UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Doble Grado CIVIL–ADE

Primera prueba

16 de abril de 2021

Responde, justificadamente, a cada una de las siguientes cuestiones.

1. (5) Sean el espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$ (con la suma de vectores y el producto por escalares usuales) y el subconjunto $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1\}$.

   ¿Es U un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$?

   Resolución

   El conjunto U es un subconjunto del espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$ que está definido por las ecuaciones

   $$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{array}\right\}.$$

   Puesto que el vector $(0, 0, 0, 0)$ no satisface la segunda ecuación, entonces $(0, 0, 0, 0) \notin U$. Por tanto, U no puede ser un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

& - & - & - & - & - & - & - &

2. (5) Sean el espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$ (con la suma de vectores y el producto por escalares usuales) y el subespacio vectorial $U = \{(0, \alpha, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

   Teniendo en cuenta que todos los vectores de U se pueden expresar como una combinación lineal de los vectores $(0, 1, 0, 2), (1, 1, 0, 2)$ y $(0, 2, 0, 1)$, ¿es el conjunto $B = \{(0, 1, 0, 2), (0, 2, 0, 1), (1, 1, 0, 2)\}$ un sistema de generadores de U?

   Resolución

   Para que un conjunto de vectores A sea un sistema de generadores de un subespacio vectorial U, es necesario que todos los vectores de A estén en U.

   Puesto que $U = \{(0, \alpha, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, es claro que todos los vectores de U han de tener primera y tercera componentes iguales a cero. Como la primera componente del vector $(1, 1, 0, 2)$ no es igual a cero, entonces este vector no pertenece a U.

   Por tanto, podemos asegurar que B no es un sistema de generadores de U.[1]

& - & - & - & - & - & - & - &

[1] Un par de comentarios sobre este ejercicio:

a) En realidad B genera el subespacio vectorial $W = \{(\alpha, \beta, 0, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^4$. Como U está contenido en W, es por lo que B genera a todos los vectores U.

b) El conjunto $B' = \{(0, 1, 0, 2), (0, 2, 0, 1)\}$ si sería un sistema de generadores de U. Es más, B' es una base de U.

3. (10) Sean el espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$ (con la suma de vectores y el producto por escalares usuales) y el subespacio vectorial

$$U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = 0,\ x_2 - x_4 = 0,\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0\right\}.$$

¿Cuál es una base de U?

Resolución

Por el enunciado, U viene dado por ecuaciones cartesianas. Por tanto, para hallar una base de U, resolveremos el sistema formado por dichas ecuaciones, esto es,

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{array}\right\}.$$

Para resolver este sistema, aplicaremos eliminación gaussiana usando la matriz ampliada asociada al sistema.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_1 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + 3F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por tanto, obtenemos el sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\},$$

a partir del cual podemos asegurar que $U = \{(\alpha, \beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. De este modo, cualquier vector de U se puede expresar como combinación lineal de los vectores $(1, 0, 1, 0)$ y $(0, 1, 0, 1)$, es decir, el conjunto $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$ es un sistema de generadores de U.

Ahora bien, como $(1, 0, 1, 0)$ y $(0, 1, 0, 1)$ son linealmente independientes, pues ninguno de los dos es múltiplo del otro, podemos concluir que $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$ es una base de U.

& - & - & - & - & - & - & - &

4. (12.5) Sean el espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$ (con la suma de vectores y el producto por escalares usuales) y el subespacio vectorial U generado por el conjunto de vectores $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 0)\}$. Además, consideremos en $\mathbb{R}^4$ el producto escalar usual de vectores.

Si W es el complemento ortogonal de U en $\mathbb{R}^4$, ¿cuáles son unas ecuaciones paramétricas de W?

Resolución

Recordemos que, dado un subespacio vectorial $U \subseteq \mathbb{R}^4$, se llama complemento ortogonal de U al subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^4$ formado por todos los vectores que son ortogonales a U.

Por otra parte, recordemos que un vector $w = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ se dice ortogonal a U si es ortogonal a todo vector de U.

