



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Departamento de
Matemática Aplicada

Doble Grado Ing. Civil–ADE

Matemática Aplicada

Convocatoria Ordinaria

Primer Parcial

18 de junio de 2021

Apellidos, Nombre:

DNI o Pasaporte:

Responde, justificadamente, a las cuestiones planteadas en cada uno de las siguientes ejercicios.

1. (20) En el espacio vectorial real usual $\mathbb{R}^4$, se consideran los conjuntos

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$$

y

$$V = \{(a + b, a - b, -a + b, -a - b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- a) (5) ¿Por qué son U y V subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$?
 - b) (5) Halla una base de U y otra de V .
 - c) (3) Expresa U mediante ecuaciones paramétricas.
 - d) (4) Expresa V mediante ecuaciones cartesianas.
 - e) (3) ¿Son U y V subespacios vectoriales complementarios en $\mathbb{R}^4$?
2. (15) Entre los espacios vectoriales reales euclídeos usuales $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$, se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}.$$

- a) (3) ¿Por qué es f una aplicación lineal?
- b) (6) Halla bases del núcleo y la imagen de f .
- c) (2) ¿Qué tipo de aplicación lineal es f ?
- d) (4) Dadas las bases ortonormales

$$B_4 = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \right) \right\},$$

$$B_3 = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}$$

de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, halla la expresión matricial de f en dichas bases.

3. (15) En el espacio vectorial real usual $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ (matrices cuadradas de orden 2×2), se considera

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) (4.5) ¿Para qué valores de a y b se verifica que A admite a $(2, -1)$ como vector propio?
- b) (4.5) ¿Para qué valores de a y b se verifica que A es diagonalizable por semejanza ortogonal?
- c) (6) Para el caso $a = 0$ y $b = 2$, diagonaliza A por semejanza ortogonal.

Importante: si te examinas de más de un parcial solo responderás

- a los apartados c), d) y e) del ejercicio 1;
- a los apartados b) y d) del ejercicio 2;
- y al ejercicio 3 completo.

PARCIAL 1

P1 1

$$4) U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \}$$

$$V = \{ (a+b, a-b, -a+b, -a-b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$a) (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \Rightarrow x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = x_1 + x_2 - x_3$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = c \\ x_4 = a + b - c \end{array} \right\} \Rightarrow U = \{ (a, b, c, a+b-c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

$$(*) (a_1, b_1, c_1, a_1 + b_1 - c_1), (a_2, b_2, c_2, a_2 + b_2 - c_2) \in U, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(*1) (a_1, b_1, c_1, a_1 + b_1 - c_1) + (a_2, b_2, c_2, a_2 + b_2 - c_2) =$$

$$(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) - (c_1 + c_2))$$

$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) - (c_1 + c_2) - [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) - (c_1 + c_2)] = 0$$

$$\Rightarrow (a_1, b_1, c_1, a_1 + b_1 - c_1) + (a_2, b_2, c_2, a_2 + b_2 - c_2) \in U.$$

$$(*2) \lambda (a, b, c, a + b - c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda(a + b - c))$$

$$\lambda a + \lambda b - \lambda c - \lambda(a + b - c) = 0 \Rightarrow \lambda(a, b, c, a + b - c) \in U.$$

(*1), (*2) $\Rightarrow U$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

$$(*) (a_1 + b_1, a_1 - b_1, -a_1 + b_1, -a_1 - b_1), (a_2 + b_2, a_2 - b_2, -a_2 + b_2, -a_2 - b_2) \in V,$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$(*3) (a_1 + b_1, a_1 - b_1, -a_1 + b_1, -a_1 - b_1) + (a_2 + b_2, a_2 - b_2, -a_2 + b_2, -a_2 - b_2) =$$

$$((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2), -(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), -(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2))$$

Tomando $a_3 = a_1 + a_2$, $b_3 = b_1 + b_2$, tenemos

$$(a_3 + b_3, a_3 - b_3, -a_3 + b_3, -a_3 - b_3) \in V, \text{ pues } a_3, b_3 \in \mathbb{R}.$$

$$(*) \lambda(a+b, a-b, -a+b, -a-b) = (\lambda(a+b), \lambda(a-b), \lambda(-a+b), \lambda(-a-b)) = (\lambda a + \lambda b, \lambda a - \lambda b, -\lambda a + \lambda b, -\lambda a - \lambda b).$$

