UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Doble Grado CIVIL–ADE

Segunda prueba

13 de mayo de 2020

1. (8) Determina, razonadamente, la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

 a) (3) Si H, K son dos matrices cuadradas de orden p y w es un vector propio para ambas, entonces w es un vector propio de $H+K$, $H-K$ y HK.

 b) (2) En el plano afín usual $\mathbb{R}^2$, con el sistema de referencia canónico $\mathcal{R} = \{O; B_C\}\}$, la recta r que pasa por el punto $P = (4, -3)$ y tiene a $v = (-2, 3)$ como vector director es la dada por la ecuación cartesiana $3x - 2y = 18$.

 c) (3) En el plano afín euclídeo usual $\mathbb{R}^2$, con el sistema de referencia canónico $\mathcal{R} = \{O; B_C\}$, los puntos $P_1 = (-3, 5)$ y $P_2 = (3, -5)$ distan lo mismo de la recta $r \equiv 3x - 5y = 0$.

Resolución

a) Si w es un vector propio de H y K entonces deben existir dos números reales λ_H y λ_K tales que

$$Hw = \lambda_H w; \quad Kw = \lambda_K w.$$

A partir de aquí,

$$(H+K)w = Hw + Kw = \lambda_H w + \lambda_K w = (\lambda_H + \lambda_K)w;$$

$$(H-K)w = Hw - Kw = \lambda_H w - \lambda_K w = (\lambda_H - \lambda_K)w;$$

$$(HK)w = H(Kw) = H(\lambda_K w) = \lambda_K (Hw) = \lambda_K(\lambda_H w) = (\lambda_K \lambda_H)w.$$

Es decir,

- w es vector propio de $H+K$ con valor propio $\lambda = \lambda_H + \lambda_K$;
- w es vector propio de $H-K$ con valor propio $\lambda = \lambda_H - \lambda_K$;
- w es vector propio de HK con valor propio $\lambda = \lambda_H \lambda_K$.

Por tanto, la afirmación hecha es cierta.

b) Sustituyendo, vemos que P es un punto de la recta r.

$$3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 12 + 6 = 18.$$

Veamos si $v = (-2, 3)$ es un vector director de r. Para ello buscamos otro punto de la recta.

$$3x - 2y = 18 \Rightarrow y = \frac{3x - 18}{2} \Rightarrow Q = (6, 0).$$

Entonces $\overrightarrow{PQ} = (6,0) - (4,-3) = (2,3)$ es un vector director de la recta r. Y, como v no es proporcional al vector calculado, tenemos que v no puede ser vector director de r.

Por tanto, la afirmación hecha no es cierta.[1]

c) Para calcular la distancia de los puntos $P_1 = (-3, 5)$ y $P_2 = (3, -5)$ a la recta $r \equiv 3x - 5y = 0$ necesitamos calcular rectas ortogonales a r y, para esto, debemos hallar un vector ortogonal a r.

Empezamos determinando un vector director de r. Para ello, es fácil ver que los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (5, 3)$ pertenecen a r. Por tanto, $v = \overrightarrow{AB} = (5, 3) - (0, 0) = (5, 3)$ es un vector director de r. Como consecuencia, es claro que $w = (3, -5)$ es un vector ortogonal a r.

[1] Es fácil comprobar que la recta que pasa por P y tiene a v como vector director es, en realidad, la recta ortogonal a la recta r que pasa por P.

Pasemos a calcular la recta s que pasa por P_1 y tiene a w como vector director.

$$(x, y) = (-3, 5) + \lambda(3, -5) \Rightarrow \lambda = \frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{-5} \Rightarrow 5x + 3y = 0.$$

Pero, a partir de esta expresión, es claro que P_2 pertenece a s. Además, $r \cap s = (0, 0)$, pues este punto es la única solución del sistema formado por las cartesianas de r y s,

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \end{array}\right\},$$

ya que el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo,

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 25 = 34 \neq 0.$$

Así, las distancias de P_1 y P_2 a r serán

$$\mathrm{d}(P_1, r) = \mathrm{d}(P_1, (0, 0)) = \|(3, -5)\| = \sqrt{34};$$

$$\mathrm{d}(P_2, r) = \mathrm{d}(P_1, (0, 0)) = \|(-3, 5)\| = \sqrt{34}.$$

Por tanto, la afirmación hecha es cierta.[2]

[2]Esto mismo se puede asegurar comprobando que $(0, 0)$ es el punto medio del segmento formado por los puntos $P_1 = (-3, 5)$ y $P_2 = (3, -5)$. En efecto, $(0, 0) = \frac{P_1 + P_2}{2}$.

