UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Doble Grado CIVIL–ADE

Primera prueba

22 de abril de 2020

1. (10) Determina, razonadamente, la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

   a) (2) Sea V un espacio vectorial de dimensión 8. Entonces se verifica que todos los sistemas de generadores de V están formados por, al menos, ocho vectores.

   b) (2) Sea Z un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_8$. Supongamos que $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x)\}$ es un sistema de generadores de Z que no incluye al polinomio idénticamente nulo. Entonces se verifica que $\dim Z^{\perp} = 4$.

   c) (2) Sean X e Y espacios vectoriales reales y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Además, sea $Z = \mathrm{Im}(T) \subseteq Y$. Entonces se verifica que T es un isomorfismo entre X y Z.

   d) (2) Sean U y V espacios vectoriales reales y $T : U \to V$ un isomorfismo. Además, sean B_U y B_V bases de U y V respectivamente. Entonces se verifica que $M(T, B_U, B_V)$ es invertible.

   e) (2) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $T\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = (0,1)$ y $T\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = (1,0)$. Entonces se verifica que T es una transformación ortogonal impropia.

Resolución

a) Si V es un espacio vectorial de dimensión 8 entonces todas sus bases están formadas por ocho vectores linealmente independientes. Si añadimos uno o más vectores a cualquier base, el conjunto obtenido dejará de ser un conjunto de vectores linealmente independientes pero seguirá siendo un sistema de generadores (por contener una base).

Por tanto, la afirmación hecha es cierta.

b) Si Z un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_8$ y $C = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x)\}$ es un sistema de generadores de Z, entonces la dimensión de Z será menor o igual que 5, dependiendo de cuántos vectores linealmente independientes podemos encontrar en C. Por tanto, sobre la dimensión de Z solo podemos afirmar que $\dim Z \leq 5$.

Por otra parte, es conocido que $\dim \mathbb{P}_8 = 9$ y que $\dim \mathbb{P}_8 = \dim Z + \dim Z^{\perp}$. A partir de aquí,

$$\dim Z^{\perp} = \dim \mathbb{P}_8 - \dim Z = 9 - \dim Z \geq 9 - 5 = 4 \Rightarrow \dim Z^{\perp} \geq 4.$$

Por tanto, la afirmación hecha no es cierta.

c) Sean X e Y espacios vectoriales reales y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Es conocido que $Z = \mathrm{Im}(T)$ es un subespacio vectorial de Y, por lo que $T : X \to Z$ también es una aplicación lineal entre espacios vectoriales. Además, como $\mathrm{Im}(T) = Z$, es obvio que T es un epimorfismo entre X y Z.

Por otra parte, para que T fuera un isomorfismo entre X y Z, T debería ser un monomorfismo. Pero esto último no es necesariamente cierto para todas las aplicaciones lineales que se puedan definir entre X e Y y, por tanto, entre X y Z.

Por tanto, la afirmación hecha no es cierta.[1]

[1] Aunque ya no es necesario dar un ejemplo para responder a la cuestión planteada, consideremos la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x, y)$. Es fácil comprobar que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ y, por tanto, $X = \mathbb{R}^3$ e $Y = Z = \mathbb{R}^2$. Claramente la aplicación lineal T no es un isomorfismo entre X y Z.

d) Para simplificar la notación, vamos a escribir simplemente M en lugar de $M(T, B_U, B_V)$. Por definición de matriz asociada a una aplicación lineal, si u es un vector de U expresado en la base B_U, entonces $v = T(u) = Mu$ es un vector de V expresado en la base B_V. Ahora bien, por ser T un isomorfismo se verifica que

- U y V tienen la misma dimensión y, en consecuencia, M es una matriz cuadrada;
- T es un monomorfismo y, por tanto, el sistema $Mu = 0$ solo puede admitir la solución trivial, es decir, $Mu = 0$ debe ser un sistema compatible determinado.

Entonces deducimos que M es una matriz cuadrada de rango máximo, o sea, M será una matriz invertible.

