UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Doble Grado Ing. Civil–ADE

Matemática Aplicada

Convocatoria Ordinaria

Tercer Parcial

11 de junio de 2019

Apellidos, Nombre

DNI, TIE o Pasaporte

ACLARACIONES SOBRE EL EXAMEN

- La duración del examen es de **3 horas** para quienes se examinen de toda la asignatura, **2:30 horas** para quienes se examinen de dos parciales y **2 horas** para quienes se examinen de un único parcial.
- Los alumnos que se examinen de **un único parcial deben hacer las tres preguntas** de dicho parcial.
- Los alumnos que se examinen de **más de un parcial deben hacer las dos primeras preguntas** de cada uno de dichos parciales.
- **Dos ejercicios no se desarrollarán en una misma cara de una hoja de examen.**

1. Considera la ecuación diferencial

$$(x^2 - 2xt + t^2)\,dx + (t^2 - 2tx + x^2)\,dt = 0.$$

   a) (2) Comprueba que no es exacta.

   b) (3) Halla un factor integrante del tipo $\mu = \mu(t - x)$.

   c) (3) Resuelve la ecuación dada, indicando el dominio de las soluciones obtenidas de manera explícita.

   d) (2) Halla la solución que satisface la condición inicial $x(3) = 5$, indicando su dominio de manera explícita.

2. Considera la ecuación diferencial lineal de tercer orden

$$x''' + 3x'' - 4x' - 12x = t - 1.$$

   a) (3) Resuelve la ecuación homogénea asociada, indicando explícitamente su dominio.

   b) (3) Halla la solución particular de la completa, indicando explícitamente su dominio.

   c) (1) Halla la solución general de la completa, indicando explícitamente su dominio.

   d) (3) Determina la solución que verifica las condiciones iniciales

$$x(0) = 0, \;\; x'(0) = 0, \;\; x''(0) = 1,$$

   indicando explícitamente su dominio.

3. Considera la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$tx' - x = t^3.$$

   a) (3) Resuelve la ecuación homogénea asociada, indicando explícitamente su dominio.

   b) (3) Halla una solución particular de la completa, indicando explícitamente su dominio.

   c) (1) Halla la solución general de la completa, indicando explícitamente su dominio.

   d) (3) Determina la solución que verifica la condición inicial $x(1) = 1$, indicando explícitamente su dominio.

P3

① $(x^2-2xt+t^2)\,d\cancel{x} + (t^2-2tx+x^2)\,d\cancel{t}=0$

a) $\underbrace{(x^2-2xt+t^2)}_{P}dx + \underbrace{(t^2-2tx+x^2)}_{Q}dt=0$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial t}=-2x+2t\\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2t+2x\end{array}\right\}\quad \frac{\partial P}{\partial t}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow \text{No es exacta}$$

b) $\mu=\mu(t-x)$

$$\underbrace{\mu(t-x)\cdot(x^2-2xt+t^2)}_{P}dx+\underbrace{\mu(t-x)\cdot(t^2-2tx+x^2)}_{Q}dt=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial t}=\mu'\cdot(x^2-2xt+t^2)+\mu\cdot(-2x+2t)\\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\mu'\cdot(t^2-2tx+x^2)+\mu\cdot(-2t+2x)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Leftrightarrow 2(t^2-2tx+x^2)\mu'=2\mu\cdot(-2t+2x)$$

$$\Leftrightarrow 2(t-x)^2\mu'=-4(t-x)\mu \overset{\xi=t-x}{\Longrightarrow} 2\xi^2\mu'(\xi)=-4\xi\mu(\xi)$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{\mu}\,d\mu=-2\int\frac{1}{\xi}\,d\xi\Rightarrow \ln\mu=-2\ln\xi\Rightarrow$$

$$\mu=\xi^{-2}=(t-x)^{-2}\Rightarrow dx+dt=0$$

Ecuación exacta

c) $F(t,x)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial t} = 1$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 1 \Rightarrow F(t,x) = t + H(x) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = H'(x) = 1$$

$$\Rightarrow H(x) = x \Rightarrow F(t,x) = t + x$$

Solución: $F(t,x) = C \Leftrightarrow t + x = C \Rightarrow$

$$x(t) = C - t, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ C \in \mathbb{R}$$

d) $x(3) = C - 3 = 5 \Rightarrow C = 8 \Rightarrow$

$$x(t) = 8 - t, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

2

$$x''' + 3x'' - 4x' - 12x = t - 1$$

a) $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 2) & & 2 & 10 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \underline{0} \end{array}$$

