UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Doble Grado CIVIL–ADE

Tercera prueba

9 de junio de 2021

Responde, **justificadamente**, a cada una de las siguientes cuestiones.

1. (25) Se considera la ecuación diferencial

$$x'(t) = \frac{x(t)^2}{t+5}. \tag{1}$$

a) (2.5) ¿Para qué pares $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ se puede afirmar que (1) admite solución?

b) (2.5) ¿Para qué pares $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ se puede afirmar que hay unicidad de solución para (1)?

c) (12.5) Halla todas las soluciones de (1).

d) (7.5) ¿Cuál es la solución de (1) que pasa por el punto $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$?

En los dos últimos apartados, indica explícitamente los dominios de las funciones solución.

Resolución

a) A partir del enunciado, tenemos que $x' = f(t,x)$ con $f(t,x) = \frac{x^2}{t+5}$.

Es claro que, al ser un cociente de polinomios en las variables t y x, la función $f(t,x)$ es continua en los dominios maximales $D_1 = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t+5>0\right\}$ y $D_2 = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t+5<0\right\}$. En efecto, $f(t,x)$ no está definida en los pares (t,x) donde se anula el denominador (es decir, cuando $t=-5$) y está definida y es continua en todos los demás pares de $\mathbb{R}^2$.

Por tanto, podemos afirmar que (1) tiene solución en todos los pares (t_0, x_0) tales que $t_0 \neq 5$, o sea, en todos los pares (t_0, x_0) que pertenezcan a D_1 o a D_2.

b) Tenemos que

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{2x}{t+5}$$

es una función continua en los dominios maximales D_1 y D_2 vistos en el apartado a). Además, $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ no está definida cuando $t=-5$.

Por tanto, podemos afirmar que (1) admite solución única en todos los pares (t_0, x_0) tales que $t_0 \neq 5$, o sea, en todos los pares (t_0, x_0) que pertenezcan a D_1 o a D_2.

c) Es claro que (1) es una ecuación en variables separadas. En efecto, es de la forma $x' = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = \frac{1}{t+5},\ \forall t \in]-\infty, -5[\ \text{ o } \ \forall t \in]-5, +\infty[,$$

y

$$h(x) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para resolver la ecuación (1), la reescribimos de la forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{t+5}$$

y, antes de "separar" las variables, analizamos qué pasa cuando $x^2 = 0$.

Si $x^2 = 0$, entonces $x = 0$ y, es claro que, por sustitución directa en (1), las funciones

$$x(t) = 0,\ \forall t < -5,$$

y

$$x(t) = 0,\ \forall t > -5,$$

son soluciones de (1).

Ahora, pasamos a suponer que x no se anula. En tal caso,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x^2}{t+5}\Longrightarrow\int\frac{1}{x^2}\,dx=\int\frac{1}{t+5}\,dt\Longrightarrow\frac{-1}{x}=\ln|t+5|+C,\ C\in\mathbb{R}\Longrightarrow$$

$$\frac{1}{x}=C-\ln|t+5|,\ C\in\mathbb{R}\Longrightarrow x(t)=\frac{1}{C-\ln|t+5|},\ \forall t\in I,\ C\in\mathbb{R}.$$

Para concretar qué intervalo I corresponde a cada solución, analicemos donde puede estar bien definida la expresión $\frac{1}{C-\ln|t+5|}$ para cada valor de C, esto es, veamos dónde no se anula tal expresión.

$$C-\ln|t+5|=0,\ C\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow\ln|t+5|=C,\ C\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow|t+5|=e^C,\ C\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} t+5=e^C,\ C\in\mathbb{R},\\ t+5=-e^C,\ C\in\mathbb{R},\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} t=-5+e^C,\ C\in\mathbb{R},\\ t=-5-e^C,\ C\in\mathbb{R}.\end{array}\right.$$

Por otra parte, por el apartado a), sabemos que la ecuación (1) no está bien definida cuando $t=-5$. Por tanto, y teniendo en cuenta que $e^C>0$ para cualquier $C\in\mathbb{R}$, los posibles dominios I serán

$$I=\left]-\infty,-5-e^C\right[,\ \ I=\left]-5-e^C,-5\right[,\ \ I=\left]-5,-5+e^C\right[\ \text{ e }\ I=\left]-5+e^C,+\infty\right[\,.$$

