UNIVERSIDAD
DE GRANADA

**Departamento de
Matemática Aplicada**

Doble Grado CIVIL–ADE
Primera prueba
3 de abril de 2019

1. Considera la base $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

   a) Halla todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que $B_2 = \{u_1 + \alpha u_2, u_1 + \alpha u_3, u_2 + \alpha u_3\}$ es otra base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Para $\alpha = 1$, halla la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

   c) Para $\alpha = 1$, halla las coordenadas de $(1, 1, 1)_{B_1}$ en la base B_2.

   d) Para $\alpha = 1$, halla las coordenadas de $(1, 1, 1)_{B_2}$ en la base B_1.

Resolución

a) A partir del enunciado, los vectores de B_2, expresados en la base B_1, son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Para que $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ sea efectivamente una base necesitamos que los tres vectores sean linealmente independientes, lo cual equivale a que la matriz M formada por ellos (por columnas) tenga rango igual a 3.
Procediendo mediante eliminación gaussiana (también podemos razonar con determinantes),

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

- si $\alpha = 0$ o $\alpha = -1$ entonces $\mathrm{rg}(M) = 2$, por lo que B_2 no es una base de $\mathbb{R}^3$;
- si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$ entonces $\mathrm{rg}(M) = 3$, por lo que B_2 sí es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) A partir de lo hecho en el apartado anterior, si $\alpha = 1$ entonces B_2 es una base de $\mathbb{R}^3$. Además, los vectores de B_2 vienen expresados en función de la base B_1 por

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz $M_{B_2B_1}$ formada por estos vectores (por columnas) es la matriz de cambio de base de B_2 a B_1.

$$M_{B_2B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como nos piden la matriz de cambio de B_1 a B_2, vamos a calcular la inversa de $M_{B_2B_1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Por tanto, la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 es

$$M_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Por lo hecho en el apartado *b*),

$$M_{B_1B_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{B_2}.$$

Así, las coordenadas de $(1,1,1)_{B_1}$ en la base B_2 son $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{B_2}$.

d) Por lo visto en el apartado *b*),

$$M_{B_2B_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1}.$$

Así, las coordenadas de $(1,1,1)_{B_2}$ en la base B_1 son $(2,2,2)_{B_1}$.

2. Considera la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & \alpha \\ 1 & -1 & \beta \end{pmatrix}.$$

a) Determina $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que $\{(1,-1,1)\}$ sea una base de $\mathrm{N}(T)$.

b) Para $\alpha = -1$ y $\beta = 1$, halla bases de $\mathrm{Im}(T)$ y $\mathrm{N}(T)$.

c) Para $\alpha = \beta = 0$ y $U = L\{(1,2,0),(0,2,1)\}$, halla las ecuaciones cartesianas de $T(U)$.

d) Para $\alpha = \beta = 1$ y $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$, halla la matriz de T asociada a la base B.

Resolución

a) Como queremos que $\{(1,-1,1)\}$ sea una base de $\mathrm{N}(T)$, comprobamos cuándo se verifica que $T(1,-1,1) = (0,0,0)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & \alpha \\ 1 & -1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2+\alpha \\ 2+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = -2.$$

Para comprobar que efectivamente $\dim \mathrm{N}(T) = 1$, hallamos bases de $\mathrm{Im}(T)$ y $\mathrm{N}(T)$ aplicando eliminación gaussiana a la matriz resultante de tomar por filas las imágenes de los vectores de la base canónica junto a cada uno de estos vectores.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{array}\right).$$

De esta forma, obtenemos que $\{(1,-1,1),(0,-1,-3)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$ (los dos vectores en azul) y que $\{(1,-1,1)\}$ es una base de $\mathrm{N}(T)$ (el vector en rojo).

b) Repetimos el proceso de eliminación gaussiana del apartado anterior pero para los valores $\alpha = -1$ y $\beta = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right).$$

Por tanto, $\{(1,-1,1),(0,-1,-3)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$ (los dos vectores en azul) y que $\{(-1,0,1)\}$ es una base de $\mathrm{N}(T)$ (el vector en rojo).

c) Como T es una aplicación lineal y $B_U = \{(1,2,0),(0,2,1)\}$ es una base de U, calculando la imagen de los vectores de B_U tendremos un sistema de generadores de $T(U)$. Como en este apartado $\alpha = \beta = 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $(5,-7,-1)$ y $(5,-6,-2)$ son vectores linealmente independientes, entonces $\{(5,-7,-1),(5,-6,-2)\}$ es una base de $T(U)$. Así, si (x,y,z) es un vector perteneciente a $T(U)$, se verifica que existen valores $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \left.\begin{array}{r} x = 5a + 5b \\ y = -7a - 6b \\ z = -a - 2b \end{array}\right\}.$$

Considerando en el sistema obtenido que a, b son las incógnitas y que x, y, z son los parámetros, estudiamos cuándo dicho sistema es compatible.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & x \\ -7 & -6 & y \\ -1 & -2 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{x}{5} \\ -7 & -6 & y \\ -1 & -2 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{x}{5} \\ 0 & 1 & y+\frac{7x}{5} \\ 0 & -1 & z+\frac{x}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{x}{5} \\ 0 & 1 & y+\frac{7x}{5} \\ 0 & 0 & z+y+\frac{8x}{5} \end{array}\right).$$

Por tanto, como ecuación cartesiana de $T(U)$ podemos tomar

$$8x + 5y + 5z = 0.$$

d) A partir del enunciado, la matriz de la aplicación lineal T en la base canónica B_C es

$$M(T, B_C, B_C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, para la base $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$, la matriz de cambio de B a la base canónica es

$$M_{BB_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

¡OJO! Para formar M_{BB_C} se han tomado los vectores de B por columnas. Como la matriz resultante es simétrica, podría pensarse, equivocadamente, que se han tomado por filas.