Tomando $\lambda a = a'$, $\lambda b = b'$, tenemos

$$(a' + b', a' - b', -a' + b', -a' - b') \in V, \text{ pues } a', b' \in \mathbb{R}.$$

1*3), (*) $\Rightarrow V$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

b) $U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \}$

como vimos en a):

$$U = \{ (a, b, c, a+b-c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

$$(a, b, c, a+b-c) = a(1, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, 1) + c(0, 0, 1, -1) \quad (*)$$

(*) $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1) \in U$ (pues satisfacen la ecuación cartesiana de U)

(*) $\{ (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1) \}$ generan U , como se ~~ha visto~~ puede deducir de (*).

(*) Veamos que $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1)$ son linealmente independientes.

$$\alpha(1,0,0,1) + \beta(0,1,0,1) + \gamma(0,0,1,-1) = (0,0,0,0) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \text{ como única posibilidad} \Rightarrow \underline{\underline{\text{independencia}}}$$

$(\ast 1), (\ast 2), (\ast 3) \Rightarrow \{(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,-1)\}$ es una base de U .

$$V = \{(a+b, a-b, -a+b, -a-b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$(a+b, a-b, -a+b, -a-b) = a(1,1,-1,-1) + b(1,-1,1,-1) \quad (\ast\ast)$$

$(\ast 4) \quad (1,1,-1,-1), (1,-1,1,-1) \in V$ (pues el primero se obtiene con $a=1, b=0$, y el segundo con $a=0, b=1$).

$(\ast 5) \quad \{(1,1,-1,-1), (1,-1,1,-1)\}$ generan V , como se deduce de $(\ast\ast)$.

$(\ast 6) \quad (1,1,-1,-1), (1,-1,1,-1)$ son linealmente independientes, pues ninguno de los dos es múltiplo del otro.

$(\ast 4), (\ast 5), (\ast 6) \Rightarrow \{(1,1,-1,-1), (1,-1,1,-1)\}$ es una base de V .

c) $U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \}$

como vimos en a):

$$U = \{ (a, b, c, a+b-c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

Por tanto, U viene dado por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_2 = b, \\ x_3 = c, \\ x_4 = a+b-c, \end{cases} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

d) $V = \{ (a+b, a-b, -a+b, -a-b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

$$\begin{cases} x_1 = a+b \\ x_2 = a-b \\ x_3 = -a+b \\ x_4 = -a-b \end{cases} \quad \text{Parámetros de } V$$

$$\begin{cases} a+b = x_1 \\ a-b = x_2 \\ -a+b = x_3 \\ -a-b = x_4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \\ -1 & -1 & x_4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{4^a F - 1^a F \\ 3^a F + 2^a F}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & x_4 + x_4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{2^a F - 1^a F} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & x_1 + x_4 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Cartesianas de } V$$

e) $\left. \begin{array}{l} \dim U = 3 \\ \dim V = 2 \end{array} \right\} 3+2=5 > 4 \Rightarrow U \text{ y } V \text{ no pueden ser complementarios en } \mathbb{R}^4$

Comprobemos que $U \cap V \neq \{0\}$.

$$U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \}$$

$$V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0 \}$$

Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \cap V$, entonces

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{2^a F - 1^a F}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{3^a F + 2^a F} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2} 3^a F}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a F + 3^a F \\ 2^a F - 3^a F \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{1^a F + 2^a F}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{array} \right\}$$

$$U \cap V = \{ (a, -a, a, -a) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R} \} \neq \{0\}$$

2)

$$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

a)

$$(*) f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_3 - y_4 \\ y_1 - 2y_2 \\ 2y_1 - 4y_2 - 2y_3 + 2y_4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_3 - x_4 + y_3 - y_4 \\ x_1 - 2x_2 + y_1 - 2y_2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 2y_1 - 4y_2 - 2y_3 + 2y_4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (x_3 + y_3) - (x_4 + y_4) \\ (x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) \\ 2(x_1 + y_1) - 4(x_2 + y_2) - 2(x_3 + y_3) + 2(x_4 + y_4) \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{pmatrix}$$

$$(**) \lambda f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_3 - x_4) \\ \lambda(x_1 - 2x_2) \\ \lambda(2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda x_3 - \lambda x_4 \\ \lambda x_1 - 2(\lambda x_2) \\ 2(\lambda x_1) - 4(\lambda x_2) - 2(\lambda x_3) + 2(\lambda x_4) \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \lambda x_4 \end{pmatrix}$$