Resumiendo, las soluciones de (1) son

$$x(t)=0,\ \forall t<-5,$$

$$x(t)=0,\ \forall t>-5,$$

y

$$x(t)=\frac{1}{C-\ln|t+5|},\ \forall t\in I,\ C\in\mathbb{R},$$

siendo

$$I=\left]-\infty,-5-e^C\right[,\ \ I=\left]-5-e^C,-5\right[,\ \ I=\left]-5,-5+e^C\right[\ \text{ o }\ I=\left]-5+e^C,+\infty\right[\,.$$

d) La solución de (1) que pasa por el punto $\left(-4,\frac{1}{2}\right)$ es la que satisface la condición inicial $x(-4)=\frac{1}{2}$. Como $-4\neq-5$, sabemos que dicha solución existe y es única.

Por otra parte, $\frac{1}{2}\neq 0$, por lo que la solución buscada ha de ser de la forma $x(t)=\frac{1}{C-\ln|t+5|}$. Primero hallaremos el valor de C y, posteriormente, determinaremos el dominio de la solución.

Para hallar el valor de C, sustituyendo t por -4 y x por $\frac{1}{2}$, tenemos que

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{C-\ln|-4+5|}\Longleftrightarrow 2=C-\ln|1|\Longleftrightarrow C=2.$$

Finalmente, como $e^2>1$, entonces $-4\in\left]-5,-5+e^2\right[$, de donde

$$x(t)=\frac{1}{2-\ln|t+5|},\ \ \forall t\in\left]-5,-5+e^2\right[,$$

es la solución buscada.

& - & - & - & - & - & - & - &

2. (25) Se considera la ecuación diferencial

$$(tx^2 - 2)\,dx + (x^3 - tx^2)\,dt = 0. \tag{2}$$

a) (5) ¿Para qué pares $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ se puede afirmar que (2) admite una única solución?

b) (7.5) ¿Es (2) una ecuación diferencial exacta?

c) (12.5) ¿Admite (2) un factor integrante del tipo $\mu(x)$?

Resolución

a) Para responder a este apartado, expresamos (2) en forma normal.

$$(tx^2 - 2)\,dx + (x^3 - tx^2)\,dt = 0 \Longrightarrow (tx^2 - 2)\,dx = (tx^2 - x^3)\,dt \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{tx^2 - x^3}{tx^2 - 2}.$$

Por tanto, en su forma normal, (2) viene determinada por la función

$$f(t, x) = \frac{tx^2 - x^3}{tx^2 - 2},$$

la cual está bien definida siempre que el denominador no se anule. Pero, ya que $0 \cdot x^2 - 2 \neq 0$ para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$,

$$tx^2 - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{t}},\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

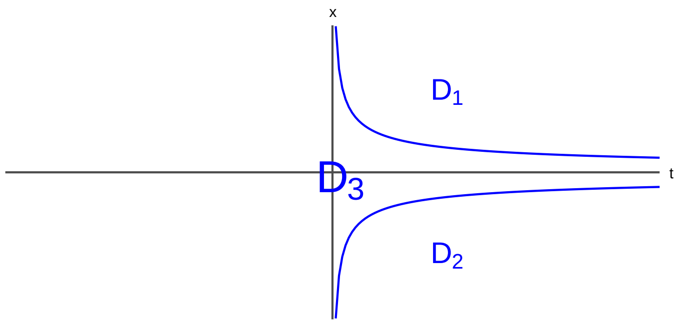
Por tanto,

i) si $t < 0$ entonces la expresión $\pm\sqrt{\frac{2}{t}}$ no es real, por lo que $f(t, x)$ está bien definida;

ii) si $t = 0$ hemos visto que no hay problema, por lo que $f(t, x)$ está bien definida;

iii) si $t > 0$, entonces $f(t, x)$ no está definida ni en los pares $\left(t, \sqrt{\frac{2}{t}}\right)$ ni en los pares $\left(t, -\sqrt{\frac{2}{t}}\right)$.

Para determinar los dominios maximales de $f(t, x)$, en la siguiente figura representamos las gráficas de $\sqrt{\frac{2}{t}}$ y $-\sqrt{\frac{2}{t}}$.