2. (6) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

a) (4) Halla, razonadamente, una diagonalización de A por semejanza ortogonal.

b) (2) Halla, razonadamente, una diagonalización de A que no sea por semejanza ortogonal.

Resolución

a) Puesto que la matriz A es simétrica, sabemos que puede ser diagonalizada por semejanza orotgonal, esto es, existen D matriz diagonal y Q matriz ortogonal tales que $A = QDQ^T$.

Empezamos hallando el polinomio característico de A.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -5 & 0 \\ -5 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -5 \\ -5 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+5)(\lambda^2 - 25).$$

Y, mediante la ecuación característica, determinamos los valores propios de A.

$$-(\lambda+5)(\lambda^2-25) = 0 \Rightarrow (\lambda+5)(\lambda^2-25) = 0 \Rightarrow (\lambda+5)(\lambda+5)(\lambda-5) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = 5 \text{ (simple)}, \quad \lambda = -5 \text{ (doble)}.$$

Ahora hallamos los subespacios propios asociados a cada valor propio. Para $\lambda = 5$ tenemos

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} -5x - 5y = 0 \\ -5x - 5y = 0 \\ -10z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 5x + 5y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = \alpha, \\ y = -\alpha, \\ z = 0, \end{matrix} \right. \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, $V_5 = \{(\alpha, -\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = L\{(1,-1,0)\}$.

Por otra parte, para $\lambda = -5$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 5x - 5y = 0 \\ -5x + 5y = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 5x - 5y = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = \alpha, \\ y = \alpha, \\ z = \beta, \end{matrix} \right. \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, $V_{-5} = \{(\alpha, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = L\{(1,1,0), (0,0,1)\}$ (es claro que $(1,1,0), (0,0,1)$ son linealmente independientes pues ninguno de los dos es múltiplo del otro).

A partir de los cálculos realizados, tenemos que $v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$ son linealmente independientes (basta tener en cuenta que su $\det(v_1, v_2, v_3) = -2 \neq 0$) y, además, son ortogonales dos a dos ($\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = 0$). Por consiguiente, para diagonalizar a A por semejanza ortogonal solo queda por normalizar estos vectores.

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right); \quad w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right); \quad w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = (0,0,1).$$

Tomando

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

concluimos que $A = QDQ^T$ con Q ortogonal (esto es, $QQ^T = I$).

b) Puesto que A es diagonalizable por semejanza ortogonal, también es diagonalizable por semejanza no necesariamente ortogonal. Por ejemplo, a partir de los cálculos del apartado anterior, podemos considerar

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para que $A = PDP^{-1}$ con $PP^T \neq I$. Así, esta sería una diagonalización de A que no lo es por semejanza ortogonal (al no ser P una matriz ortogonal).

3. (8) En el espacio afín euclídeo usual $\mathbb{R}^3$, junto con el sistema de referencia canónico $\mathcal{R} = \{O; B_C\}$, se considera la isometría (movimiento rígido)

$$S_r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \alpha - y \\ \beta - z \end{pmatrix}.$$

a) (3) Halla, razonadamente, los valores de α y β para que S_r sea la simetría ortogonal respecto de la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-5}{0} = \frac{z-1}{0}$.

b) (3) ¿Es el plano $\pi_1 \equiv x = 0$ una variedad invariante por S_r? Razona la respuesta.

c) (2) Sea π_2 el plano dado por la expresión $z = 2$. Halla, razonadamente, $S_r(\pi_2)$.

Resolución

a) Como queremos que S_r sea una simetría ortogonal respecto de la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-5}{0} = \frac{z-1}{0}$, necesitamos que los puntos de r sean puntos fijos de S_r. Por tanto, vamos a determinar todos los puntos de r e imponer que tales puntos sean fijos para S_r.

$$\frac{x}{2} = \frac{y-5}{0} = \frac{z-1}{0} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0 = y-5 \\ 0 = z-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = a, \\ y = 5, \quad a \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ z = 1, \end{cases}$$

$$S_r \begin{pmatrix} a \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ \alpha - 5 \\ \beta - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 10, \quad \beta = 2.$$

Por tanto, tenemos que S_r vendría dada por

$$S_r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 10 - y \\ 2 - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Para finalizar este apartado debemos comprobar que, en efecto, S_r así definida es una simetría ortogonal respecto de la recta r. Para ello es necesario que la matriz asociada a S_r sea ortogonal con determinante igual a 1 (lo cual es evidentemente cierto a partir de su expresión)[3] y que r sea el conjunto de puntos fijos de S_r. Veamos que esto último también se verifica.

$$S_r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 10 - y \\ 2 - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = x \\ 10 - y = y \\ 2 - z = z \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 0 = 0 \\ 2y = 10 \\ 2z = 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, \\ y = 5, \quad a \in \mathbb{R} \\ z = 1, \end{cases}$$