(*) , (**) $\Rightarrow f$ es una aplicación lineal

b)

$$N(f) = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0) \}$$

$$\begin{cases} x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_4 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow 2(2x_2) - 4x_2 - 2x_4 + 2x_4 = 0 \quad \forall x_2, x_4$$

$$\Rightarrow N(f) = \{ (2a, a, b, b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$(2a, a, b, b) = a(2, 1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 1) \Rightarrow$$

$$\{ (2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \} \text{ genera } N(f)$$

$(2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)$ están en $N(f)$ y son linealmente independientes. Por tanto, $\{ (2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \}$ es una base de $N(f)$.

$$\text{Im}(f) = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a, b, c) \text{ para algún } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \}$$

$$\begin{cases} x_3 - x_4 = a \\ x_1 - 2x_2 = b \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = c \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & a \\ 1 & -2 & 0 & 0 & b \\ 2 & -4 & -2 & 2 & c \end{array} \right) \xrightarrow{1^a F \leftrightarrow 2^a F}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & -4 & -2 & 2 & c \end{array} \right) \xrightarrow{3^a F - 2 \cdot 1^a F} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & -2 & 2 & c - 2b \end{array} \right) \xrightarrow{3^a F + 2 \cdot 2^a F}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-2b+2a \end{array} \right)$$

Sistema compatible si, y solo si, $2a-2b+c=0$.

Por tanto, $\text{Im}(f) = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / 2a-2b+c=0 \}$

$$2a-2b+c=0 \Rightarrow c = -2a+2b \Rightarrow$$

$$\text{Im}(f) = \{ (a, b, -2a+2b) \in \mathbb{R}^3 / a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$(a, b, -2a+2b) = a(1, 0, -2) + b(0, 1, 2) \Rightarrow$$

$\{ (1, 0, -2), (0, 1, 2) \}$ genera $\text{Im}(f)$.

$(1, 0, -2), (0, 1, 2)$ son linealmente independientes.

$$\begin{array}{c} (1, 0, -2) \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 1 \\ 0 = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = x_4 + 1 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$x_2 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_3 = 1$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (1, 0, -2) \in \text{Im}(f)$$

$$\begin{array}{c} (0, 1, 2) \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2x_2 + 1 \\ x_3 = x_4 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$x_2 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (0, 1, 2) \in \text{Im}(f).$$

P1 9

Por tanto, $\{(1,0,-2), (0,1,2)\}$ es una base de $\text{Im}(f)$.

c) $N(f) \neq \{0\} \Rightarrow f$ no es inyectiva
 $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ no es sobreyectiva

f es una aplicación lineal sin más.

d)

$$M(f, c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M(f, B_4, B_3) = M(c, B_3) \cdot M(f, c) \cdot M(B_4, c)$$

$$M(B_4, c) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$M(c, B_3) = [M(B_3, c)]^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2/3 & 2/3 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & 0 & -6 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{array} \right)$$

No era necesario realizar estos cálculos. Al ser B_3 ortonormal, sabemos que $M(B_3, C)$ es ortogonal y, por tanto, que $M(C, B_3) = [M(B_3, C)]^T = [M(B_3, C)]^T$.

Tenemos que

$$M(f, B_1, B_3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 & 12 & -4 & 12 \\ 5 & -7 & 5 & -3 \\ -2 & 12 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$$

PI 11

$$a) \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a-2 = 2\lambda \\ 2b-3 = -\lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{2a-2}{2} \\ \lambda &= -2b+3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{2a-2}{2} &= -2b+3 \Leftrightarrow 2a-2 = -4b+6 \\ &\Leftrightarrow 2a+4b=8 \Leftrightarrow a+2b=4 \end{aligned}$$

A admite a $(2, -1)$ como vector propio siempre que $a+2b=4$. En tal caso $\lambda = a-1$.

b) Sabemos que todas las matrices simétricas son diagonalizables por semejanza ortogonal. Pero, si A es diagonalizable por semejanza ortogonal entonces $A = Q D Q^T$ con D diagonal y $Q^T = Q^{-1}$. A partir de aquí,

$$A^T = (Q D Q^T)^T = (Q^T)^T D^T Q^T = Q D Q^T = A,$$

luego A es simétrica.

