UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Doble Grado CIVIL–ADE

Tercera prueba

27 de mayo de 2020

1. (8) Se considera la ecuación lineal de coeficientes constantes completa

$$x''' + x'' - x' - x = e^{-2t}. \tag{1}$$

   a) (3) Resuelve la ecuación lineal homogénea asociada a (1).

   b) (3) Halla una solución particular de la completa (1).

   c) (2) Resuelve la ecuación lineal completa (1).

En cada apartado deberá indicarse, explícita y justificadamente, el dominio de las soluciones.

Resolución

Antes de comenzar debemos observar que, al ser (1) una ecuación lineal de coeficientes constantes completa con término independiente e^{-2t}, todas las soluciones (tanto de la homogénea asociada como de la propia ecuación) estarán definidas en $\mathbb{R}$.

En efecto, recordemos que los coeficientes de la ecuación representan funciones constantes y que, tanto las funciones constantes como la función e^{-2t}, son funciones continuas en $\mathbb{R}$. Esto nos permite concluir que las soluciones de (1), y también de la homogénea asociada, están definidas en $\mathbb{R}$.

a) La ecuación lineal homogénea asociada a (1) es

$$x''' + x'' - x' - x = 0.$$

Para resolverla, hayamos las raíces del polinomio característico asociado,

$$p(r) = r^3 + r^2 - r - 1.$$

Factorizando,

$$p(r) = r^2(r+1) - (r+1) = (r^2-1)(r+1) = (r+1)(r-1)(r+1) = (r+1)^2(r-1),$$

tenemos que las raíces de $p(r)$ son $r_1 = -1$ doble y $r_2 = 1$ simple. Esto implica que

- por ser $r_1 = -1$ doble, e^{-t} y te^{-t} son dos soluciones (linealmente independientes) de la homogénea;
- por ser $r_1 = 1$ simple, e^t es una solución de la homogénea;

Además, se puede ver que $W(e^{-t}, te^{-t}, e^t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, por lo que son tres soluciones linealmente independientes de la homogénea.[1]

Por tanto, $\{e^{-t}, te^{-t}, e^t\}$ es un sistema fundamental de la ecuación lineal homogénea asociada a (1). Es decir, cualquier solución de la homogénea es de la forma

$$x_h(t) = ae^{-t} + bte^{-t} + ce^t, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

[1] En efecto,

$$W(e^{-t}, te^{-t}, e^t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & te^{-t} & e^t \\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & -(2-t)e^{-t} & e^t \end{vmatrix} = e^{-t}e^{-t}e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ -1 & 1-t & 1 \\ 1 & -2+t & 1 \end{vmatrix} = e^{-t} \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4e^{-t} \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

b) Para hallar una solución particular de (1) podemos aplicar el método de variación de constantes. Sin embargo, este es un método bastante largo. Además, tenemos que el término independiente, e^{-2t}, es ideal para aplicar el método de los coeficientes indeterminados

Así pues, vamos a suponer que existe una solución particular de la forma $x_p(t) = \alpha e^{-2t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, para un valor adecuado de α. Para determinar dicho valor:

$$x_p(t) = \alpha e^{-2t} \Rightarrow x_p'(t) = -2\alpha e^{-2t} \Rightarrow x_p''(t) = 4\alpha e^{-2t} \Rightarrow x_p'''(t) = -8\alpha e^{-2t},$$

y, sustituyendo en (1),

$$-8\alpha e^{-2t} + 4\alpha e^{-2t} - (-2\alpha e^{-2t}) - \alpha e^{-2t} = e^{-2t} \Rightarrow -8\alpha e^{-2t} + 4\alpha e^{-2t} + 2\alpha e^{-2t} - \alpha e^{-2t} = e^{-2t} \Rightarrow$$

$$-3\alpha e^{-2t} = e^{-2t} \Rightarrow -3\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}.$$