Puesto que U está generado por el conjunto $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 0)\}$, entonces todos sus vectores serán de la forma

$$a(1, 0, 1, 0) + b(0, 1, 1, 0) + c(1, -1, 0, 0),$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces, para determinar si w es ortogonal a U, bastará con saber si w es ortogonal a cada uno de los generadores de U. En efecto, si w es ortogonal a cada generador de U, entonces

$$\langle w, a(1, 0, 1, 0) + b(0, 1, 1, 0) + c(1, -1, 0, 0)\rangle = a\langle w, (1, 0, 1, 0)\rangle + b\langle w, (0, 1, 1, 0)\rangle + c\langle w, (1, -1, 0, 0)\rangle = 0,$$

es decir, w es ortogonal a todo vector de U.

Por tanto, para hallar los vectores $w = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$ necesitamos resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1, 0, 1, 0)\rangle = 0 \\ \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (0, 1, 1, 0)\rangle = 0 \\ \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1, -1, 0, 0)\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array}\right\}.$$

Teniendo en cuenta que este es un sistema con cuatro incógnitas, es fácil ver que sus soluciones son de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \lambda, \\ x_2 = \lambda, \\ x_3 = -\lambda, \\ x_4 = \mu, \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Y estas son, precisamente, las ecuaciones paramétricas de W.

& - & - & - & - & - & - & - &

5. (15) En los espacios vectoriales reales $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ (con la suma de vectores y el producto por escalares usuales) se consideran, respectivamente, los subespacios vectoriales

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = 0,\ x_3 = 0\},$$

$$U_2 = \{(2a, b, a + 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

¿Cuál es la expresión, en coordenadas, de una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{N}(T) = U_1$ e $\mathrm{Im}(T) = U_2$?

Resolución

Para determinar una aplicación lineal T que satisfaga las condiciones impuestas en el enunciado, hallaremos primero una base de U_1 y una base de U_2.

En primer lugar, es claro que todos los vectores de U_1 son de la forma

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_2, 0, x_4) = x_2(0, 1, 0, 0) + x_4(0, 0, 0, 1).$$

Por tanto, al ser $(0, 1, 0, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$ linealmente independientes (pues ninguno de los dos es múltiplo del otro), podemos asegurar que $B_1 = \{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es una base de U_1.

En cuanto a U_2, a partir de su definición, todos sus vectores son de la forma

$$(2a, b, a + 2b) = a(2, 0, 1) + b(0, 1, 2).$$

Puesto que $(2, 0, 1)$ y $(0, 1, 2)$ son linealmente independientes (por la misma razón que antes), tenemos que $B_2 = \{(2, 0, 1), (0, 1, 2)\}$ es una base de U_2.

Para definir la aplicación lineal T, lo haremos a partir de una base de $\mathbb{R}^4$. Y para esto, aprovecharemos que B_1 está formada por dos vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^4$. De esta forma, si definimos

$$T(1, 0, 0, 0) = u_1;\ T(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0);\ T(0, 0, 1, 0) = u_2;\ T(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0),$$

donde u_1, u_2 son vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, entonces se verificará que $\mathrm{N}(T) = U_1$.

Por otra parte, como $\dim(\mathrm{Im}(T))$ es igual a dos (ya que B_2 está formada por dos vectores) y justamente quedan dos vectores, de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, a los que asignarles imagen en $\mathbb{R}^3$, entonces podemos tomar

$$T(1, 0, 0, 0) = (2, 0, 1);\ T(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0);\ T(0, 0, 1, 0) = (0, 1, 2);\ T(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0),$$

para asegurar que $\mathrm{Im}(T) = U_2$.

Como nos piden la expresión de T en coordenadas, considerando (x_1, x_2, x_3, x_4) un vector cualquiera de $\mathbb{R}^4$, entonces (por la linealidad de T)

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 T(1, 0, 0, 0) + x_2 T(0, 1, 0, 0) + x_3 T(0, 0, 1, 0) + x_4 T(0, 0, 0, 1) \Rightarrow$$

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(2, 0, 1) + x_2(0, 0, 0) + x_3(0, 1, 2) + x_4(0, 0, 0) \Rightarrow$$
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1, x_3, x_1 + 2x_3).$$

Aunque la construcción hecha es suficiente para afirmar que T satisface las condiciones exigidas, vamos a comprobarlas. Empezamos con el núcleo de T.

$$\mathrm{N}(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid (2x_1, x_3, x_1 + 2x_3) = (0, 0, 0)\} =$$

$$\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid 2x_1=0, x_3=0, x_1+2x_3=0\} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1=0, x_3=0\} = U_1.$$

A continuación, analizamos la imagen de T.