Observemos que $f(t, x)$ está bien definida en los dominios maximales D_1, D_2 y D_3. Las expresiones analíticas de estos dominios son

- $D_1 = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0,\ x > \sqrt{\frac{2}{t}}\right\}$;
- $D_2 = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0,\ x < -\sqrt{\frac{2}{t}}\right\}$;
- $D_3 = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \leq 0\right\} \cup \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0,\ -\sqrt{\frac{2}{t}} < x < \sqrt{\frac{2}{t}}\right\}$.

Concluimos que tanto $f(t, x)$ (que es un cociente de polinomios) como $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ (que es otro cociente de polinomios, cuyo denominador es el de $f(t, x)$ pero elevado al cuadrado) son funciones continuas en D_1, D_2 y D_3, por lo que (2) admitirá una única solución para cualquier par (t_0, x_0) perteneciente a uno de los dominios maximales D_1, D_2 o D_3.

b) Consideremos las funciones $M(t,x) = tx^2 - 2$ y $N(t,x) = x^3 - tx^2$, ambas definidas en $\mathbb{R}^2$ por ser polinómicas (de hecho M y N son diferenciables, con continuidad, de cualquier orden). Con esta notación, (2) viene dada por

$$M(t,x)\,dx + N(t,x)\,dt = 0.$$

Para ver si (2) es exacta, bastará con comprobar la condición de exactitud, es decir, bastará con comprobar si

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial x}.$$

Pero,

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial t} = x^2$$

y

$$\frac{\partial N(t,x)}{\partial x} = 3x^2 - 2tx,$$

por lo que ambas derivadas parciales son distintas. En consecuencia, (2) no es exacta.

c) Para comprobar si (2) admite un factor integrante del tipo $\mu(x)$, consideramos la ecuación diferencial

$$\mu(x)(tx^2-2)\,dx + \mu(x)(x^3-tx^2)\,dt = 0. \tag{2'}$$

Tomando $M(t,x) = \mu(x)(tx^2-2)$ y $N(t,x) = \mu(x)(x^3-tx^2)$, la condición de exactitud para (2') vendrá dada por $\frac{\partial M(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial x}$, de donde,

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial x} \iff \mu(x)\cdot x^2 = \mu'(x)\cdot(x^3-tx^2) + \mu(x)\cdot(3x^2-2tx) \iff$$

$$\mu(x)\cdot x^2 - \mu(x)\cdot(3x^2-2tx) = \mu'(x)\cdot(x^3-tx^2) \iff \mu(x)\cdot(-2x^2+2tx) = \mu'(x)\cdot(x^3-tx^2) \iff$$

$$x^2(x-t)\cdot\mu'(x) = -2x(x-t)\cdot\mu(x) \iff \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{-2}{x}.$$

Como el lado derecho de la última igualdad solo depende de la variable x, podemos afirmar que (2) admite un factor integrante del tipo $\mu(x)$.[1]

& - & - & - & - & - & - & - &

[1] Por cierto, para que el factor integrante $\mu(x)$ tenga todo el sentido, es necesario suponer que x no se anula. De hecho, si calculamos un factor,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{-2}{x} \Longrightarrow \frac{d\mu}{\mu\,dx} = \frac{-2}{x} \Longrightarrow \int \frac{1}{\mu}\,d\mu = \int \frac{-2}{x}\,dx \Longrightarrow \ln(\mu) = -2\ln(x) = \ln(x^{-2}) \Longrightarrow \mu(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Debemos observar que, al ser necesario un único factor integrante, hemos obviado los valores absolutos al calcular las dos primitivas.

Con el factor hallado, (2') viene dada por

$$\left(t - \frac{2}{x^2}\right)dx + (x-t)\,dt = 0,$$

que no está definida cuando $x = 0$.

