UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Doble Grado CIVIL–ADE

Segunda prueba

14 de mayo de 2021

Responde, **justificadamente**, a cada una de las siguientes cuestiones.

1. (30) En el espacio afín $\mathbb{R}^2$ se consideran
   - el giro definido por la expresión $G(x,y) = \left(\frac{3x-4y}{5}, \frac{4x+3y}{5}\right)$,
   - la traslación definida por la expresión $T(x,y) = (x-1, y+1)$.

   En las condiciones expuestas,

   a) (5) halla la expresión matricial de $H = T \circ G$ y justifica por qué H es un movimiento rígido en el plano;

   b) (10) calcula el conjunto $F(H)$ de puntos fijos de H;

   c) (10) calcula la variedad invariante $I(H)$;

   d) (5) clasifica, de la manera más precisa posible, H.

Resolución

a) A partir del enunciado,

$$H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \circ G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\left(G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \frac{3x-4y}{5} \\ \frac{4x+3y}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x-4y}{5} - 1 \\ \frac{4x+3y}{5} + 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x-4y}{5} - 1 \\ \frac{4x+3y}{5} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x-4y}{5} \\ \frac{4x+3y}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la expresión matricial de H será

$$H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como G y T están dadas en componentes, podemos considerar que el sistema de referencia que usado es el usual del plano afín $\mathbb{R}^2$. Por la misma razón, la expresión hallada para H estará expresada en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^2$, esto es, $\mathcal{R} = \{O = (0,0); B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}\}$.
A partir del comentario anterior, y puesto que $B = \{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal, para comprobar que H es un movimiento rígido en el plano, bastará comprobar que la matriz asociada a H es una matriz ortogonal, es decir, su inversa es su traspuesta. En efecto,

$$H \cdot H^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H^T \cdot H = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que G y T son movimientos rígidos (pues las matrices asociadas a cada uno de ellos es ortogonal), también podíamos justificar que H es un movimiento rígido por ser la composición de dos movimientos rígidos.

b) Para calcular el conjunto $F(H)$ de puntos fijos de H , basta resolver la ecuación $H(x,y) = (x,y)$:

$$H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{3x-4y}{5} - 1 \\ \frac{4x+3y}{5} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{r} \frac{3x-4y}{5} - 1 = x \\ \frac{4x+3y}{5} + 1 = y \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{r} -2x - 4y = 5 \\ 4x - 2y = -5 \end{array}\right\}.$$

Aplicando eliminación gaussiana:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 5 \\ 4 & -2 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 5 \\ 0 & -10 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right).$$

Por tanto, $F(H) = \left\{\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)\right\}$.

$c)$ Para calcular la variedad invariante $I(H)$ resolveremos la ecuación $(M-I_2)^2P+(M-I_2)H(O) = 0$, siendo M la matriz asociada a H y $P = (x, y)$.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow M-I_2 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow (M-I_2)^2 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-12}{25} & \frac{16}{25} \\ \frac{-16}{25} & \frac{-12}{25} \end{pmatrix}.$$

$$H(O) = H\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (M-I_2)H(O) = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{-6}{5} \end{pmatrix}.$$

$$(M-I_2)^2P+(M-I_2)H(O) = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{-12}{25} & \frac{16}{25} \\ \frac{-16}{25} & \frac{-12}{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{-6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-12}{25} & \frac{16}{25} \\ \frac{-16}{25} & \frac{-12}{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \frac{-12}{25}x + \frac{16}{25}y = \frac{2}{5} \\ \frac{-16}{25}x + \frac{-12}{25}y = \frac{6}{5} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} 6x - 8y = -5 \\ 8x + 6y = -15 \end{array}\right\}.$$

Aplicando eliminación gaussiana:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -8 & -5 \\ 8 & 6 & -15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{-5}{6} \\ 8 & 6 & -15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{-5}{6} \\ 0 & \frac{50}{3} & \frac{-50}{6} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right).$$

Por tanto, $I(H) = \left\{\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)\right\}$.