Por tanto, la afirmación hecha es cierta.

e) Para comprobar si una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación ortogonal basta ver que, para cualquier base B ortonormal de $\mathbb{R}^2$, se verifica que $M = M(T, B)$ es una matriz ortogonal (es decir, que $M^{-1} = M^T$).

A partir del enunciado, y observando que $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right), \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right) \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, se verifica que

$$M(T, B, B_C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde B_C es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ (que por supuesto también es una base ortonormal). Así pues, necesitamos hallar la matriz de cambio $C_{B_C B}$ para calcular $M = M(T, B)$ (pues $M(T, B) = C_{B_C B} M(T, B, B_C)$).

Ya que $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right), \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right) \right\}$ es una base ortonormal, sabemos que

$$C_{BB_C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{B_C B} = (C_{BB_C})^{-1} = (C_{BB_C})^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$M(T, B) = C_{B_C B} M(T, B, B_C) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Ahora es fácil comprobar que $M(T, B) M(T, B)^T = I_2$, por lo que T es una transformación ortogonal. Sin embargo, $\det M(T, B) = 1$, por lo que T es una transformación ortogonal propia.

Por tanto, la afirmación hecha no es cierta.

2. (8) Sean $\mathcal{M}_2$ el espacio vectorial formado por las matrices cuadradas de orden 2 y $\mathbb{P}_2$ el espacio vectorial formado por los polinomios de grado menor o igual que 2 (en ambos casos con las sumas y los productos por escalares usuales).

   Por otro lado, sea Y el conjunto definido por

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Responde, razonadamente, a las siguientes cuestiones.

   a) (2) Comprueba que Y es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2$.

   b) (2) Halla una base de Y.

   c) (4) ¿Son isomorfos Y y $\mathbb{P}_2$? En caso afirmativo, define una aplicación entre ambos espacios, justificando tanto su linealidad como su carácter isomórfico.

Resolución

a) En primer lugar debemos observar que una matriz de $\mathcal{M}_2$ pertenece al conjunto Y si los elementos de la diagonal son uno el opuesto del otro.

A partir de la caracterización de un subespacio vectorial, para comprobar que Y es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2$ basta con ver que la suma de dos matrices cualesquiera de Y pertenece a Y y que el producto de una matriz cualquiera de Y por un escalar (esto es, un número real) también pertenece a Y.[2] Veamos ambas propiedades.

- Sean $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix}$ dos matrices cualesquiera de Y. Entonces

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -a_1 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -(a_1 + a_2) \end{pmatrix}$$

  y esta última matriz pertenece claramente a Y ya que los elementos de la diagonal son uno el opuesto del otro.

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ una matriz cualquiera de Y. Entonces

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda(-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & -(\lambda a) \end{pmatrix}$$

  y, de nuevo, esta última matriz pertenece a Y ya que los elementos de la diagonal son uno el opuesto del otro.

b) Para cualquier matriz de A tenemos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un sistema de generadores de Y.

Veamos ahora que B está formada por vectores linealmente independientes. Para ello, consideremos una combinación lineal de ellos igualada a la matriz nula (que, por supuesto, pertenece a Y al ser 0 el opuesto de 0).

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

[2] Otra posible caracterización es la que permite probar que Y es un subespacio vectorial sin más que comprobar que, para cualesquiera dos matrices $A, B \in Y$ y cualesquiera escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se verifica que $\alpha A + \beta B \in Y$.

por lo que la única posibilidad, para tener una combinación lineal igualada a la matriz nula, es que todos los coeficientes en dicha combinación sean iguales a cero. Por tanto, concluimos que los elementos de B son linealmente independientes.

Como B es un sistema de generadores de Y formado por vectores linealmente independientes, tenemos que B es una base de Y.

c) A partir del apartado *b*), sabemos que Y tiene dimensión tres. Como $\mathbb{P}_2$ también tiene dimensión tres, ambos espacios vectoriales son isomorfos, esto es, podemos establecer un isomorfismo entre ellos. Por ejemplo, definamos la aplicación

$$T : Y \to \mathbb{P}_2, \;\; T\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a + bx + cx^2.$$

Veamos que T es lineal. Para ello basta comprobar que T respeta la suma de matrices y el producto por escalares.