Por tanto, una solución particular de (1) es

$$x_p(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t},\ t \in \mathbb{R}.$$

c) Como conocemos una solución particular de (1) y el conjunto de soluciones de la homogénea asociada, para calcular la solución general de (1) basta con tomar

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = ae^{-t} + bte^{-t} + ce^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t},\ t \in \mathbb{R}.$$

2. (8) Se considera la ecuación diferencial

$$\frac{3t^5+t^3x}{x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{6t^4}{x}\,\mathrm{d}t=0. \tag{2}$$

a) (1) ¿Es (2) una ecuación diferencial exacta? Razona tu respuesta.

b) (3) Halla un factor integrante para (2) del tipo $\mu=\mu(t)$.

c) (3) A partir del factor integrante hallado en *b*), resuelve (2).

d) (1) Calcula la expresión implícita de la solución de (2) que satisface la condición inicial $x(5)=3$ (no es necesario indicar explícitamente su dominio).

Resolución

a) Consideremos $P(t,x)=\frac{3t^5+t^3x}{x^2}$ y $Q(t,x)=-\frac{6t^4}{x}$. Como

$$\frac{\partial P(t,x)}{\partial t}=\frac{15t^4+3t^2x}{x^2}\quad\text{y}\quad\frac{\partial Q(t,x)}{\partial x}=\frac{6t^4}{x^2},$$

concluimos que (2) no es una ecuación diferencial exacta.

b) Sea la ecuación

$$\mu(t)\frac{3t^5+t^3x}{x^2}\,\mathrm{d}x-\mu(t)\frac{6t^4}{x}\,\mathrm{d}t=0.$$

Si consideramos $\widetilde{P}(t,x)=\mu(t)\frac{3t^5+t^3x}{x^2}$ y $\widetilde{Q}(t,x)=-\mu(t)\frac{6t^4}{x}$, para que la nueva ecuación sea exacta es necesario y suficiente que $\frac{\partial\widetilde{P}(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial\widetilde{Q}(t,x)}{\partial x}$. Por tanto,

$$\left.\begin{array}{r}\frac{\partial\widetilde{P}(t,x)}{\partial t}=\mu'(t)\frac{3t^5+t^3x}{x^2}+\mu(t)\frac{15t^4+3t^2x}{x^2}\\ \frac{\partial\widetilde{Q}(t,x)}{\partial x}=\mu(t)\frac{6t^4}{x^2}\end{array}\right\}\Rightarrow\mu'(t)\frac{3t^5+t^3x}{x^2}+\mu(t)\frac{15t^4+3t^2x}{x^2}=\mu(t)\frac{6t^4}{x^2}\Rightarrow$$

$$\mu'(t)(3t^5+t^3x)+\mu(t)(15t^4+3t^2x)=\mu(t)6t^4\Rightarrow\mu'(t)(3t^2+x)t^3=\mu(t)6t^4-\mu(t)(15t^4+3t^2x)\Rightarrow$$
$$\mu'(t)(3t^2+x)t^3=-\mu(t)(9t^4+3t^2x)\Rightarrow\mu'(t)(3t^2+x)t^3=-3\mu(t)(3t^2+x)t^2\Rightarrow t\mu'(t)=-3\mu(t)\Rightarrow$$
$$t\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}=-3\mu\Rightarrow\int\frac{1}{\mu}\,\mathrm{d}\mu=-3\int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\Rightarrow\ln(\mu)=-3\ln(t)=\ln(t^{-1})\Rightarrow\mu(t)=t^{-3}=\frac{1}{t^3}.$$

Por cierto, como nos han pedido un factor integrante cualquiera, del tipo $\mu=\mu(t)$, no nos hemos preocupado por tomar valores absolutos en las dos integrales anteriores.

Concluimos que $\mu(t)=\frac{1}{t^3}$ es un factor integrante de (2).

c) A partir de lo hecho en el apartado *b*), sabemos que la ecuación

$$\left(\frac{1}{t^3}\frac{3t^5+t^3x}{x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{t^3}\frac{6t^4}{x}\,\mathrm{d}t=0\ \Rightarrow\right)\ \frac{3t^2+x}{x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{6t}{x}\,\mathrm{d}t=0$$

es exacta.

