UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Doble Grado CIVIL–ADE

Segunda prueba

8 de mayo de 2019

Ejercicios obligatorios

1. En el plano afín $\mathbb{R}^2$ consideramos los sistemas de referencia

$$\mathcal{R}_1 = \{O_1 = (0,1); B_1 = \{(1,0),(2,1)\}\}, \quad \mathcal{R}_2 = \{O_2 = (1,1); B_2 = \{(0,1),(1,1)\}\}.$$

a) Halla las coordenadas de O_1 en $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$.

b) Halla las coordenadas de $O = (0,0)$ en $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$.

c) Determina el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$.

d) Determina la variedad afín formada por los puntos cuyas coordenadas en ambos sistemas de referencia son iguales (esto es, los puntos tales que $(x,y)_{\mathcal{R}_1} = (x,y)_{\mathcal{R}_2}$).

e) Expresa la variedad afín del apartado anterior en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^2$.

Resolución

Antes de empezar este ejercicio, señalar que consideraremos que las coordenadas de los puntos O, O_1 y O_2 están referidas al sistema de referencia usual $\mathcal{R}$ del plano afín $\mathbb{R}^2$. Así mismo, las coordenadas (dadas en el enunciado) de los vectores de las bases B_1 y B_2 están referidas a la base usual B_C del plano vectorial $\mathbb{R}^2$.

a) En primer lugar, como $\overrightarrow{O_1O_1} = (0,0)$, es claro que $O_1 = (0,0)_{\mathcal{R}_1}$.

Por otra parte, $\overrightarrow{O_2O_1} = (0,1) - (1,1) = (-1,0)$, por lo que las coordenadas de O_1 en $\mathcal{R}_2$ son las coordenadas del vector $(-1,0)$ en la base $B_2 = \{(0,1),(1,1)\}$. Por tanto,

$$(-1,0) = \alpha(0,1) + \beta(1,1) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \beta = -1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha = -\beta \\ \beta = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow O_1 = (1,-1)_{\mathcal{R}_2}.$$

b) Para calcular las coordenadas de $O = (0,0)$ en $\mathcal{R}_1$ basta con hallar las coordenadas del vector $\overrightarrow{O_1O} = (0,0) - (0,1) = (0,-1)$ en la base $B_1 = \{(1,0),(2,1)\}$. Esto es,

$$(0,-1) = \alpha(1,0) + \beta(2,1) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha = -2\beta \\ \beta = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow O = (2,-1)_{\mathcal{R}_1}.$$

Análogamente, para calcular las coordenadas de $O = (0,0)$ en $\mathcal{R}_2$, hallaremos las coordenadas $\overrightarrow{O_2O} = (0,0) - (1,1) = (-1,-1)$ en la base $B_2 = \{(0,1),(1,1)\}$. O sea,

$$(-1,-1) = \alpha(0,1) + \beta(1,1) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \beta = -1 \\ \alpha + \beta = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha = -1 - \beta \\ \beta = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow O = (0,-1)_{\mathcal{R}_2}.$$

c) Para determinar el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$, primero buscamos los cambios de $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}$ y de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}_2$.

- Sea $P = (x,y)$ un punto cualquiera del plano (expresado en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}$). Para hallar sus coordenadas en el sistema $\mathcal{R}_1$ tenemos que determinar las coordenadas del vector $\overrightarrow{O_1P} = (x,y) - (0,1) = (x, y-1)$ en la base $B_1 = \{(1,0),(2,1)\}$.

$$(x, y-1) = \alpha(1,0) + \beta(2,1) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha + 2\beta = x \\ \beta = y - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P = (x - 2y + 2, y - 1)_{\mathcal{R}_1}.$$

Por tanto, si $P=(x_1,y_1)_{\mathcal{R}_1}$, entonces

$$(x_1,y_1)_{\mathcal{R}_1}=(x-2y+2,y-1)_{\mathcal{R}_1}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},$$

que es el cambio de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}_1$. Como necesitamos el de $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}$,

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right]\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right]\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Como era de esperar, la matriz $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ es la de cambio de base de B_1 a B_C y $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ viene dado por las coordenadas de O_1 en el sistema de referencia usual.