$d)$ Puesto que H tiene un único punto fijo y

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} - \frac{-4}{5} \times \frac{4}{5} = 1,$$

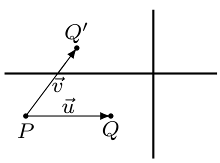
tenemos que H es un giro en el plano con centro de giro en el punto $P = \left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.
Para determinar el ángulo α del giro, consideremos el punto $Q = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$, de forma que tenemos el vector $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (1, 0)$. Entonces,

$$Q' = H(Q) = H\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{-7}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-9}{10} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix},$$

de donde, $\vec{v} = \overrightarrow{H(P)H(Q)} = \overrightarrow{PQ'} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Así,

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\frac{3}{5}}{1 \cdot 1} = \frac{3}{5} \Longrightarrow \alpha = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(\frac{3}{5}\right).$$

Para determinar el sentido de giro, representemos en una gráfica los puntos P, Q, Q' y, por tanto, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$.



A la vista de esta figura, queda claro que el sentido de giro es el contrario a las agujas del reloj.

& - & - & - & - & - & - & - &

2. (30) En el plano afín euclídeo usual $\mathbb{R}^2$, con el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$ usual, se considera la cónica $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

Además, en el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{O'; B'\}$ tal que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}},$$

se sabe que la cónica anterior admite la expresión $\left(\frac{x'}{4}\right)^2 - \left(\frac{y'}{3}\right)^2 = -1$.

En las condiciones expuestas,

a) (2.5) indica el tipo de cónica considerada;

b) (7.5) determina, justificadamente, los elementos geométricos de la cónica (ejes de simetría, centro, vértices, focos, asíntotas y directriz, caso de existir) en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$;

c) (12.5) calcula los elementos geométricos de la cónica (ejes de simetría, centro, vértices, focos, asíntotas y directriz, caso de existir) en el sistema de referencia $\mathcal{R}$;

d) (7.5) obtén la ecuación de la cónica en el sistema de referencia $\mathcal{R}$.

Resolución

a) A partir de la expresión reducida $\left(\frac{x'}{4}\right)^2 - \left(\frac{y'}{3}\right)^2 = -1$, el signo del término independiente coincide con el signo del término cuadrático en y' y es opuesto al signo del término cuadrático en x'. Por tanto, podemos afirmar que la cónica dada es una hipérbola cuyos vértices y focos están situados en el eje de ordenadas.

b) Por lo comentado en el apartado *a*), y ya que $c = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, tenemos que los elementos geométricos de la hipérbola, en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$, son

- vértices: $V_1 = (0, 3)_{\mathcal{R}'}$ y $V_2 = (0, -3)_{\mathcal{R}'}$;
- focos: $F_1 = (0, 5)_{\mathcal{R}'}$ y $F_2 = (0, -5)_{\mathcal{R}'}$;
- centro: $C = (0, 0)_{\mathcal{R}'}$;
- ejes de simetría: $x' = 0$ (ordenadas) e $y' = 0$ (abscisas);
- asíntotas: $y' = \frac{3}{4}x'$ e $y' = \frac{-3}{4}x'$.

c) A partir de lo hecho en el apartado *b*) y del cambio de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ (dado en el enunciado), tenemos que

- vértices:

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{16}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}};$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{5} \\ \frac{-2}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}};$$

- focos:

$$F_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{21}{5} \\ \frac{22}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}};$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{-19}{5} \\ \frac{-8}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}};$$

- centro:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

Para determinar las ecuaciones de los ejes de simetría y de las asíntotas, usaremos el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$, el cual deduciremos a partir del cambio de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} - \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} \\ \frac{-7}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} \\ \frac{-7}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \right) \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} \\ \frac{-7}{5} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}.$$

Por cierto, para la matriz inversa, necesaria en los cálculos, se ha tenido en cuenta que ya fue hallada en el ejercicio 1.

A partir de aquí,

- ejes de simetría:

$$x' = 0 \Longrightarrow \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1 = 0 \Longrightarrow 3x - 4y + 5 = 0;$$

$$y' = 0 \Longrightarrow \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1 = 0 \Longrightarrow 3x + 4y - 5 = 0;$$

- asíntotas:

$$y' = \frac{3}{4}x' \Longrightarrow \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1 = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1\right) \Longrightarrow 7x + 24y - 35 = 0;$$

$$y' = \frac{-3}{4}x' \Longrightarrow \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1 = \frac{-3}{4}\left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1\right) \Longrightarrow 25x - 5 = 0 \Longrightarrow 5x - 1 = 0.$$

d) Para obtener la ecuación de la cónica, en el sistema de referencia $\mathcal{R}$, tenemos dos posibilidades.