Por tanto, si tomamos $\widetilde{P}(t,x)=\frac{3t^2+x}{x^2}$ y $\widetilde{Q}(t,x)=-\frac{6t}{x}$, tenemos que existe una función $F(t,x)$ tal que $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}=\widetilde{P}(t,x)$ y $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}=\widetilde{Q}(t,x)$.

Hallemos dicha función $F(t,x)$.

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}=\frac{3t^2+x}{x^2}\Rightarrow F(t,x)=\int\frac{3t^2+x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3t^2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\Rightarrow$$

$$F(t,x)=-\frac{3t^2}{x}+\ln(|x|)+H(t)\Rightarrow\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}=-\frac{6t}{x}+H'(t)=-\frac{6t}{x}\Rightarrow H'(t)=0\Rightarrow H(t)=0.$$

Por tanto, $F(t,x)=\ln(|x|)-\frac{3t^2}{x}$. En consecuencia, la expresión

$$\ln(|x(t)|)-\frac{3t^2}{x(t)}=C,$$

con $C\in\mathbb{R}$, define implícitamente al conjunto de soluciones de (2).

d) Sustituyendo $x(5) = 3$ en la última expresión del apartado c),

$$\ln(|3|) - \frac{3 \cdot 5^2}{3} = C \Rightarrow C = 25 - \ln 3.$$

Por tanto,

$$\ln(|x(t)|) - \frac{3t^2}{x(t)} = 25 - \ln 3$$

es la expresión implícita de la solución de (2) que satisface la condición inicial $x(5) = 3$.

3. (7) Se considera la ecuación diferencial homogénea

$$x' = \frac{4x^2 + 3t^2}{8tx}. \tag{3}$$

a) (5) Resuelve (3).

b) (2) Calcula la solución de (3) que satisface la condición inicial $x(4) = -3$, indicando explícitamente su dominio.

Resolución

a) Es claro que $f(t,x) = \frac{4x^2+3t^2}{8tx}$ es una función racional cuyo numerador y denominador son combinaciones de monomios de segundo grado. Por tanto, $f(t,x)$ es una función homogénea. En efecto,

$$f(t,x) = \frac{4x^2 + 3t^2}{8tx} = \frac{\frac{4x^2+3t^2}{t^2}}{\frac{8tx}{t^2}} = \frac{4(\frac{x}{t})^2 + 3}{8\frac{x}{t}}.$$

Para resolver (3), consideramos el cambio $u(t) = \frac{x(t)}{t}$, de donde

$$u = \frac{x}{t} \Rightarrow x = ut \Rightarrow x' = u't + u \Rightarrow u't + u = \frac{4u^2+3}{8u}.$$

La ecuación obtenida es de variables separadas, por lo que se puede resolver.[2]

$$u't + u = \frac{4u^2+3}{8u} \Rightarrow u't = \frac{4u^2+3}{8u} - u = \frac{-4u^2+3}{8u} = -\frac{4u^2-3}{8u} \Rightarrow \frac{8u}{4u^2-3}u' = -\frac{1}{t} \Rightarrow$$

$$\int \frac{8u}{4u^2-3}\,\mathrm{d}u = -\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \ln|4u^2-3| = -\ln|t| + C,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln|4u^2-3| + \ln|t| = C,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\ln|(4u^2-3)t| = C,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow |(4u^2-3)t| = e^C = K,\ K \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (4u^2-3)t = K,\ K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Antes de continuar, comprobemos si $K = 0$ proporciona soluciones.[3]

$$(4u^2-3)t = 0 \Rightarrow 4u^2 - 3 = 0 \Rightarrow u^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow u = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{x}{t} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}t \Rightarrow$$

$$x_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \forall t < 0; \quad x_2(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \forall t > 0; \quad x_3(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \forall t < 0; \quad x_4(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \forall t > 0.$$

Por sustitución directa, podemos ver que estas cuatro funciones son soluciones de (3).