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{T(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4\right\} = \left\{(2x_1,x_3,x_1+2x_3) \mid (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4\right\} =$$

$$\{(2x_1,x_3,x_1+2x_3) \mid x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{R}\} = \{(2x_1,x_3,x_1+2x_3) \mid x_1,x_3 \in \mathbb{R}\} = U_2.$$

& - & - & - & - & - & - & - &

6. (17.5) En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ (con la suma de vectores y el producto por escalares usuales) se considera la aplicación lineal T definida por

$$T(x,y,z) = \left(\frac{x+2y+2z}{3}, \frac{2x+y-2z}{3}, \frac{2x-2y+z}{3}\right).$$

¿Cuál es una base del subespacio vectorial $U = \left\{v=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(v)=v\right\}$?

Resolución

A partir del enunciado, U es el conjunto de vectores $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $T(x,y,z)=(x,y,z)$. Por tanto, nos piden hallar los vectores $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\left(\frac{x+2y+2z}{3}, \frac{2x+y-2z}{3}, \frac{2x-2y+z}{3}\right) = (x,y,z).$$

O sea, necesitamos hallar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} \frac{x+2y+2z}{3} = x \\ \frac{2x+y-2z}{3} = y \\ \frac{2x-2y+z}{3} = z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+2z=3x \\ 2x+y-2z=3y \\ 2x-2y+z=3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x+2y+2z=0 \\ 2x-2y-2z=0 \\ 2x-2y-2z=0 \end{array}\right\}.$$

Es claro que, en este último sistema, todas las ecuaciones son equivalentes: la segunda y la tercera ecuaciones son iguales entre sí y, además, opuestas a la primera. Así, el conjunto de soluciones del sistema original viene dado por las soluciones de

$$-2x+2y+2z=0 \Rightarrow x-y-z=0 \Rightarrow x=y+z.$$

Por tanto,

$$U = \{(\lambda+\mu, \lambda, \mu) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}.$$

Ahora bien, ya que

$$(\lambda+\mu,\lambda,\mu) = \lambda(1,1,0)+\mu(1,0,1), \text{ para todo } \lambda,\mu \in \mathbb{R},$$

podemos concluir que U es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1,1,0)$ y $(1,0,1)$.

Finalmente, puesto que ni $(1,1,0)$ es múltiplo de $(1,0,1)$, ni $(1,0,1)$ lo es de $(1,1,0)$, podemos asegurar que $B=\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes y, en consecuencia, que B es una base de U.

& - & - & - & - & - & - & - &

7. (20) En el espacio vectorial real euclídeo $\mathbb{R}^3$ (con la suma de vectores, el producto por escalares y el producto escalar usuales) se considera la base $B = \{(2,1,0),(1,-2,0),(0,0,1)\}$. Además, sea el endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada a la base B es

$$M(T,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Es T una transformación ortogonal impropia?

Resolución

Recordemos que, dado un espacio vectorial euclídeo V y una base ortonormal B de V, entonces una aplicación lineal $T : V \to V$ es una transformación ortogonal si, y solo si, la matriz $M(T,B)$, de la aplicación T en la base B, es ortogonal. O sea, T es una transformación ortogonal si, y solo si, $(M(T,B))^{-1} = (M(T,B))^T$. Además, T será impropia si $\det(M(T,B)) = -1$.

No es difícil ver que los vectores de B son ortogonales[2], pues

$$\langle (2,1,0),(1,-2,0)\rangle = 2-2+0 = 0;\ \langle (2,1,0),(0,0,1)\rangle = 0+0+0 = 0;\ \langle (1,-2,0,(0,0,1)\rangle = 0+0+0 = 0.$$

Sin embargo, no todos los vectores de B tienen norma igual a uno, por lo que B no es ortonormal. Por consiguiente, no podemos aplicar la caracterización anterior con la base B dada en el enunciado, sino que necesitamos construir una base ortonormal B'.