3. (25) Se considera la ecuación diferencial

$$x'(t) = x(t) + \frac{t}{x(t)^2}. \tag{3}$$

a) (5) ¿Para qué pares $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ se puede afirmar que (3) admite una única solución?

b) (5) Comprueba, sin hacer uso del apartado siguiente, que el cambio de variables $u = x^3$ transforma la ecuación (3) en una ecuación lineal de primer orden.

c) (10) Resuelve la ecuación diferencial lineal

$$x'(t) = 3x(t) + 3t.$$

d) (5) Halla la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + \frac{t}{x(t)^2}, \\ x\left(\frac{-4}{3}\right) = 1. \end{cases}$$

En los dos últimos apartados, indica explícitamente los dominios de las funciones solución.

Resolución

a) La función $f(t,x) = x + \frac{t}{x^2}$ es una función que está bien definida en los dominios maximales dados por $D_1 = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ (semi-plano inferior) y $D_2 = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ (semi-plano superior), ya que $f(t,x)$ no está definida cuando $x = 0$.

Además, puesto que $f(t,x) = \frac{x^3+t}{x^2}$, es claro que $f(t,x)$ es continua en D_1 y en D_2. Por otra parte, también $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ es continua en D_1 y en D_2, pues es un cociente de polinomios cuyo denominador viene dado por x^3.

Por todo lo anterior, podemos concluir que (3) admitirá solución única para todos los pares (t_0, x_0) tales que x_0 no se anula (o sea, para todos los pares (t_0, x_0) pertenecientes a D_1 o a D_2).

b) Considerando el cambio $u = x^3$, entonces $u' = 3x^2x'$, de donde,

$$x' = x + \frac{t}{x^2} \Longrightarrow x^2x' = x^3 + t \Longrightarrow 3x^2x' = 3x^3 + 3t \Longrightarrow u' = 3u + 3t,$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Este apartado se puede resolver tomando el cambio inverso. Esto es, partiendo del cambio $x = u^{1/3}$. En tal caso, $x' = \frac{1}{3}u^{-2/3}u'$, de donde

$$x' = x + \frac{t}{x^2} \Longrightarrow \frac{1}{3}u^{-2/3}u' = u^{1/3} + \frac{t}{(u^{1/3})^2} \Longrightarrow u' = 3u^{2/3}\left(u^{1/3} + \frac{t}{u^{2/3}}\right) \Longrightarrow u' = 3u + 3t,$$

que, como era de esperar, es la misma ecuación obtenida antes.

c) Para resolver $x'(t) = 3x(t) + 3t$, empezaremos viendo la solución general de la ecuación homogénea asociada.[2]

Suponiendo que $x \neq 0$,

$$x' = 3x \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = 3x \Longrightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \int 3\,dt \Longrightarrow \ln|x| = 3t + C,\ C \in \mathbb{R} \Longrightarrow |x| = e^{3t+C},\ C \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$|x| = e^C e^{3t},\ C \in \mathbb{R} \Longrightarrow |x| = Ke^{3t},\ K > 0 \Longrightarrow x = Ke^{3t},\ K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que la función constantemente igual a cero es solución de la ecuación $x' = 3x$, podemos afirmar que la solución general de la esta ecuación viene dada por

$$x_h(t) = Ke^{3t},\ \forall t \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

[2]Es claro que, al ser $x' = 3x + 3t$ una ecuación lineal con coeficientes constantes y $b(t) = 3t$ una función continua en $\mathbb{R}$, entonces todas las soluciones de la ecuación dada, así como las de la homogénea asociada, estarán bien definidas en $\mathbb{R}$.

A continuación buscamos una solución particular de $x' = 3x + 3t$. Para ello aplicaremos el método de coeficientes indeterminados tomando $x_p(t) = \alpha + \beta t$. En tal caso, $x_p'(t) = \beta$, de donde

$$\beta = 3\alpha + 3\beta t + 3t \Longrightarrow \beta - 3\alpha - 3(\beta + 1)t = 0 \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \beta - 3\alpha = 0 \\ \beta + 1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = \frac{-1}{3},\ \beta = -1 \Longrightarrow$$

$$x_p(t) = \frac{-1}{3} - t,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

A partir de todo lo anterior, podemos concluir que la solución general de $x' = 3x + 3t$ es

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ke^{3t} - \frac{1}{3} - t,\ \forall t \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

d) Para resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + \frac{t}{x(t)^2}, \\ x\left(\frac{-4}{3}\right) = 1, \end{cases}$$

observemos que, por el apartado b), el cambio $u = x^3$ transforma la ecuación $x' = x + \frac{t}{x^2}$ en la ecuación $u' = 3u + 3t$, que es justamente la ecuación resuelta en el apartado c). Por tanto,

$$u(t) = Ke^{3t} - \frac{1}{3} - t,\ \forall t \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