- $T\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & -(a_1+a_2) \end{pmatrix} =$
  $(a_1+a_2) + (b_1+b_2)x + (c_1+c_2)x^2 = (a_1 + b_1x + c_1x^2) + (a_2 + b_2x + c_2x^2) =$
  $T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix}.$
- $T\left(\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & -(\lambda a) \end{pmatrix} = (\lambda a) + (\lambda b)x + (\lambda c)x^2 =$
  $\lambda(a + bx + cx^2) = \lambda T\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$

Por último, para ver que T es un isomorfismo comprobaremos que $\mathrm{N}(T) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ (por lo que T es un monomorfismo) y que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{P}_2$ (por lo que T es un epimorfismo). A partir de la definición de núcleo de una aplicación lineal,

$$\mathrm{N}(T) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in Y \;\middle|\; T\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = 0 + 0x + 0x^2\right\} =$$

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in Y \;\middle|\; a + bx + cx^2 = 0 + 0x + 0x^2\right\} =$$

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in Y \;\middle|\; a = 0,\; b = 0,\; c = 0\right\} \Rightarrow \mathrm{N}(T) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Ahora bien, como $\dim Y = 3$, $\dim \mathrm{N}(T) = 0$ y $\dim Y = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$, deducimos que $\dim \mathrm{Im}(T) = 3$. Como $\mathrm{Im}(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_2$ y ambos tienen la misma dimensión, concluimos que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{P}_2$.[3]

Así pues, hemos visto que $\mathrm{N}(T) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ y que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{P}_2$, por lo que podemos asegurar que T es un isomorfismo entre Y y $\mathbb{P}_2$.

[3] También es inmediato ver que, para cualquier polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ de $\mathbb{P}_2$, la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in Y$ es tal que $T(A) = p(x)$, es decir, todos los polinomios de $p(x) = a + bx + cx^2$ tienen un origen en Y para la aplicación lineal T. En conclusión, T es un epimorfismo.

3. (12) Sea la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por la expresión

$$T(u) = u - \langle v, u \rangle\, v - \langle w, u \rangle\, w,$$

donde $u = (x, y, z)$, $v = \left(\frac{5}{13}, 0, \frac{-12}{13}\right)$ y $w = \left(\frac{12}{13}, 0, \frac{5}{13}\right)$ están dados en la base canónica.

Responde, razonadamente, a las siguientes cuestiones.

a) (2) Halla la expresión en coordenadas de T.

b) (2) Halla ecuaciones paramétricas y una base del subespacio vectorial $U = \mathrm{N}(T)$.

c) (2) Halla ecuaciones cartesianas y una base del subespacio vectorial $V = \mathrm{Im}(T)$.

d) (2) ¿Es $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$? Es decir, ¿es $\mathbb{R}^3$ suma directa de U y V?

e) (4) Aplicación: a partir de lo hecho en los apartados anteriores, determina la proyección del vector $u = (1, 2, -3)$ sobre el subespacio vectorial $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

Resolución

a) A partir de los datos del ejercicio,

- $\langle v, u \rangle\, v = \left\langle \left(\frac{5}{13}, 0, \frac{-12}{13}\right), (x, y, z) \right\rangle \left(\frac{5}{13}, 0, \frac{-12}{13}\right) = \left(\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}z\right) \left(\frac{5}{13}, 0, \frac{-12}{13}\right)$;
- $\langle v, u \rangle\, v = \left\langle \left(\frac{5}{13}, 0, \frac{-12}{13}\right), (x, y, z) \right\rangle \left(\frac{12}{13}, 0, \frac{5}{13}\right) = \left(\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}z\right) \left(\frac{12}{13}, 0, \frac{5}{13}\right)$.