Seguimos viendo qué ocurre para $K \neq 0$.

$$(4u^2-3)t = K,\ K \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow \left(4\left(\frac{x}{t}\right)^2 - 3\right)t = 4\frac{x^2}{t} - 3t = K,\ K \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow$$

$$4x^2 - 3t^2 = Kt,\ K \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow x^2 = \frac{Kt+3t^2}{4},\ K \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow x(t) = \pm\frac{\sqrt{Kt+3t^2}}{2},\ K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Las expresiones halladas estarán definidas en intervalos abiertos I tales que

- $0 \notin I$, ya que (3) no está definida en $t = 0$;
- $Kt + 3t^2 > 0$, ya que la raíz cuadrada ha de estar bien definida.

En resumen, las soluciones de (3) son

- $x_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \forall t < 0;$
- $x_2(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \forall t > 0;$
- $x_3(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \forall t < 0;$
- $x_4(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \forall t > 0;$
- $x_{5,K}(t) = \frac{\sqrt{Kt+3t^2}}{2},\ \forall t \in I,\ K \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$
- $x_{6,K}(t) = -\frac{\sqrt{Kt+3t^2}}{2},\ \forall t \in I,\ K \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$

siendo $I \subseteq \mathbb{R}$ un subintervalo abierto adecuado.

[2] Conviene observar que $u \neq 0$. Esto es así ya que, en (3), x aparece en el denominador y, por tanto, $x \neq 0$. Además, debemos tener cuidado con $4u^2 - 3 = 0$, caso que estudiaremos en un momento.

[3] Por cierto, esta situación corresponde al caso $4u^2 - 3 = 0$.

b) A partir de lo hecho en el apartado *a*), la solución de (3) que satisface la condición inicial $x(4) = -3$ ha de ser del tipo $x_{6,K}(t)$.[4] Calculemos, pues, el valor de K.

$$x(4) = -3 \Rightarrow -\frac{\sqrt{4K + 3 \cdot 4^2}}{2} = -\sqrt{K + 12} = -3 \Rightarrow K + 12 = 9 \Leftrightarrow K = -3.$$

Por tanto, la solución de (3) viene dada por

$$x(t) = -\frac{\sqrt{3t^2 - 3t}}{2}, \ \forall t \in I,$$

donde $I \subseteq \mathbb{R}$ un subintervalo abierto adecuado.

Para determinar I, debemos tener en cuenta que

- $0 \notin I$;
- $4 \in I$;
- $h(t) = 3t^2 - 3t > 0, \ \forall t \in I.$

Y, puesto que $3t^2 - 3t = 3t(t - 1)$, es claro que $h(t)$ es positiva en $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ y negativa en $]0, 1[$.

A la luz de todo lo hecho en este apartado, la solución de (3) es

$$x(t) = -\frac{\sqrt{3t^2 - 3t}}{2}, \ \forall t \in]1, +\infty[.$$

[4] Ya que $x(4) = -3 < 0$, es claro que la solución buscada no puede ser del tipo $x_1(t)$, $x_2(t)$ o $x_{5,K}(t)$, al ser estas funciones positivas. Además, sin más que sustituir, se ve que tampoco pueden ser $x_3(t)$ o $x_4(t)$, al no cumplir la condición inicial dada.

4. (5) Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = x(x-4)^2(x-7)(10-x), \\ x(9) = 6. \end{cases} \tag{4}$$

a) (1.5) Justifica por qué el problema (4) tiene una única solución.

b) (1) Determina las soluciones constantes de la ecuación de (4).

c) (1.5) Siendo $x(t)$ la única solución del problema (4), ¿$x(t)$ es creciente o decreciente? Razona tu respuesta.

d) (1) Siendo $x(t)$ la única solución del problema (4), y dando por hecho que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, ¿es posible que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 3$? Razona tu respuesta.

