UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Doble Grado Ing. Civil–ADE

Matemática Aplicada

Convocatoria Ordinaria

Primer Parcial

11 de junio de 2019

Apellidos, Nombre

DNI, TIE o Pasaporte

ACLARACIONES SOBRE EL EXAMEN

- La duración del examen es de **3 horas** para quienes se examinen de toda la asignatura, **2:30 horas** para quienes se examinen de dos parciales y **2 horas** para quienes se examinen de un único parcial.
- Los alumnos que se examinen de **un único parcial deben hacer las tres preguntas** de dicho parcial.
- Los alumnos que se examinen de **más de un parcial deben hacer las dos primeras preguntas** de cada uno de dichos parciales.
- **Dos ejercicios no se desarrollarán en una misma cara de una hoja de examen.**

1. Considera la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ -3x-y-z \\ -x+y+z \end{pmatrix}.$$

   a) (3) Halla bases de $\mathrm{Im}(T)$ y $\mathrm{N}(T)$.

   b) (3) Para $U = L\{(1,0,2),(0,1,2)\}$, halla las ecuaciones cartesianas de $T(U)$.

   c) (4) Para la base $B = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$, halla la matriz de T asociada a B.

2. Considera el subespacio vectorial $U \subseteq \mathbb{R}^5$ definido por las ecuaciones cartesianas

$$\left.\begin{array}{r} -x_1+x_2-x_4-2x_5=0 \\ x_2-x_3+x_4-x_5=0 \end{array}\right\}.$$

   a) (3) Halla las ecuaciones paramétricas de U.

   b) (5) Con el producto escalar usual, halla las ecuaciones cartesianas y paramétricas de $U^\perp$.

   c) (2) Halla una base de $\mathbb{R}^5$ formada por vectores de U y $U^\perp$.

3. Considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$A = M(f, B_c, B_c) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Justifica las respuestas a los siguientes apartados.

   a) (1.5) Comprueba si el vector $v_1 = (1,0,1)$ es un vector propio de la matriz A.

   b) (2.5) Halla los valores propios de la matriz A.

   c) (2.5) Halla los vectores propios de la matriz A.

   d) (1.5) Determina si la matriz de la aplicación f es diagonalizable.

   e) (2) Sabiendo que la aplicación f es una simetría respecto de un plano, halla el plano que determina a dicha simetría.

P1

①
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ -3x-y-z \\ -x+y+z \end{pmatrix}, \quad T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

a) $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$.

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $N(T)$.

b) $U = L\{(1,0,2),(0,1,2)\}$

$T(U) = L\{T(1,0,2),\, T(0,1,2)\} = L\{(4,-5,1),(3,-3,3)\}$

$$\left.\begin{array}{l} x = 4\lambda + \cancel{3\mu} \\ y = -5\lambda - \cancel{3\mu} \\ z = \lambda + \cancel{3\mu} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y = -\lambda \\ y+z = -4\lambda \end{array}\right\} \quad 4x+4y-y-z=0$$

$$\Downarrow$$

$$4x+3y-z=0$$

e)

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\beta_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}=\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\beta_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}=\alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\beta_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_3\\\beta_3\\\gamma_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_3\\\beta_3\\\gamma_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&-1&1&0&1&-1\\0&1&1&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&-1&1&0&1&-1\\0&0&2&1&1&-1\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&-1&0&-1&1\\0&0&1&1/2&1/2&-1/2\end{array}\right)\rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/2&1/2&1/2\\0&1&0&1/2&-1/2&1/2\\0&0&1&1/2&1/2&-1/2\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&1/2\\1/2&1/2&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_3\\\beta_3\\\gamma_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&1/2\\1/2&1/2&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/2\\7/2\\-1/2\end{pmatrix}$$

$$M(T,B)=\begin{pmatrix}-1&-7/2&-7/2\\3&7/2&7/2\\-1&-1/2&-1/2\end{pmatrix}$$

②
$$\left.\begin{array}{r} -x_1 + x_2 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{array}\right\} \equiv U$$

a)
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = x_3 - 2x_4 - x_5 \\ x_2 = x_3 - x_4 + x_5 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha - 2\beta - \gamma \\ x_2 = \alpha - \beta + \gamma \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{array}\right\} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

b)
$$U \equiv L\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle/\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = -2x_3 - x_4 \\ x_5 = 3x_3 + 2x_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = -2\alpha - \beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = 3\alpha + 2\beta \end{array}\right\}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

c)

$$\left.\begin{array}{l} U \equiv L\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\[2ex] U^{\perp} \equiv L\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } \mathbb{R}^5$$

③ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$A = M(f, B_c) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$Av_1 = v_1 = 1 \cdot v_1 \Rightarrow v_1$ es vector propio con valor propio asociado $\lambda = 1$.

b) $$\begin{vmatrix} 1/3-\lambda & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3-\lambda & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3}-\lambda\right)^3 - \frac{8}{27} - \frac{8}{27} - 3\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)$$

$$= \frac{1}{27} - 3\frac{1}{9}\lambda + 3\frac{1}{3}\lambda^2 - \lambda^3 - \frac{16}{27} - \frac{4}{9} + \frac{4}{3}\lambda$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1) & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ o $\lambda = -1$

Valores propios de A: $\begin{cases} \lambda = 1 \text{ doble} \\ \lambda = -1 \text{ simple} \end{cases}$

c) $\underline{\lambda = 1}$ $$\left(\begin{array}{ccc|c} -2/3 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & -2/3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda=-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4/3 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & 4/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 4/3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d) b), c) $\Rightarrow$ A es diagonalizable

A simétrica $\Rightarrow$ A es diagonalizable por semejanza ortogonal

e) El plano de la simetría corresponde al espacio invariante por f. En este caso, el espacio invariante es justo el asociado al valor propio $\lambda=1$. Por tanto, el plano que determina a la simetría es el generado por los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Así,

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda + \mu \\ y = -\mu \\ z = \lambda \end{array}\right\} \quad x = z - y \Rightarrow x + y - z = 0$$