Conclusión: A es diagonalizable por semejanza ortogonal si, y sólo si, A es simétrica.

P1 / 12

$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$ es simétrica si, y solo si, $b=2$.

Por tanto, A es diagonalizable por semejanza ortogonal si, y solo si, $b=2$ y $a \in \mathbb{R}$.

e)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$$\underline{\lambda = -1} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda = 4} \quad \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}^T \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Departamento de
Matemática Aplicada

Doble Grado Ing. Civil–ADE

Matemática Aplicada

Convocatoria Ordinaria

Segundo Parcial

18 de junio de 2021

Apellidos, Nombre:

DNI o Pasaporte:

Responde, justificadamente, a las cuestiones planteadas en cada uno de las siguientes ejercicios.

1. (20) En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ usual se considera el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \{e_1, e_2, e_3\}\}$.

Por otra parte, se consideran los puntos $O' = (0, 1, 0)_{\mathcal{R}}$, $P = (1, 2, 0)_{\mathcal{R}}$, $Q = (1, 1, 1)_{\mathcal{R}}$ y $R = (0, 2, 1)_{\mathcal{R}}$.

- (5) ¿Por qué es $\mathcal{R}' = \{O'; \{\overrightarrow{O'P}, \overrightarrow{O'Q}, \overrightarrow{O'R}\}\}$ un sistema de referencia de $\mathbb{R}^3$?
- (5) Halla la expresión matricial del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$.
- (5) Halla la expresión matricial del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.
- (5) Siendo r la recta dada por las ecuaciones $x - y + z = 1$, $x - y = 0$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}$, halla las ecuaciones paramétricas de r en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$.

2. (20) En el plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ usual, se considera la aplicación afín

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{-4}{5} \end{pmatrix}.$$

- (2) ¿Por qué es T un movimiento rígido?
- (5) Expresa el conjunto de puntos fijos $F(T)$ mediante ecuaciones paramétricas.
- (3) Expresa la variedad invariante $I(T)$ mediante ecuaciones cartesianas.
- (5) Clasifica el movimiento rígido T .
- (5) Siendo s la recta dada por la ecuación $2x + y = 3$, ¿es s una variedad invariante por T ?

3. (10) En el plano afín euclídeo usual $\mathbb{R}^2$ se considera la cónica C dada por la expresión

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0.$$

- (4) Mediante un movimiento rígido, que se ha de indicar de manera explícita, halla la ecuación reducida de la cónica C .
- (2) ¿Qué cónica es C ?
- (4) Halla los elementos geométricos de la cónica C .

Importante: si te examinas de más de un parcial solo responderás

- a los apartados $b)$ y $d)$ del ejercicio 1;
- a los apartados $b)$, $d)$ y $e)$ del ejercicio 2;
- y al ejercicio 3 completo.

PARCIAL 2

P2 1

1) $\mathcal{R} = \{0; e_1, e_2, e_3\}$

$$O' = (0, 1, 0)_{\mathcal{R}}, P = (1, 2, 0)_{\mathcal{R}}, Q = (1, 1, 1)_{\mathcal{R}}, R = (0, 2, 1)_{\mathcal{R}}$$

a) $\vec{O'P} = (1, 1, 0); \vec{O'Q} = (1, 0, 1); \vec{O'R} = (0, 1, 1)$

$$a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, 1) = (x, y, z)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 2 & z+y-x \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & -1 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & z+y-x \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema compatible determinado.

Esto implica que:

* $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$

* $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$ son linealmente independientes.