(i) Aplicar a la expresión $\left(\frac{x'}{4}\right)^2 - \left(\frac{y'}{3}\right)^2 = -1$ el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

(ii) Recurrir a la definición de hipérbola: "Dados dos puntos distintos, F_1 y F_2, denominados *focos*, y una constante positiva $2a$ (menor que la distancia entre los focos), se llama *hipérbola* de focos F_1 y F_2 y constante $2a$, al lugar geométrico de los puntos P cuya diferencia de distancias a F_1 y F_2 es $2a$".

Veamos cada una de estas dos posibilidades.

(i) Ya que, según se vio en el apartado c),

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'},$$

entonces

$$\left(\frac{x'}{4}\right)^2 - \left(\frac{y'}{3}\right)^2 = -1 \Longrightarrow \left(\frac{\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1}{3}\right)^2 = -1 \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{3x - 4y + 5}{20}\right)^2 - \left(\frac{4x + 3y - 5}{15}\right)^2 = -1 \Longrightarrow 9(3x - 4y + 5)^2 - 16(4x + 3y - 5)^2 = -3600 \Longrightarrow$$

$$9(9x^2 + 16y^2 + 25 - 24xy + 30x - 40y) - 16(16x^2 + 9y^2 + 25 + 24xy - 40x - 30y) + 3600 = 0 \Longrightarrow$$

$$-175x^2 - 600xy + 910x + 120y + 3425 = 0 \Longrightarrow 35x^2 + 120xy - 182x - 24y - 685 = 0.$$

(ii) Consideremos un punto cualquiera $P = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$. Ya que los focos están situados en el eje de ordenadas, debemos tomar $a = 3$. Por otra parte, sabemos que, en el sistema de referencia $\mathcal{R}$, los focos de la hipérbola vienen dados por $F_1 = \left(\frac{21}{5}, \frac{22}{5}\right)$ y $F_2 = \left(\frac{-19}{5}, \frac{-8}{5}\right)$.
Entonces

$$|\,\mathrm{d}(F_1, P) - \mathrm{d}(F_2, P)\,| = 6 \Longrightarrow \left|\, \left\| \left(x - \frac{21}{5}, y - \frac{22}{5}\right) \right\| - \left\| \left(x + \frac{19}{5}, y + \frac{8}{5}\right) \right\| \,\right| = 6 \Longrightarrow$$

$$\left|\sqrt{\left(x-\frac{21}{5}\right)^2+\left(y-\frac{22}{5}\right)^2}-\sqrt{\left(x+\frac{19}{5}\right)^2+\left(y+\frac{8}{5}\right)^2}\right|=6\Longrightarrow$$

$$\left|\frac{\sqrt{(5x-21)^2+(5y-22)^2}}{5}-\frac{\sqrt{(5x+19)^2+(5y+8)^2}}{5}\right|=6\Longrightarrow$$

$$\left|\sqrt{(5x-21)^2+(5y-22)^2}-\sqrt{(5x+19)^2+(5y+8)^2}\right|=30.$$

A partir de aquí tendríamos que analizar dos casos, pues lo que hay en el interior del valor absoluto puede valer 30 o -30. Haremos solo los cálculos de la primera posibilidad, pues los de la segunda son similares y llevan al mismo resultado (¡háganse esos cálculos y véase que lo dicho es cierto!)