Resolución

a) La ecuación diferencial (4) es una ecuación diferencial de primer orden, $x' = f(t,x)$, con

$$f(t,x) = x(x-4)^2(x-7)(10-x), \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Por ser $f(t,x)$ una función polinómica en las variables t y x, es claro que f es continua y, además, admite derivada parcial con respecto a x también continua. Como la condición inicial dada es un punto de $\mathbb{R}^2$ (esto es, $(9,6) \in \mathbb{R}^2$), podemos asegurar que el problema de valores iniciales (4) admite una única solución.

En realidad, para cualquier condición inicial $x(t_0) = x_0$ dada, el problema de Cauchy correspondiente tendría una única solución.

b) Si $x(t) = c$, $\forall t \in \mathbb{R}$, es una solución constante de la ecuación diferencial de (4) entonces, ya que $x'(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$0 = c(c-4)^2(c-7)(10-c) \Rightarrow c = 0, \ 4, \ 7, \ 10.$$

Por tanto, las soluciones constantes buscadas son

- $x_1(t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$;
- $x_2(t) = 4, \ \forall t \in \mathbb{R}$;
- $x_3(t) = 7, \ \forall t \in \mathbb{R}$;
- $x_4(t) = 10, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

c) Sabemos que

- $6 \in]4,7[$;
- $x_2(t) = 4, \ \forall t \in \mathbb{R}$, es una solución constante de (4);
- $x_3(t) = 7, \ \forall t \in \mathbb{R}$, es una solución constante de (4).

Entonces, por la unicidad de solución probada en el apartado *a*), deducimos que la única solución de (4) solo puede tomar valores entre 4 y 7, esto es,

$$4 < x(t) < 7, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

A partir de aquí es claro que

- $x(t) > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$;
- $(x(t)-4)^2 > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$;
- $x(t) - 7 < 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$;
- $10 - x(t) > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Y, por tanto, $x'(t) < 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, al ser $x'(t)$ igual al producto de tres factores positivos y uno negativo. En conclusión, la única solución de (4) es una función decreciente (en realidad, estrictamente decreciente).

d) Como $x(9) = 6$ y $x(t)$ es decreciente, tenemos que $\lim_{t\to+\infty} x(t) \leq 6$. Sin embargo, por *c*) tenemos que $4 < x(t) < 7$, $\forall t \in \mathbb{R}$, por lo que es imposible la igualdad $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 3$.

5. (2) Sean $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^1(I)$, para cierto intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, tales que su wronskiano es idénticamente nulo en I. ¿Son $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ funciones linealmente dependientes? Razona tu respuesta.

Resolución

Consideremos las funciones[5]

- $\phi_1(t) = t^2, \ \forall t \in \mathbb{R};$
- $\phi_2(t) = t|t|, \ \forall t \in \mathbb{R}.$

Sabemos que estas dos funciones son derivables, con derivada continua, en $\mathbb{R}$. Esto es, ambas funciones pertenecen a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Por otra parte, ninguna de las dos funciones es un múltiplo de la otra. Por tanto, $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ son linealmente independientes.

Sin embargo, su wronskiano es

$$W(\phi_1, \phi_2)(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{vmatrix} = 2t^2|t| - 2t^2|t| = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por supuesto, hay ejemplos de pares funciones cuyo wronskiano es idénticamente nulo y son linealmente dependientes. Por ejemplo,

- $\phi_1(t) = t, \ \forall t \in \mathbb{R};$
- $\phi_2(t) = 2t, \ \forall t \in \mathbb{R}.$

Es claro que ambas funciones pertenecen a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Además, son linealmente dependientes pues $\phi_2 = 2\phi_1$. Por último, su wronskiano es

$$W(\phi_1, \phi_2)(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 2t \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2t - 2t = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la respuesta a la pregunta planteada es que, en general, $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ no tiene que ser funciones linealmente dependientes.

[5] Este primer ejemplo es, prácticamente, el mismo que se vio en la clase del 20 de mayo de 2020.