Así, deshaciendo el cambio $u = x^3$, esto es, tomando el cambio inverso $x = u^{1/3} = \sqrt[3]{u}$, las soluciones de $x' = x + \frac{t}{x^2}$ vendrán dadas por

$$x(t) = \sqrt[3]{Ke^{3t} - \frac{1}{3} - t},\ \forall t \in I,\ K \in \mathbb{R}.$$

Para determinar el dominio I de esta última familia de funciones, debemos recordar que x no se puede anular, por lo que $Ke^{3t} - \frac{1}{3} - t$ tampoco puede anularse. Como, para la ecuación $Ke^{3t} - \frac{1}{3} - t = 0$, no conocemos expresiones explícitas de las soluciones en todos los casos, dejaremos indicada la existencia del intervalo I (que está asegurada por el resultado de existencia y unicidad de soluciones).

Para acabar, determinaremos el valor de K a partir de la condición inicial $x\left(\frac{-4}{3}\right) = 1$.

$$x\left(\frac{-4}{3}\right) = 1 \Longleftrightarrow 1 = \sqrt[3]{Ke^{-4} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}} \Longleftrightarrow 1 = Ke^{-4} + 1 \Longleftrightarrow Ke^{-4} = 0 \Longleftrightarrow K = 0.$$

Por tanto, la solución del problema de valores iniciales viene dada por la expresión

$$x(t) = \sqrt[3]{-\frac{1}{3} - t},\ \forall t \in I.$$

Y, en este caso particular, sí es posible precisar el intervalo I. En efecto,

$$-\frac{1}{3} - t = 0 \Longleftrightarrow t = -\frac{1}{3},$$

de donde $I =]-\infty, -\frac{1}{3}[$ o $I =]-\frac{1}{3}, +\infty[$. Finalmente, ya que $-\frac{4}{3} < -\frac{1}{3}$, podemos asegurar que

$$x(t) = \sqrt[3]{-\frac{1}{3} - t},\ \forall t \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[,$$

es la solución pedida.

& - & - & - & - & - & - & - &

4. (25) Se consideran las funciones $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = te^t$ y $f_3(t) = e^{-t}$, todas definidas en $\mathbb{R}$.

a) (5) Comprueba que $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son funciones linealmente independientes.

b) (7.5) Halla, sin hacer uso del apartado siguiente, una ecuación diferencial lineal homogénea que tenga a $\{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$ como sistema fundamental de soluciones.

c) (12.5) Halla la solución de la ecuación diferencial

$$x'''(t) - x''(t) - x'(t) + x(t) = 4\,\mathrm{sen}(t)$$

que satisface la condición inicial $x(0) = 1,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = -1.$

Resolución

a) Para comprobar que $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son funciones linealmente independientes hallemos su wronskiano.

$$W(f_1, f_2, f_3)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) \\ f_1''(t) & f_2''(t) & f_3''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (1+t)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (2+t)e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & 1+t & -1 \\ 1 & 2+t & 1 \end{vmatrix} \Longrightarrow$$

$$W(f_1, f_2, f_3)(t) = e^t\{(1+t) - t + (2+t) - (1+t) + (2+t) - t\} \Longrightarrow$$
$$W(f_1, f_2, f_3)(t) = 4e^t,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como el wronskiano no es la función nula (de hecho, es estrictamente positivo para cualquier $t \in \mathbb{R}$), podemos asegurar que las funciones $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = te^t$, $f_3(t) = e^{-t}$ son linealmente independientes.

b) Las funciones dadas pueden ser soluciones de ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes. Para ello es necesario que, si $p(r)$ es el polinomio característico asociado a la ecuación buscada, entonces

i) $r = 1$ sea una raíz, al menos doble, de $p(r)$, pues $f_1(t) = e^t$ y $f_2(t) = te^t$ han de ser soluciones de la ecuación;

ii) $r = -1$ sea una raíz, al menos simple, de $p(r)$, pues $f_3(t) = e^{-t}$ ha de ser solución de la ecuación.