Por tanto,

$$T(u) = (x, y, z) - \left(\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}z\right)\left(\frac{5}{13}, 0, \frac{-12}{13}\right) - \left(\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}z\right)\left(\frac{12}{13}, 0, \frac{5}{13}\right) \Rightarrow$$

$$T(u) = (x, y, z) - \left(\frac{25}{169}x - \frac{60}{169}z, 0, -\frac{60}{169}x + \frac{144}{169}z\right) - \left(\frac{144}{169}x + \frac{60}{169}z, 0, \frac{60}{169}x + \frac{25}{169}z\right)$$

$$\Rightarrow T(u) = \left(x - \frac{25}{169}x + \frac{60}{169}z - \frac{144}{169}x - \frac{60}{169}z, y, z - \frac{60}{169}x - \frac{144}{169}z - \frac{60}{169}x - \frac{25}{169}z\right) \Rightarrow$$

$$T(u) = T(x, y, z) = (0, y, 0), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

b) A partir de la definición de núcleo de una aplicación lineal,

$$\mathrm{N}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid (0, y, 0) = (0, 0, 0)\} \Rightarrow$$

$$\mathrm{N}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid y = 0\}.$$

Por tanto,

$$y = 0$$

es una ecuación cartesiana de $\mathrm{N}(T)$, de donde las ecuaciones paramétricas de $\mathrm{N}(T)$ se pueden obtener resolviendo dicha ecuación en las incógnitas x, y, z. Así, las ecuaciones paramétricas serán,

$$\begin{cases} x = \alpha, \\ y = 0, \\ z = \beta, \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

A partir de las ecuaciones paramétricas, tenemos que, para todo vector $(x, y, z) \in \mathrm{N}(T)$,

$$(x, y, z) = (\alpha, 0, \beta) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1).$$

Es decir, $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{N}(T)$. Pero ambos vectores son claramente linealmente independientes (ninguno de los dos se puede expresar como múltiplo del otro), por lo que B_1 es una base de $U = \mathrm{N}(T)$.

c) Por la definición de imagen de una aplicación lineal,

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto, tomando $y = \alpha$, tenemos que cualquier vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pertenecerá a $\mathrm{Im}(T)$ si es de la forma

$$(x,y,z) = \alpha(0,1,0), \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Así tenemos que $B_2 = (0,1,0)$ es una base de $V = \mathrm{Im}(T)$. Además, unas ecuaciones paramétricas de V serán

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = 0, \end{cases}$$

A partir de aquí es claro que

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

son ecuaciones cartesianas de $V = \mathrm{Im}(T)$.

d) Al ser $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, sabemos que tanto $U = \mathrm{N}(T)$ como $V = \mathrm{Im}(T)$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

Para hallar $U \cap V$ recordamos que un vector (x,y,z) pertenecerá a $U \cap V$ si satisface las ecuaciones cartesianas de ambos subespacios (que han sido determinadas en los dos apartados anteriores), esto es, si

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}.$$

Por tanto, $U \cap V = \{(0,0,0)\}$.

Por otra parte, para determinar el subespacio $U+V$ basta tener en cuenta que el conjunto $B = B_1 \cup B_2 = \{(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$ es un sistema de generadores de $U+V$. Además, como B está formado por vectores linealmente independientes (de hecho son los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ cambiados de orden), podemos concluir que $U + V = \mathbb{R}^3$.

Como $U \cap V = \{(0,0,0)\}$ y $U + V = \mathbb{R}^3$, tenemos que $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

e) A partir de lo hecho en los apartados anteriores, es claro que

$$u = (1,2,-3) = (1,0,-3) + (0,2,0), \text{ con } (1,0,-3) \in U \text{ y } (0,2,0) \in V.$$

Por otra parte, ya que $(0,1,0)$ es ortogonal a los vectores $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$ (y teniendo en cuenta que $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$), podemos afirmar que V es el complemento ortogonal de U en $\mathbb{R}^3$, es decir, $U^\perp = V$ en $\mathbb{R}^3$.
Por tanto,

$$u - (1,0,-3) = (0,2,0), \text{ con } (1,0,-3) \in U \text{ y } (0,2,0) \in U^\perp,$$

de donde, por la definición de proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio vectorial, concluimos que $p_U(u) = (1,0,-3)$.