- Para el cambio de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}_2$, procedemos de la misma forma a partir del vector $\overrightarrow{O_2P}=(x,y)-(1,1)=(x-1,y-1)$ y la base B_2.

$$(x-1,y-1)=\alpha(0,1)+\beta(1,1)\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\beta=x-1\\\alpha+\beta=y-1\end{array}\right\}\Rightarrow P=(y-x,x-1)_{\mathcal{R}_2}.$$

De donde, si $P=(x_2,y_2)_{\mathcal{R}_2}$,

$$(x_2,y_2)_{\mathcal{R}_1}=(y-x,x-1)_{\mathcal{R}_2}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.$$

Finalmente, para hallar el cambio de $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ combinamos los dos cambios anteriores, es decir,

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.$$

Por tanto, podemos concluir que

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Por cierto, a partir de los valores obtenidos en los apartados, podemos comprobar si los cambios hallados en este apartado "van por buen camino".

d) Como queremos que $(x,y)_{\mathcal{R}_1}=(x,y)_{\mathcal{R}_2}$, tomando las mismas coordenadas en el cambio de $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ hallado en el apartado anterior, tenemos que

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}2x+y=1\\-x-y=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=0\\y=1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2}.$$

O sea, la variedad afín pedida se reduce al punto de coordenadas $(0,1)_{\mathcal{R}_1}=(0,1)_{\mathcal{R}_2}$.

e) A partir del cambio de $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}$ visto en el aparatado *c*), tenemos que

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

son las coordenadas, en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^2$, del único punto de la variedad afín hallada en el apartado *d*).

2. En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$, con el sistema de referencia $\mathcal{R}$ y el producto escalar usuales, consideramos

   - la recta r con ecuación continua $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{6}$;
   - la recta s que pasa por los puntos $(2, 1, -1)$ y $(4, 2, 1)$.

   a) Halla las ecuaciones cartesianas de r y s.

   b) Comprueba que r y s se cruzan (esto es, ni se cortan ni son paralelas).

   c) Halla la ecuación cartesiana del plano π que contiene a s y es paralelo a r.

   d) Halla la proyección del punto $O = (0, 0, 0)$ sobre π.

   e) Calcula la distancia entre r y s.

Resolución

a) Para hallar las cartesianas de r, a partir de la ecuación continua, tenemos que

$$r \equiv \left.\begin{array}{c} \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x + 2y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{array}\right\}.$$

Para las cartesianas de s, hallamos previamente su ecuación continua. Para ello, determinamos un vector director de s a partir de los puntos $(2, 1, -1)$ y $(4, 2, 1)$.

$$(4, 2, 1) - (2, 1, -1) = (2, 1, 2) \Rightarrow s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}.$$

Entonces,

$$s \equiv \left.\begin{array}{c} \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} \\ \frac{x-2}{2} = \frac{z+1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ x - z = 3 \end{array}\right\}.$$

b) Por lo hecho en el apartado *a*), sabemos que $\vec{v}_r = (2, -1, 6)$ es un vector director de la recta r y que $\vec{v}_s = (2, 1, 2)$ lo es de s. Por tanto, como ambos vectores no son proporcionales, es claro que r y s no pueden ser ni paralelas ni coincidentes.
Por otra parte, si analizamos el sistema formado por las ecuaciones cartesianas halladas en *a*) para ambas rectas,

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 0 \\ 3x - z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x - z = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 0 \\ y = 0 \\ -z = 0 \\ -z = 3 \end{array}\right\},$$

o sea, tenemos un sistema incompatible, es decir, r y s no se cortan.
Concluimos que r y s se cruzan (ni se cortan ni son paralelas).

c) Como queremos que π contenga a s y sea paralelo a r, podemos asumir que $\vec{v}_s$ y $\vec{v}_r$ son vectores directores de π y que, por ejemplo, $(2, 1, -1)$ es un punto de π (pues este es un punto de s según el enunciado de este ejercicio). Así, tenemos que las ecuaciones paramétricas de π son

$$\left.\begin{array}{r} x = 2\alpha + 2\beta + 2 \\ y = -\alpha + \beta + 1 \\ z = 6\alpha + 2\beta - 1 \end{array}\right\}.$$

Estudiando el sistema anterior tomando α, β como incógnitas y x, y, z como parámetros,