$$\sqrt{(5x-21)^2+(5y-22)^2}-\sqrt{(5x+19)^2+(5y+8)^2}=30\Longrightarrow$$

$$\sqrt{(5x-21)^2+(5y-22)^2}=\sqrt{(5x+19)^2+(5y+8)^2}+30\Longrightarrow$$

$$(5x-21)^2+(5y-22)^2=\left(\sqrt{(5x+19)^2+(5y+8)^2}+30\right)^2\Longrightarrow$$

$$(5x-21)^2+(5y-22)^2=(5x+19)^2+(5y+8)^2+900+60\sqrt{(5x+19)^2+(5y+8)^2}\Longrightarrow$$

$$-400x-300y-400=60\sqrt{(5x+19)^2+(5y+8)^2}\Rightarrow 20x+15y+20=-3\sqrt{(5x+19)^2+(5y+8)^2}\Rightarrow$$

$$400x^2+225y^2+400+600xy+800x+600y=9\left(25x^2+190x+361+25y^2+80y+64\right)\Longrightarrow$$

$$175x^2+600xy-910x-120y-3425=0\Longrightarrow 35x^2+120xy-182x-24y-685=0.$$

& - & - & - & - & - & - & - &

3. (40) En el espacio afín euclídeo usual $\mathbb{R}^4$, con el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$ usual, se consideran las variedades afines

- $\mathcal{L}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 1,\ x_2 + x_3 = 0\}$;
- $\mathcal{L}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 2,\ x_3 + x_4 = 2\}$.

En las condiciones expuestas,

a) (3) comprueba que $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$ (esto es, la intersección de ambas variedades es vacía);

b) (4) expresa $\mathcal{L}_1$ mediante ecuaciones paramétricas;

c) (4) expresa $\mathcal{L}_2$ mediante ecuaciones paramétricas;

d) (3) halla un punto $P \in \mathcal{L}_1$ y un punto $Q \in \mathcal{L}_2$;

e) (7) expresa mediante ecuaciones cartesianas la variedad afín $\mathcal{L}$ que contiene a $\mathcal{L}_2$ y es paralela a $\mathcal{L}_1$;

f) (7) expresa mediante ecuaciones cartesianas la variedad afín $\mathcal{L}_P^\perp$ (esto es, la variedad afín que pasa por P y es ortogonal a $\mathcal{L}$);

g) (3) halla $P' = \mathcal{L}_P^\perp \cap \mathcal{L}$;

h) (9) calcula $\mathrm{d}(P, P')$, $\mathrm{d}(P, \mathcal{L})$ y $\mathrm{d}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$.

Resolución

a) Tanto $\mathcal{L}_1$ como $\mathcal{L}_2$ vienen dadas por ecuaciones cartesianas. Por tanto, para calcular $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ (esto es, la intersección) bastará con hallar los puntos que satisfagan el sistema formado por las ecuaciones de ambas variedades afines. Así, tenemos que resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 2 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{array}\right\}.$$

Es claro que las ecuaciones primera y tercera son incompatibles entre sí, por lo que el sistema no tiene solución. Por tanto, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$.

b) Para expresar $\mathcal{L}_1$ mediante ecuaciones paramétricas, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones cartesianas que definen a la variedad.

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = \alpha, \\ x_3 = -\alpha, \\ x_4 = \beta, \end{array}\right. \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

c) Al igual que en el apartado anterior, para expresar $\mathcal{L}_2$ mediante ecuaciones paramétricas, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones cartesianas que definen a la variedad.

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = 2 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2, \\ x_2 = \alpha, \\ x_3 = \beta, \\ x_4 = 2 - \beta, \end{array}\right. \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

d) A partir de las ecuaciones paramétricas halladas en el apartado b), para obtener un punto $P \in \mathcal{L}_1$ hay que darle valores concretos a α y a β. Por ejemplo, para $\alpha = \beta = 0$, tendremos $P = (1, 0, 0, 0)$.

Igualmente, para obtener un punto $Q \in \mathcal{L}_2$ hay que darle valores concretos a α y a β en las ecuaciones paramétricas halladas en el apartado c). Por ejemplo, para $\alpha = \beta = 0$, tendremos $Q = (2, 0, 0, 2)$.

e) Buscamos una variedad afín $\mathcal{L}$ que contenga a $\mathcal{L}_2$ y sea paralela a $\mathcal{L}_1$. Para ello bastará tener en cuenta que, si $\mathcal{L}_1 = P + W_1$ y $\mathcal{L}_2 = Q + W_2$, entonces $\mathcal{L} = Q + W_1 + W_2$. Por tanto, necesitamos determinar los subespacios vectoriales W_1 y W_2.