Ya solo restaría ver que cualquier otro punto del espacio de transforma en su simétrico con respecto a r. Para ello veremos que, si $P = (x, y, z)$ es un punto cualquiera y $P' = S_r(P)$, entonces $\overrightarrow{PP'}$ es un vector ortogonal a r y que, si Q es el punto medio del segmento determinado por P y P', entonces Q está en r. En efecto,

- $P' = (x, 10 - y, 2 - z)$;
- $\overrightarrow{PP'} = (x, 10 - y, 2 - z) - (x, y, z) = (0, 10 - 2y, 2 - 2z)$ es ortogonal a $(2, 0, 0)$ (que es un vector director de r);
- $Q = \frac{P + P'}{2} = \frac{(x, 10-y, 2-z) + (x, y, z)}{2} = (x, 5, 1)$, que claramente está en r.

b) Para ver que el plano π_1 es una variedad invariante de S_r vamos a comprobar que, si P es un punto cualquiera de π_1, entonces se verifica que $P' = S_r(P)$ también pertenece a π_1. Para ello, comenzamos determinando la expresión general de un punto $P \in \pi_1$.

$$x = 0 \Rightarrow P = (0, a, b), \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$P' = S_r(P) = S_r \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 - a \\ 2 - b \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

A partir de su expresión, es claro que P' pertenece a π_1 para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$.

[3] Y por estar usando el sistema de referencia canónico, que es un sistema de referencia rectangular

c) Para hallar $S_r(\pi_2)$ vamos a analizar el conjunto de puntos

$$\{P' \mid P' = S_r(P) \text{ para algún } P \in \pi_2\}$$

Para ello, comenzamos determinando la expresión general de un punto $P \in \pi_2$.

$$z = 2 \Rightarrow P = (a, b, 2), \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$P' = S_r(P) = S_r \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 10 - b \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

A partir de esta expresión, es claro que P' pertenece a π_2 si, y solo si, su tercera coordenada es igual a cero. Por tanto $S_r(\pi_2)$ es el plano definido por la ecuación cartesiana $z = 0$.[4]

---

[4]Los apartados *b*) y *c*) también se pueden resolver considerando que S_r define un cambio de sistema de referencia, lo cual es así por ser S_r una isometría de $\mathbb{R}^3$. En efecto, considerando

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = S_r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 10 - y \\ 2 - z \end{pmatrix},$$

tenemos que $x' = x$, $y' = 10 - y$ y $z' = 2 - z$. Y, por tanto,

b) $x = 0 \Rightarrow x' = 0 \Rightarrow \pi_1$ y $S_r(\pi_1)$ admiten la misma ecuación cartesiana $\Rightarrow S_r(\pi_1) = \pi_1$.

c) $z = 2 \Rightarrow 2 - z = 0 \Rightarrow z' = 0 \Rightarrow S_r(\pi_2)$ es el plano definido por la ecuación $z' = 0$.

4H. (8) Aplicando el cambio de sistemas de referencia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix},$$

la ecuación reducida de una cónica es

$$\frac{(x')^2}{4^2} - \frac{(y')^2}{3^2} = -1.$$

a) (1) ¿Qué tipo de cónica se está considerando?

b) (3.5) Determina las coordenadas de los elementos geométricos de la cónica (ejes de simetría, centro, vértices, focos, asíntotas y directriz, caso de existir) en su expresión reducida.

c) (3.5) Determina las coordenadas de los elementos geométricos de la cónica (ejes de simetría, centro, vértices, focos, asíntotas y directriz, caso de existir) en su expresión general.

Resolución

a) A partir de la expresión reducida, es claro que la cónica dada es una hipérbola.

b) Puesto que la ecuación reducida aparece con un -1 a la derecha, deducimos que la hipérbola tiene sus focos y sus vértices situados en eje de ordenadas.[5]

Para determinar la posición exacta de los focos necesitamos hallar la semi-distancia entre los focos, esto es,

$$c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Por tanto, las coordenadas de los elementos geométricos de la hipérbola, en su forma reducida, son los siguientes.

- Ejes de simetría: $x' = 0$ e $y' = 0$.
- Centro: $(x', y') = (0, 0)$.
- Vértices: $(x', y') = (0, 3)$ y $(x', y') = (0, -3)$.
- Focos: $(x', y') = (0, 5)$ y $(x', y') = (0, -5)$.
- Asíntotas: $x' = \frac{4}{3}y'$ y $x' = \frac{-4}{3}y'$ $\left(\text{o, equivalentemente, } y' = \frac{3}{4}x' \text{ e } y' = \frac{-3}{4}y'\right)$.

c) A partir del cambio de sistemas de referencia dado, sin más que sustituir las coordenadas convenientes, tenemos los siguientes elementos geométricos de la hipérbola en su forma general.