Para construir B' basta con normalizar los vectores de B (pues ya sabemos que son ortogonales):

$$||(2,1,0)|| = \sqrt{2^2+1^2+0^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right);$$

$$||(1,-2,0)|| = \sqrt{1^2+2^2+0^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}},0\right);$$

$$||(0,0,1)|| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1 \Rightarrow (0,0,1).$$

Por tanto, $B' = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}},0\right),(0,0,1)\right\}$.

Ahora tenemos que hallar la matriz $M(T,B')$ asociada a T en la base B'. Para ello calcularemos las imágenes (en la base B') de los tres vectores de la base B'.

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{B'}\right) = T\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\0\end{pmatrix}_B\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\0\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{-2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{B'}.$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{B'}\right) = T\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{-2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}_B\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\0\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{B'}.$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{B'}\right) = T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_B\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{B'}.$$

A partir de estos cálculos, resulta que

$$M(T,B') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso hemos obtenido la misma matriz para la base B y la base B'. En general, esto no siempre será así.

[2]Si no vemos directamente este hecho, aplicaríamos el método de ortogonalización de Gram-Schmidt obteniendo como resultado la misma base B.

Ahora sí podemos aplicar la caracterización vista al inicio del ejercicio. Así, ya que

$$M(T,B')M(T,B')^T = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

tenemos que $M(T,B')^T$ es la inversa de $M(T,B')$ y, en consecuencia, T es una transformación ortogonal. Por otra parte, ya que

$$\det\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} = 0+0+0-0-1-0 = -1,$$

podemos concluir que T sí es una transformación ortogonal impropia.

Un modo alternativo para obtener la matriz $M(T,B')$ sería partiendo de un vector $(x,y,z)_{B'}$ cualquiera. Veamos los cálculos correspondientes.

$$T\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{B'}\right) = T\left(x\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{-2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = T\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{y}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$T\left(\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{5}}\\\frac{y}{\sqrt{5}}\\z\end{pmatrix}_B\right) = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{5}}\\\frac{y}{\sqrt{5}}\\z\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}\frac{y}{\sqrt{5}}\\\frac{x}{\sqrt{5}}\\z\end{pmatrix}_B = \frac{y}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{x}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$y\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{-2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix}_{B'} \Rightarrow T\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{B'}\right) = \begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{B'} \Rightarrow$$

$$M(T,B') = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

& - & - & - & - & - & - & - &

8. (15) En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ (con la suma de vectores y el producto por escalares usuales) se considera el endomorfismo $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x,y,z) = (x+2y+2z, 2x+y-2z, 2x-2y+z).$$

Además, sea $B=\{(1,1,0),(1,-1,2),(1,-1,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

¿Es diagonal la matriz asociada a T con respecto a la base B?

Resolución

Para hallar la matriz $M(T,B)$ asociada al endomorfismo T con respecto a la base B, calcularemos las imágenes (en la base B) de los tres vectores de la base B.

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_B\right) = T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2\cdot1+2\cdot0\\2\cdot1+1-2\cdot0\\2\cdot1-2\cdot1+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}_B.$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_B\right) = T\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2\cdot(-1)+2\cdot2\\2\cdot1+(-1)-2\cdot2\\2\cdot1-2\cdot(-1)+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}_B.$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_B\right) = T\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2\cdot(-1)+2\cdot(-1)\\2\cdot 1+(-1)-2\cdot(-1)\\2\cdot 1-2\cdot(-1)+(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}_B.$$

A partir de estos cálculos, resulta que

$$M(T,B) = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz asociada a T con respecto a la base B sí es diagonal.

Tal como se vio en el ejercicio 7, la matriz $M(T,B)$ también se puede obtener partiendo de un vector $(a,b,c)_B$ cualquiera. Veamos los cálculos correspondientes.

$$T\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_B\right) = T\left(a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}a+b+c\\a-b-c\\2b-c\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}(a+b+c)+2(a-b-c)+2(2b-c)\\2(a+b+c)+(a-b-c)-2(2b-c)\\2(a+b+c)-2(a-b-c)+(2b-c)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3a+3b-3c\\3a-3b+3c\\6b+3c\end{pmatrix} = 3a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3b\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} - 3c\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_B\right) = \begin{pmatrix}3a\\3b\\-3c\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_B \Rightarrow M(T,B) = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

& - & - & - & - & - & - & - &