Concluimos que $p(r)$ ha de tener, al menos, tres raíces (a saber, $r = 1$ doble y $r = -1$ simple), por lo que $p(r)$ ha de ser de grado, al menos, tres. Tomando $p(r)$ de grado exactamente tres, entonces

$$p(r) = (r-1)^2(r+1) = (r^2 - 2r + 1)(r+1) = r^3 - 2r^2 + r + r^2 - 2r + 1 \Longrightarrow$$

$$p(r) = r^3 - r^2 - r + 1.$$

A partir del polinomio característico $p(r)$, podemos asegurar que la ecuación diferencial lineal homogénea dada por

$$x''' - x'' - x' + x = 0$$

admite a $\{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$ como sistema fundamental, ya que

i) las soluciones de $x''' - x'' - x' + x = 0$ forman un espacio vectorial de dimensión tres, por ser una ecuación lineal homogénea de orden tres;

ii) $\{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$ son tres soluciones linealmente independientes de $x''' - x'' - x' + x = 0$.

c) Para resolver $x'''(t) - x''(t) - x'(t) + x(t) = 4\,\mathrm{sen}(t)$, a partir del apartado b), sabemos que la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$x_h(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 te^t + \alpha_3 e^{-t},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte, para hallar una solución particular de la ecuación completa, aplicaremos el método de coeficientes indeterminados tomando

$$x_p(t) = a\,\mathrm{sen}(t) + b\cos(t).$$

Derivando,

$$x_p'(t) = a\cos(t) - b\,\mathrm{sen}(t), \quad x_p''(t) = -a\,\mathrm{sen}(t) - b\cos(t), \quad x_p'''(t) = -a\cos(t) + b\,\mathrm{sen}(t),$$

y sustituyendo en la ecuación,

$$x_p'''(t) - x_p''(t) - x_p'(t) + x_p(t) = 4\,\mathrm{sen}(t) \Longrightarrow$$

$$(-a\cos(t) + b\,\mathrm{sen}(t)) - (-a\,\mathrm{sen}(t) - b\cos(t)) - (a\cos(t) - b\,\mathrm{sen}(t)) + (a\,\mathrm{sen}(t) + b\cos(t)) = 4\,\mathrm{sen}(t)$$

$$\Longrightarrow 2(-a+b)\cos(t) + 2(a + b\,\mathrm{sen}(t) = 4\,\mathrm{sen}(t) \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} -a+b=0 \\ a+b=2 \end{array}\right\} \Longrightarrow a = b = 1.$$

Por tanto, una solución particular de $x'''(t) - x''(t) - x'(t) + x(t) = 4\,\mathrm{sen}(t)$ es

$$x_p(t) = \mathrm{sen}(t) + \cos(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por todo lo anterior, la solución general de $x'''(t) - x''(t) - x'(t) + x(t) = 4\,\mathrm{sen}(t)$ es

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 t e^t + \alpha_3 e^{-t} + \mathrm{sen}(t) + \cos(t), \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Para hallar la solución que satisface la condición inicial $x(0) = 1, \ x'(0) = 1, \ x''(0) = -1$, derivamos y sustituimos.

$$x(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 t e^t + \alpha_3 e^{-t} + \mathrm{sen}(t) + \cos(t) \Longrightarrow x(0) = \alpha_1 + \alpha_3 + 1 = 1.$$

$$x'(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 (1+t) e^t - \alpha_3 e^{-t} + \cos(t) - \mathrm{sen}(t) \Longrightarrow x'(0) = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 1 = 1.$$

$$x''(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 (2+t) e^t + \alpha_3 e^{-t} - \mathrm{sen}(t) - \cos(t) \Longrightarrow x''(0) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - 1 = -1.$$

De donde, aplicando el método de eliminación gaussiana,

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{array}\right\}.$$

Por tanto, la solución de la ecuación $x'''(t) - x''(t) - x'(t) + x(t) = 4\,\mathrm{sen}(t)$ que satisface la condición inicial $x(0) = 1, \ x'(0) = 1, \ x''(0) = -1$ es

$$x(t) = \mathrm{sen}(t) + \cos(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

& - & - & - & - & - & - & - &