t + te^t, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

c) $x(t) = x_h(t) + x_p(t) \Rightarrow$

$$x(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^t + 3 + 2t + te^t, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

d) $x(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{t} + 3 + 2t + te^{t}$

$x'(t) = 2\alpha e^{2t} + \beta e^{t} + 2 + (1+t)e^{t}$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = \alpha + \beta + 3 = 1 \\ x'(0) = 2\alpha + \beta + 2 + 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = -2 \\ 2\alpha + \beta = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \end{array}$$

$\Rightarrow x(t) = -e^{2t} - e^{t} + 3 + 2t + te^{t}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$