Por tanto, $\{\vec{O'P}, \vec{O'Q}, \vec{O'R}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Luego $\mathcal{R}'$ es un sistema de referencia de $\mathbb{R}^3$.

b)

$$A = (x, y, z)_R \Rightarrow \vec{OA} = (x, y, z)_B$$

$$A = (x', y', z')_{R'} \Rightarrow \vec{O'A} = (x', y', z')_B$$

Henos considerado $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B' = \{\vec{OP}, \vec{OQ}, \vec{OR}\}$.

$$\vec{O'A} = \vec{O'O} + \vec{OA} = -\vec{OO'} + \vec{OA} \Rightarrow$$

$$(x', y', z')_{B'} = (0, -1, 0)_B + (x, y, z)_B = (x, y-1, z)_B$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OP} = (1, 1, 0) \\ \vec{OQ} = (1, 0, 1) \\ \vec{OR} = (0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M(B', B) \text{ pues:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)_{B'} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)_B; \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)_{B'} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right)_B;$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)_{B'} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right)_B$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x' \\ 1 & 0 & 1 & y' \\ 0 & 1 & 1 & z' \end{array} \right)_{B'} = \left(\begin{array}{c} x \\ y-1 \\ z \end{array} \right)_B \Rightarrow \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right)_R = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x' \\ 1 & 0 & 1 & y' \\ 0 & 1 & 1 & z' \end{array} \right)_{R'} + \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)_R$$

$$c) \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right)_R = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x' \\ 1 & 0 & 1 & y' \\ 0 & 1 & 1 & z' \end{array} \right)_{R'} + \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)_R \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x' \\ 1 & 0 & 1 & y' \\ 0 & 1 & 1 & z' \end{array} \right)_{R'} = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right)_R + \left(\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right)_R$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array} \right)_{R'} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right)_R + \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)_R$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & +1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

d) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{R'} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' + z' + 1 \\ z = y' + z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x' + y') - (x' + z' + 1) + (y' + z') = 1 \\ (x' + y') - (x' + z' + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y' - 1 = 1 \\ y' - z' - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 1 \\ y' - z' = 1 \end{cases}$$

Cartesianas

$$\left. \begin{array}{l} y' = 1 \\ y' - z' = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z' = y' - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = a \\ y' = 1 \\ z' = 0 \end{array} \right., a \in \mathbb{R}$$

Paramétricas

2)

P2 5

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$$

a) Como T está expresada en coordenadas, se puede entender que la matriz asociada está expresada en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Como

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos que la matriz es ortogonal y, por tanto, T representa un movimiento rígido.

b)

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y + 2 = 0 \\ 4x - 8y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y + 1 \end{cases} \Rightarrow \text{El conjunto de puntos fijos de } T \text{ viene dado por las ecuaciones paramétricas}$$

$$\begin{cases} x = 2a + 1, \\ y = a, \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}.$$

c) Puntos fijos: $\begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Variedad invariante: $\begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/25 & -40/25 \\ -40/25 & 80/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -8/5 \\ -8/5 & 16/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20/25 \\ 40/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4/5 & -8/5 \\ -8/5 & 16/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ 8/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 8y - 4 = 0 \\ -8x + 16y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow x - 2y = 1 \Rightarrow \text{Cartesiana de la variedad invariante de } I(T).$$

d) $\begin{vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow T$ es un movimiento rígido inverso.

$$F(T) = \{ (2a+1, a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R} \}$$

T es la simetría en $\mathbb{R}^2$ con respecto a la recta dada por $F(T)$.

e) $2x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 2x$

$$T \begin{pmatrix} x \\ 3-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 3-2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5}x + \frac{12}{5} - \frac{8}{5}x + \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5}x - \frac{9}{5} + \frac{6}{5}x - \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + \frac{14}{5} \\ 2x - \frac{13}{5} \end{pmatrix}$$

$$2x - \frac{13}{5} \stackrel{?}{=} 3 - 2 \left(-x + \frac{14}{5} \right) \quad 3 + 2x - \frac{28}{5} = 2x - \frac{13}{5} \Rightarrow$$

Las imágenes de los puntos de la recta s también pertenecen a la recta s . Por tanto, s es invariante por T .

(*) Alternativa

$$2 \left(-x + \frac{14}{5} \right) + \left(2x - \frac{13}{5} \right) = -2x + \frac{28}{5} + 2x - \frac{13}{5} = 3$$

$\Rightarrow$ las imágenes de los puntos de s pertenecen a s .

3) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ (c)

a)

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-2 \ 2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 7 = 0$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ya es diagonal.

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y - 7 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$$

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 1 \end{cases} \Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = 9 \Rightarrow \left(\frac{x'}{3}\right)^2 + \left(\frac{y'}{3}\right)^2 = 1$$

Traslación

Forma reducida

b) (c) es una circunferencia.

c) Centro: (0,0) $\rightarrow$ (1,-1)
 "Vértices": $(\pm 3, 0), (0, \pm 3)$ $\rightarrow$ (4,-1), (2,-1), (1,2), (1,-4)
 "Focos": (0,0) $\rightarrow$ (1,-1)
 "Ejes de simetría": $\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$ $\rightarrow$ $\begin{matrix} x'=-1 \\ y'=1 \end{matrix}$

En realidad:

- Todos los puntos de la circunferencia serían "vértices".
- Solo hay un foco que, además, coincide con el centro.
- Todas las rectas que pasan por $(-1, 1)$ son ejes de simetría.



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Departamento de
Matemática Aplicada

Doble Grado Ing. Civil–ADE

Matemática Aplicada

Convocatoria Ordinaria

Tercer Parcial

18 de junio de 2021

Apellidos, Nombre:

DNI o Pasaporte:

Responde, justificadamente, a las cuestiones planteadas en cada uno de las siguientes ejercicios.

1. (15) Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} (tx + x^2) dt - t^2 dx = 0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

- a) (5) ¿Para qué pares $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ se puede afirmar que (1) admite solución única?
b) (10) Resuelve (1) para $(t_0, x_0) = (1, 2)$ (indicando explícitamente el dominio de las solución).

2. (10) Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} (te^{tx(t)} - 2x(t)) dx + (2 + x(t)e^{tx(t)}) dt = 0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2)$$

- a) (4) ¿Por qué admite (2) solución única para, al menos, cualquier par $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $t_0 x_0 < 0$?
b) (6) La ecuación diferencial de (2), ¿es exacta? En caso afirmativo, resuélvela (indicando implícitamente el dominio de las soluciones).

3. (25) Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = f(t), \\ x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0. \end{cases} \quad (3)$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

- a) (5) ¿Por qué admite (3) solución única para cualquier terna $(t_0, x_0, x'_0) \in \mathbb{R}^3$?
b) (5) ¿Por qué la única solución de (3) admite a $\mathbb{R}$ como intervalo maximal de definición?
c) (5) Halla $f(t)$ para que $x(t) = e^t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, sea una solución de la ecuación diferencial de (3).
d) (7) Resuelve la ecuación diferencial de (3) para la función $f(t)$ determinada anteriormente (indicando explícitamente los dominios de las soluciones).
e) (3) Resuelve (3) para la función $f(t)$ determinada anteriormente y la terna $(t_0, x_0, x'_0) = (1, 0, 0)$ (indicando explícitamente el dominio de la solución).

Importante: si te examinas de más de un parcial solo responderás

- al apartado b) del ejercicio 1;
- al ejercicio 2 completo;
- y a los apartados c), d) y e del ejercicio 3.

$$1) \begin{cases} (tx+x^2) dt - t^2 dx = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$a) \frac{dx}{dt} = \frac{tx+x^2}{t^2} \Rightarrow t_0 \neq 0$$

$$b) x' = \frac{tx+x^2}{t^2} = \left(\frac{x}{t}\right) + \left(\frac{x}{t}\right)^2 \quad \text{Homog\`eneas}$$

$$u = \frac{x}{t} \Rightarrow x = tu \Rightarrow x' = u + tu'$$

$$u + tu' = u + u^2 \Rightarrow tu' = u^2$$

$$u=0 \Rightarrow \frac{x}{t}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \begin{cases} x(t)=0, \forall t>0, \\ 0 \\ x(t)=0, \forall t<0. \end{cases}$$

$$u \neq 0 \Rightarrow \int \frac{1}{u^2} du = \int \frac{1}{t} dt \Rightarrow \frac{-1}{u} = \ln|t| + C \Rightarrow$$

$$u = \frac{1}{C - \ln|t|}, \quad t \in I, \quad C \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{C - \ln|t|}, \quad t \in I, \quad C \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{t}{C - \ln|t|}, \quad t \in I, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$X(1) = \frac{1}{C - \ln 1} = \frac{1}{C} = 2 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{t}{\frac{1}{2} - \ln|t|} = \frac{2t}{1 - 2\ln|t|}, \quad \forall t \in ?$$

$$1 - 2\ln|t| = 0 \Leftrightarrow \ln|t| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |t| = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt{e} \text{ o } t = -\sqrt{e}$$