$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow$

$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5\pm 1}{2} \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$$

$$x_h(t) = ae^{2t} + be^{-2t} + ce^{-3t}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ a,b,c \in \mathbb{R}.$$

b) Pruebo con $x_p(t) = a + bt$

$$\left.\begin{array}{l} x_p' = b \\ x_p'' = x_p''' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + 3\cdot 0 - 4\cdot b - 12(a+bt) = t - 1$$

$$\Rightarrow -4b - 12a - 12bt = t - 1 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -12b = 1 \\ -4b - 12a = -1 \end{array}\right\} \quad b = \frac{-1}{12} \Rightarrow \frac{1}{3} - 12a = -1 \Rightarrow$$

$$12a = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{12}t, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

c) $x(t) = ae^{2t} + be^{-2t} + ce^{-3t} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12}t, \ \forall t \in \mathbb{R}, a,b,c \in \mathbb{R}$

d) $x(t) = ae^{2t} + be^{-2t} + ce^{-3t} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12}t \Rightarrow x(0) = a + b + c + \frac{1}{9} = 0$

$x'(t) = 2ae^{2t} - 2be^{-2t} - 3ce^{-3t} - \frac{1}{12} \Rightarrow x'(0) = 2a - 2b - 3c - \frac{1}{12} = 0$

$x''(t) = 4ae^{2t} + 4be^{-2t} + 9ce^{-3t} \Rightarrow x''(0) = 4a + 4b + 9c = 1$

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=\frac{-1}{9} \\ 2a-2b-3c=\frac{1}{12} \\ 4a+4b+9c=1 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1/9 \\ 2 & -2 & -3 & 1/12 \\ 4 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1/9 \\ 0 & -4 & -5 & 11/36 \\ 0 & 0 & 5 & 13/9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1/9 \\ 0 & -4 & 0 & 63/36 \\ 0 & 0 & 1 & 13/45 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -18/45 \\ 0 & 1 & 0 & -63/144 \\ 0 & 0 & 1 & 13/45 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/80 \\ 0 & 1 & 0 & -7/16 \\ 0 & 0 & 1 & 13/45 \end{pmatrix}$$

$$x(t)=\frac{3}{80}e^{2t}-\frac{7}{16}e^{-2t}+\frac{13}{45}e^{-3t}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}t,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

③ $$tx' - x = t^3 \Rightarrow x' - \frac{1}{t}x = t^2$$

a) $tx' - x = 0 \Rightarrow x' = \frac{x}{t} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt$

$\Rightarrow \ln|x| = \ln|t| + C \Rightarrow |x| = K|t|,\ K > 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x = Kt,\ K \in \mathbb{R} - \{0\} \\ K = 0 \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow x' = 0 \Rightarrow 0 \cdot t - 0 = 0 \ \underline{\text{ok}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = Kt,\ t \in]-\infty, 0[,\ K \in \mathbb{R} \\ \text{o} \\ x(t) = Kt,\ t \in]0, +\infty[,\ K \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

b) $x_p(t) = H(t) \cdot t \Rightarrow x_p'(t) = H'(t) \cdot t + H(t) \Rightarrow$

$t^2 H' + tH - tH = t^3 \Rightarrow H' = t \Rightarrow H = \frac{t^2}{2} \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} x_p(t) = \frac{t^3}{2},\ \forall t \in]-\infty, 0[\\ \text{o} \\ x_p(t) = \frac{t^3}{2},\ \forall t \in]0, +\infty[\end{array}\right.$$

c) $x(t) = Kt + \frac{t^3}{2},\ \forall t \in]-\infty, 0[,\ K \in \mathbb{R}$

o $x(t) = Kt + \frac{t^3}{2},\ \forall t \in]0, +\infty[,\ K \in \mathbb{R}$

d) $x(1) = K + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\underline{x(t) = \frac{t}{2} + \frac{t^3}{2},\ \forall t \in]0, +\infty[.}$$