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha + 2\beta &= x - 2 \\ \alpha - \beta &= -y + 1 \\ 6\alpha + 2\beta &= z + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & x-2 \\ 1 & -1 & -y+1 \\ 6 & 2 & z+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y+1 \\ 2 & 2 & x-2 \\ 6 & 2 & z+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y+1 \\ 0 & 4 & x+2y-4 \\ 0 & 8 & z+6y-5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y+1 \\ 0 & 4 & x+2y-4 \\ 0 & 0 & z+2y-2x+3 \end{array}\right) \Rightarrow z + 2y - 2x + 3 = 0.$$

Por tanto, la ecuación cartesiana de π es

$$2x - 2y - z = 3.$$

d) Para hallar la proyección $p_\pi(O)$ de $O = (0,0,0)$ sobre π, empezamos calculando la recta $\pi^\perp$ que es ortogonal (perpendicular) a π y pasa por O. Puesto que $\vec{v} = (2,-2,-1)$ es un vector director de $\pi^\perp$ (recordemos que, por el enunciado del ejercicio, estamos considerando el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual), entonces

$$\pi^\perp \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \pi^\perp \equiv \left.\begin{aligned} \tfrac{x}{2} &= \tfrac{y}{-2} \\ \tfrac{x}{2} &= \tfrac{z}{-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pi^\perp \equiv \left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Como la proyección de O sobre π es el punto de intersección entre π y $\pi^\perp$, resolvemos el sistema formado por la ecuación cartesiana de π junto con las cartesianas de $\pi^\perp$.

$$\left.\begin{aligned} 2x - 2y - z &= 3 \\ x + y &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3} \\ y &= -\tfrac{2}{3} \\ z &= -\tfrac{1}{3} \end{aligned}\right\}.$$

Así concluimos que $p_\pi(O) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

e) Por la construcción hecha en los apartados anteriores, tenemos que

$$\mathrm{d}(r,s) = \mathrm{d}(O,\pi) = \mathrm{d}(O, p_\pi(O)) = \left\| \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = 1.$$

3. Consideramos la cónica dada, en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}$ del plano afín $\mathbb{R}^2$, por

$$x^2 + 14xy + y^2 - 20x + 4y = 56.$$

   a) Halla su ecuación reducida, especificando el cambio de sistema de referencia realizado, e indica qué tipo de cónica es.

   b) Determina sus elementos distinguidos (vértices, focos, centro, ejes, asíntotas, directriz), expresando sus coordenadas en el sistema de referencia $\mathcal{R}$.

Resolución

a) Pasemos a notación matricial la cónica.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 56 = 0.$$

Empezamos calculando los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 7 \\ 7 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 48 = 0 \Rightarrow \lambda = 8,\ \lambda = -6.$$

Para el valor propio $\lambda = 8$ tenemos

$$\left(\begin{array}{cc|c} -7 & 7 & 0 \\ 7 & -7 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

O sea, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es un vector de A asociado al valor propio $\lambda = 8$.
Por otra parte, para el valor propio $\lambda = -6$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 7 & 0 \\ 7 & 7 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es un vector de A asociado al valor propio $\lambda = -6$.
Ahora, tomando el cambio de sistemas de referencia (que corresponde a un giro)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

la cónica se transforma en

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - 56 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - 56 = 0 \Rightarrow$$

$$8x_1^2 - 6y_1^2 - 8\sqrt{2}x_1 + 12\sqrt{2}y_1 - 56 = 0.$$

Ahora, ajustando cuadrados,

$$8\left(x_1^2 - \sqrt{2}x_1\right) - 6\left(y_1^2 - 2\sqrt{2}y_1\right) - 56 = 8\left(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 8 \cdot \frac{2}{4} - 6\left(y_1 - \sqrt{2}\right)^2 + 6 \cdot 2 - 56 = 0 \Rightarrow$$

$$8\left(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 6\left(y_1 - \sqrt{2}\right)^2 - 48 = 0.$$

Por tanto, tomando el cambio (la traslación) $x_2 = x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = y_1 - \sqrt{2}$, llegamos a la ecuación reducida

$$8x^2 - 6y_2^2 = 48 \Rightarrow \frac{x_2^2}{6} - \frac{y_2^2}{8} = 1 \Rightarrow \frac{x_2^2}{(\sqrt{6})^2} - \frac{y_2^2}{(\sqrt{8})^2} = 1.$$

Concluimos que la cónica dada es una hipérbola.