Possible domains: $] -\infty, -\sqrt{e}[$, $] -\sqrt{e}, 0[$, $] 0, \sqrt{e}[$, $] \sqrt{e}, +\infty[$

$$t \in] 0, \sqrt{e}[$$

Conclusion:

$$x(t) = \frac{2t}{1 - 2\ln t}, \quad \forall t \in] 0, \sqrt{e}[.$$

$$2) \begin{cases} (te^{tx(t)} - 2x(t))dx + (2 + xe^{tx(t)})dt = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$a) x' = - \frac{2 + xe^{tx}}{te^{tx} - 2x}$$

$$t_0 x_0 < 0 \Rightarrow \begin{cases} t_0 > 0, x_0 < 0 \\ t_0 < 0, x_0 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t_0 > 0, x_0 < 0 &\Rightarrow t_0 e^{t_0 x_0} - 2x_0 > 0 \\ t_0 < 0, x_0 > 0 &\Rightarrow t_0 e^{t_0 x_0} - 2x_0 < 0 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} t_0 > 0, x_0 < 0 \\ t_0 < 0, x_0 > 0 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow t_0 e^{t_0 x_0} - 2x_0 \neq 0$$

$$b) \underbrace{(te^{tx} - 2x)}_M dx + \underbrace{(2 + xe^{tx})}_N dt = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= e^{tx} + tx e^{tx} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= e^{tx} + xte^{tx} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} \\ \frac{\partial N}{\partial x} \end{aligned}} \right\} \underline{\underline{\text{Exacta}}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = te^{tx} - 2x \Rightarrow F = \int (te^{tx} - 2x) dx \Rightarrow$$

$$F = e^{tx} - x^2 + h(t) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = xe^{tx} + h'(t) = 2 + xe^{tx}$$

$$\Rightarrow h'(t) = 2 \Rightarrow h(t) = 2t \Rightarrow F(t, x) = e^{tx} - x^2 + 2t$$

$$\text{Soluciones: } e^{tx} - x^2 + 2t = C, \quad t \in I, \quad C \in \mathbb{R}$$

3)

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = f(t), \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0. \end{cases}$$

a) La ecuación es diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes y término independiente $f(t)$ continua en $\mathbb{R}$.

b) Por la misma razón que en a).

c) $x(t) = e^t \rightarrow x'(t) = e^t \rightarrow x''(t) = e^t$

$$e^t + 2e^t + e^t = 4e^t = f(t)$$

$$x'' + 2x' + x = 4e^t$$

d) $x'' + 2x' + x = 0 \Rightarrow r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r+1)^2 = 0$

$$\Rightarrow r = -1 \text{ doble} \Rightarrow \{e^{-t}, te^{-t}\} \Rightarrow$$

$$x_h(t) = ae^{-t} + bte^{-t}, \forall t \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}.$$

$$x_p(t) = \frac{1}{3}e^t, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = ae^{-t} + bte^{-t} + \frac{1}{3}e^t, \forall t \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} e) \quad x(t) &= a e^{-t} + b t e^{-t} + e^t \\ x'(t) &= -a e^{-t} + b(e^{-t} - t e^{-t}) + e^t \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x(1) &= a e^{-1} + b e^{-1} + e = 0 \\ x'(1) &= -a e^{-1} + e = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &e^{-1} a = e \Rightarrow a = e^2 \\ &b e^{-1} = -a e^{-1} - e = -e - e = -2e \\ &\Rightarrow b = -2e^2 \end{aligned} \right\}$$

$$x(t) = e^2 e^{-t} - 2e^2 t e^{-t} + e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{2-t} - 2t e^{2-t} + e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x(t) = (1-2t)e^{2-t} + e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