A partir de las ecuaciones paramétricas halladas en los apartados b) y c), tenemos que

- $\mathcal{L}_1 = \{(1,\alpha,-\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = (1,0,0,0) + \{(0,\alpha,-\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow$
  $W_1 = \{(0,\alpha,-\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(0,1,-1,0),(0,0,0,1)\}\right)$.
- $\mathcal{L}_2 = \{(2,\alpha,\beta,2-\beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = (2,0,0,2) + \{(0,\alpha,\beta,-\beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow$
  $W_2 = \{(0,\alpha,\beta,-\beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(0,1,0,0),(0,0,1,-1)\}\right)$.

Ahora bien,

$$\begin{gathered}W = W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\} = \\ \{(0,\alpha_1,-\alpha_1,\beta_1) + (0,\alpha_2,\beta_2,-\beta_2) \mid \alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2 \in \mathbb{R}\} = \\ \{(0,\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1+\beta_2,\beta_1-\beta_2) \mid \alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2 \in \mathbb{R}\} = \\ L\left(\{(0,1,-1,0),(0,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,-1)\}\right).\end{gathered}$$

Por lo que necesitamos estudiar la independencia lineal de los vectores $(0,1,-1,0)$, $(0,0,0,1)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,-1)$, que forman un sistema de generadores de W. Para ello consideramos la ecuación

$$a(0,1,-1,0) + b(0,0,0,1) + c(0,1,0,0) + d(0,0,1,-1) = (0,0,0,0),$$

de donde,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 0 \\ a + c &= 0 \\ -a + d &= 0 \\ b - d &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \dots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left.\begin{aligned} a - d &= 0 \\ b - d &= 0 \\ c + d &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

A partir del último sistema, es claro que solo hay tres vectores linealmente independientes. Además, ya que $(a,b,c,d) = (1,1,-1,1)$ es una solución del sistema,

$$(0,1,-1,0) + (0,0,0,1) - (0,1,0,0) + (0,0,1,-1) = (0,0,0,0) \Longrightarrow$$

$$(0,0,1,-1) = -(0,1,-1,0) - (0,0,0,1) + (0,1,0,0).$$

Por tanto, podemos eliminar al vector $(0,0,1,-1)$ del sistema de generadores de W, quedando que $\{(0,1,-1,0),(0,0,0,1),(0,1,0,0)\}$ es una base de W.

Por todos los cálculos efectuados, tenemos que

$$\mathcal{L} = Q + W \Longrightarrow \mathcal{L} = \{(2,0,0,2) + \alpha(0,1,-1,0) + \beta(0,0,0,1) + \gamma(0,1,0,0) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\},$$

de donde $\mathcal{L}$ viene dado por las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= 2, \\ x_2 &= \alpha + \gamma, \\ x_3 &= -\alpha, \\ x_4 &= 2 + \beta, \end{aligned}\right. \quad \text{con } \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}.$$

Como tenemos que expresar $\mathcal{L}$ mediante ecuaciones cartesianas, analizaremos las paramétricas considerando α,β,γ como incógnitas y x_1,x_2,x_3,x_4 como parámetros (o sea, nos preguntamos para qué valores x_1,x_2,x_3,x_4 es posible encontrar valores α,β,γ de forma que se satisfagan las paramétricas).

Empleando eliminación gaussiana sobre la matriz ampliada asociada,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x_1 - 2 \\ \alpha + \gamma &= x_2 \\ \alpha &= -x_3 \\ \beta &= x_4 - 2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & x_1 - 2 \\ 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 - 2 \end{array}\right) \to \dots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 - 2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - 2 \end{array}\right) \to \dots \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 - 2 \\ 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 - 2 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha &= -x_3 \\ \beta &= x_4 - 2 \\ \gamma &= x_2 + x_3 \\ 0 &= x_1 - 2 \end{aligned}\right\},$$

llegamos a un sistema que será compatible si, y solo si, se verifica la condición $x_1 - 2 = 0$.

Por tanto, podemos concluir que $\mathcal{L}$ viene determinado por la ecuación cartesiana $x_1 = 2$.

f) Para encontrar la variedad afín $\mathcal{L}_P^\perp$, calcularemos previamente $W^\perp$, siendo W el subespacio vectorial asociado a $\mathcal{L}$ y que fue determinado en el apartado anterior.