Para calcular $M(T, B, B)$ necesitamos la matriz $M_{B_CB} = (M_{BC})^{-1}$. Por la expresión que tiene M_{BB_C}, el cálculo necesario coincide con el realizado en el apartado *b*) del ejercicio 1, por lo que no lo vamos a repetir. Finalmente, la matriz pedida vendrá dada por

$$M(T,B,B) = M_{B_CB} \cdot M(T, B_C, B_C) \cdot M_{BB_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M(T,B,B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Considera el subespacio vectorial $U \subseteq \mathbb{R}^5$ definido por las ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha + 2\beta \\ x_2 &= \alpha - \gamma \\ x_3 &= \beta \\ x_4 &= \alpha + \beta + \gamma \\ x_5 &= \gamma \end{aligned}\right\}.$$

a) Halla las ecuaciones cartesianas de U.

b) Con el producto escalar usual, halla las ecuaciones cartesianas y paramétricas de $U^{\perp}$.

c) Halla una base de $\mathbb{R}^5$ formada por vectores de U y $U^{\perp}$.

Resolución

a) Para resolver este apartado consideramos que, en el sistema de ecuaciones dado por el enunciado, las incógnitas son α, β, γ mientras que x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 son parámetros y estudiamos cuándo el sistema así visto es compatible.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & -2 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & -1 & 1 & x_4 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 \\ 0 & -2 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_4 - x_1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 - x_1 + 2x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 - x_1 + x_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 - x_1 + 2x_3 + x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 + x_3 - x_5 \end{array}\right).$$

Por tanto, las ecuaciones cartesianas de U son

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{array}\right\}.$$

b) A partir de las ecuaciones parámetricas de U, dadas por el enunciado, tenemos que una base de U es

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por cierto, podemos asegurar que estos tres vectores son linealmente independientes por los cálculos realizados para obtener las ecuaciones cartesianas de U (ya que la matriz formada por ellos tiene rango 3).

Como consideramos el producto escalar usual en $\mathbb{R}^5$, cualquier vector $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de $U^{\perp}$ debe ser ortogonal a todos los elementos de B_U, es decir, el producto escalar debe ser nulo. Por tanto, las ecuaciones cartesianas de $U^{\perp}$ serán

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_4 + x_5 = 0 \end{array}\right\}.$$

Aprovechando que conocemos las ecuaciones cartesianas de U y que estamos usando el producto escalar usual en $\mathbb{R}^5$, tenemos que una base de $U^\perp$ es

$$B_{U^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

pues los dos vectores que aparecen son, claramente, linealmente independientes. A partir de aquí, se sigue que las ecuaciones paramétricas de $U^\perp$ son

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = -2\alpha - \beta \\ x_4 = -\beta \\ x_5 = -\alpha + \beta \end{array}\right\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Otro modo para determinar las ecuaciones paramétricas de $U^\perp$ es resolver el sistema homogéneo dado por sus ecuaciones cartesianas. En efecto,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Así obtenemos como ecuaciones cartesianas de $U^\perp$

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = -2\alpha - \beta \\ x_2 = \alpha + \beta \\ x_3 = 3\alpha + 2\beta \\ x_4 = \alpha \\ x_5 = \beta \end{array}\right\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

que no son las mismas de antes pero sí equivalentes.

c) Ya que $\dim(\mathbb{R}^5) = 5 = 3 + 2 = \dim(U) + \dim(U^\perp)$ y puesto que B_U y $B_{U^\perp}$ son bases de U y $U^\perp$, respectivamente, podemos considerar como base de $\mathbb{R}^5$ la unión de dichas bases. Concretamente,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ una matriz simétrica tal que

   - $\lambda_1 = 1$ es un valor propio de A con vector propio asociado $v_1 = (1, 1, 1)$;
   - $\lambda_2 = 2$ es un valor propio de A con vector propio asociado $v_2 = (1, -2, 1)$;
   - $\lambda_3 = 3$ es un valor propio de A.

   Bajo estos supuestos, responde a las siguientes cuestiones.

   a) Halla un vector propio v_3 de A asociado al valor propio λ_3.

   b) Expresa A como producto de matrices convenientes.

   c) Diagonaliza (por semejanza ortogonal) A.

Resolución

a) Como A es una matriz simétrica, entonces los vectores propios correspondientes a valores propios diferentes son ortogonales. Por tanto, si $v_3 = (x, y, z)$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda_3 = 3$, entonces v_3 debe ser ortogonal a v_1 y v_2. O sea, las componentes de v_3 han de ser solución del sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{array}\right\}.$$

Por ejemplo, podemos considerar $v_3 = (1, 0, -1)$.

b) Como conocemos tres valores propios (distintos) de $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y un vector propio para cada uno de ellos, tenemos que A se puede calcular mediante la expresión $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aquí P es la matriz de paso formada por vectores propios de A y D es la matriz diagonal formada por los valores propios de A (escritos tanto los vectores propios como los valores propios de forma ordenada).

Haciendo cuentas, podemos comprobar que

$$A = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{13}{6} \end{pmatrix}.$$

c) Para diagonalizar A por semejanza necesitamos que la matriz de paso Q sea ortogonal, es decir, que $Q \cdot Q^T = I_3$ (donde I_3 es la matriz identidad de orden 3). Para construir Q basta con normalizar los vectores propios considerados en la construcción de P. Así,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $A = Q \cdot D \cdot Q^T$, siendo Q matriz ortogonal (o sea, $Q^{-1} = Q^T$).