Por otra parte, para determinar el cambio de referencia usado, ya que $x_1 = x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_1 = y_2 + \sqrt{2}$, incluyendo estas ecuaciones en el giro,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

que es el cambio de referencia realizado en la transformación de la ecuación general en la reducida.

b) De la forma reducida, sabemos que $a = \sqrt{6}$ y que $b = \sqrt{8}$, por lo que la semidistancia focal es $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{14}$. Con esto, y el cambio visto al final del apartado anterior, tenemos los siguientes elementos distinguidos de la hipérbola.

- Centro: $(0,0)_{\mathcal{R}_2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)_{\mathcal{R}}$.
- Vértices: $(\pm\sqrt{6}, 0)_{\mathcal{R}_2} = \left(\pm\sqrt{3} - \frac{1}{2}, \pm\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)_{\mathcal{R}}$.
- Focos: $(\pm\sqrt{14}, 0)_{\mathcal{R}_2} = \left(\pm\sqrt{7} - \frac{1}{2}, \pm\sqrt{7} + \frac{3}{2}\right)_{\mathcal{R}}$.

Por otro lado, para los ejes de simetría y las asíntotas, recurriremos al cambio de (x_2, y_2) a (x, y).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

de donde,

$$x_2 = \frac{x + y - 1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{-x + y - 2}{\sqrt{2}}.$$

Finalmente,

- eje de simetría horizontal: $x_2 = 0 \Rightarrow x + y = 1$;
- eje de simetría vertical: $y_2 = 0 \Rightarrow x - y = -2$;
- asíntotas: $y_2 = \pm\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}} x_2 \Rightarrow y_2 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} x_2 \Rightarrow (\textit{operando}) \Rightarrow$
$$\left(1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right) x + \left(-1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right) y = -2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ejercicio voluntario (Para subir nota tras haber aprobado la prueba)

4. De cierta cónica, cuya distancia focal es igual a $2\sqrt{2}$, sabemos que los vértices $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ están situados en uno de sus ejes de simetría. Determina, justificadamente, qué tipo de cónica es y halla su ecuación general. Sin realizar muchos más cálculos, ¿cuál es la ecuación reducida de la cónica?

Resolución

Por el enunciado, la cónica tiene dos focos y, al menos, dos vértices. Por tanto, no puede ser una parábola. Por otra parte, la distancia entre los vértices es

$$\mathrm{d}(V_1, V_2) = \mathrm{d}\left(\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)\right) = \|(4, -4)\| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

que es mayor que la distancia entre los focos. Por tanto, la cónica es una elipse.

Ahora, como $a = 2\sqrt{2}$ y $c = \sqrt{2}$, se verifica que $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{6}$. Así podemos asegurar que la ecuación reducida de la elipse es

$$\frac{x^2}{(\sqrt{8})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} = 1.$$

Para hallar la ecuación general de la elipse podemos recurrir a la definición de elipse: "Dados dos puntos distintos F_1 y F_2, que denominaremos focos, y una constante $2a$ mayor que la distancia $2c$ entre los focos, se llama elipse de focos F_1 y F_2 y constante $2a$ al lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a F_1 y F_2 es $2a$. Es decir, un punto P de tal elipse cumplirá la igualdad $\mathrm{d}(P, F_1) + \mathrm{d}(P, F_2) = 2a$".

Por consiguiente, necesitamos encontrar las coordenadas de los focos de la elipse. Para ello podemos calcular la recta que pasa por los vértices dados y, a continuación, hallar los puntos de dicha recta que distan $\sqrt{2}$ del centro de la elipse (que puede ser calculado como la semi-suma de los vértices).

Sin embargo, teniendo en cuenta que $a = 2\sqrt{2}$ y que $c = \sqrt{2}$, es claro que cada uno de los focos es, justamente, el punto intermedio entre el centro de la elipse y cada uno de los vértices. O sea, teniendo en cuenta que el centro es

$$C = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

entonces

- $F_1 = \frac{V_1 + C}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,
- $F_2 = \frac{V_2 + C}{2} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Por último, si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la elipse,

$$\mathrm{d}(P, F_1) + \mathrm{d}(P, F_2) = \left\|\left(\frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y\right)\right\| + \left\|\left(-\frac{3}{2} - x, \frac{5}{2} - y\right)\right\| = 4\sqrt{2}.$$

Y, tras operar adecuadamente, llegamos a la ecuación general de la elipse,

$$7x^2 + 2xy + 7y^2 + 4x - 20y - 32 = 0.$$