Como $\{(0,1,-1,0),(0,0,0,1),(0,1,0,0)\}$ es una base de W, entonces (teniendo en cuenta que consideramos el espacio afín euclídeo usual $\mathbb{R}^4$)

$$W^\perp = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle (x_1,x_2,x_3,x_4),(0,1,-1,0)\rangle = 0 \\ \langle (x_1,x_2,x_3,x_4),(0,0,0,1)\rangle = 0 \\ \langle (x_1,x_2,x_3,x_4),(0,1,0,0)\rangle = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$W^\perp = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_2 = 0 \right\} \Longrightarrow$$

$$W^\perp = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \right\} = \{(\alpha,0,0,0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Puesto que $\mathcal{L}_P^\perp$ pasa por $P = (1,0,0,0)$ y tiene a $W^\perp = \{(\alpha,0,0,0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ como subespacio vectorial asociado, entonces $\mathcal{L}_P^\perp$ viene dado por la ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1+\alpha, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \end{array} \right. \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Y, por tanto, $\mathcal{L}_P^\perp$ viene dado por la ecuaciones cartesianas

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

g) Para hallar $P' = \mathcal{L}_P^\perp \cap \mathcal{L}$ basta tener en cuenta que P' deberá satisfacer tanto las ecuaciones cartesianas de $\mathcal{L}$ como las de $\mathcal{L}_P^\perp$, es decir, P' debe ser solución del sistema formado por las cartesianas halladas en los apartados *e*) y *f*):

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Es evidente que este sistema tiene una única solución: $P' = (2,0,0,0)$.

h) Sabiendo que $P = (1,0,0,0)$ y $P' = (2,0,0,0)$, entonces (teniendo en cuenta que consideramos el espacio afín euclídeo usual $\mathbb{R}^4$)

$$\mathrm{d}(P,P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \|(2,0,0,0)-(1,0,0,0)\| = \|(1,0,0,0)\| = \sqrt{1^2+0^2+0^2+0^2} = 1.$$

Para hallar $\mathrm{d}(P,\mathcal{L})$, recordemos que $\mathrm{d}(P,\mathcal{L}) = \mathrm{d}(P,p_{\mathcal{L}}(P))$ y que $p_{\mathcal{L}}(P) = \mathcal{L}_P^\perp \cap \mathcal{L}$. Pero, por el apartado *g*), sabemos que $\mathcal{L}_P^\perp \cap \mathcal{L} = P'$. Así podemos concluir que

$$\mathrm{d}(P,\mathcal{L}) = \mathrm{d}(P,p_{\mathcal{L}}(P)) = \mathrm{d}(P,\mathcal{L}_P^\perp \cap \mathcal{L}) = \mathrm{d}(P,P') = 1.$$

Finalmente, para hallar $\mathrm{d}(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2)$, recordemos que, si $\mathcal{L}_1 = P + W_1$ y $\mathcal{L}_2 = Q + W_2$ son dos variedades afines que no se cortan, entonces se verifica que

$$\mathrm{d}(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) = \mathrm{d}(P,\mathcal{L}),$$

donde $\mathcal{L} = Q + (W_1 + W_2)$ es la variedad que contiene a $\mathcal{L}_2$ y es paralela a $\mathcal{L}_1$. Pero estas son, precisamente, las condiciones en la que estamos, pues

- por los cálculos realizados en los apartados *b*), *c*), *d*) y *e*), tenemos identificadas completamente las expresiones $\mathcal{L}_1 = P + W_1$ y $\mathcal{L}_2 = Q + W_2$ (es decir, conocemos los puntos P y Q, así como los subespacios vectoriales W_1 y W_2);
- por el apartado *a*), podemos asegurar que las variedades afines $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no se cortan;
- en el apartado *e*) se ha determinado la variedad afín $\mathcal{L}$ que contiene a $\mathcal{L}_2$ y es paralela a $\mathcal{L}_1$.

Por consiguiente, deducimos que

$$\mathrm{d}(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) = \mathrm{d}(P,\mathcal{L}) = 1.$$

& - & - & - & - & - & - & - &