- Centro: $(x, y) = (20, 10)$.
- Vértices: $(x, y) = \left(\frac{91}{5}, \frac{62}{5}\right)$ y $(x, y) = \left(\frac{109}{5}, \frac{38}{5}\right)$.
- Focos: $(x, y) = (17, 14)$ y $(x, y) = (23, 6)$.

Para el resto de elementos vamos a emplear el cambio de sistemas de referencia inverso.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 22 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x' &= \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}y - 22 \\ y' &= \tfrac{-3}{5}x + \tfrac{4}{5}y + 4 \end{aligned} \right\}.$$

Y, a partir de aquí, los restantes elementos geométricos de la hipérbola, en su forma general, son

- Ejes de simetría:
  - $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 22 = 0 \Rightarrow 4x + 3y = 110$.
  - $\frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}y + 4 = 0 \Rightarrow 3x - 4y = 20$.
- Asíntotas:
  - $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 22 = \frac{4}{3}\left(\frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}y + 4\right) \Rightarrow 24x - 7y = 410$.
  - $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 22 = \frac{-4}{3}\left(\frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}y + 4\right) \Rightarrow y = 10$.

[5] Si queremos que los focos estén el eje de abscisas podemos introducir un segundo cambio de variable. Concretamente, $(x'', y'') = (x', y')$. Así tendríamos la ecuación reducida equivalente $\frac{(x'')^2}{3^2} - \frac{(y'')^2}{4^2} = 1$ y, a partir de ella, también se pueden resolver los apartados *b*) y *c*).

4E. (8) Aplicando el cambio de sistemas de referencia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix},$$

la ecuación reducida de una cónica es

$$\frac{(x')^2}{4^2} + \frac{(y')^2}{5^2} = 1.$$

a) (1) ¿Qué tipo de cónica se está considerando?

b) (3.5) Determina las coordenadas de los elementos geométricos de la cónica (ejes de simetría, centro, vértices, focos, asíntotas y directriz, caso de existir) en su expresión reducida.

c) (3.5) Determina las coordenadas de los elementos geométricos de la cónica (ejes de simetría, centro, vértices, focos, asíntotas y directriz, caso de existir) en su expresión general.

Resolución

a) A partir de la expresión reducida, es claro que la cónica dada es una elipse.

b) Puesto que el coeficiente de y' es mayor que el de x', deducimos que los focos de la elipse están situados en el eje de ordenadas.[6]

Para determinar la posición exacta de los focos necesitamos hallar la semi-distancia entre los focos, esto es,

$$c = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Por tanto, las coordenadas de los elementos geométricos de la elipse, en su forma reducida, son los siguientes.

- Ejes de simetría: $x' = 0$ e $y' = 0$.
- Centro: $(x', y') = (0, 0)$.
- Vértices: $(x', y') = (4, 0)$, $(x', y') = (-4, 0)$, $(x', y') = (0, 5)$ y $(x', y') = (0, -5)$.
- Focos: $(x', y') = (0, 3)$ y $(x', y') = (0, -3)$.

c) A partir del cambio de sistemas de referencia dado, sin más que sustituir las coordenadas convenientes, tenemos los siguientes elementos geométricos de la elipse en su forma general.

- Centro: $(x, y) = (20, 10)$.
- Vértices: $(x, y) = \left(\frac{116}{5}, \frac{62}{5}\right)$, $(x, y) = \left(\frac{84}{5}, \frac{38}{5}\right)$, $(x, y) = (17, 14)$ y $(x, y) = (23, 6)$.
- Focos: $(x, y) = \left(\frac{91}{5}, \frac{62}{5}\right)$ y $(x, y) = \left(\frac{109}{5}, \frac{38}{5}\right)$.

Para el resto de elementos vamos a emplear el cambio de sistemas de referencia inverso.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 22 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x' &= \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}y - 22 \\ y' &= \tfrac{-3}{5}x + \tfrac{4}{5}y + 4 \end{aligned} \right\}.$$

Y, a partir de aquí, los ejes de simetría de la elipse, en su forma general, son

- $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 22 = 0 \Rightarrow 4x + 3y = 110.$
- $\frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}y + 4 = 0 \Rightarrow 3x - 4y = 20.$

[6] Si queremos que los focos estén el eje de abscisas podemos introducir un segundo cambio de variable. Concretamente, $(x'', y'') = (x', y')$. Así tendríamos la ecuación reducida equivalente $\frac{(x'')^2}{5^2} + \frac{(y'')^2}{4^2} = 1$ y, a partir de ella, también se pueden resolver los apartados *b*) y *c*).