



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Departamento de
Matemática Aplicada

Doble Grado Ing. Civil–ADE

Matemática Aplicada

Convocatoria Ordinaria

Primer parcial

11 de junio de 2022

Apellidos, Nombre:

DNI o Pasaporte:

Responde, justificadamente, a las cuestiones planteadas en cada uno de los siguientes ejercicios.

1. (25) En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$ (con la suma de vectores y el producto por escalares usuales), considera el subespacio vectorial

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}.$$

- a) (6) Halla una base ortogonal B_1 de U .
- b) (5) Expresa $U^\perp$ mediante ecuaciones cartesianas.
- c) (6) Halla una base ortogonal B_2 de $U^\perp$.
- d) (4) Halla la proyección ortogonal sobre U del vector $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$.
- e) (4) Halla la proyección ortogonal sobre $U^\perp$ del vector $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$.

2. (25) Considera la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y + z \\ -x + y - z \end{pmatrix}.$$

- a) (6) Halla una base de $N(T)$.
- b) (6) Halla una base de $\text{Im}(T)$.
- c) (5) Halla todos los vectores cuya imagen es $(1, 1, -1)$.
- d) (8) Para la base $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, halla la matriz de T asociada a B .

3. (25) Considera la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- a) (4) T es una transformación ortogonal (isometría). ¿Por qué?
- b) (5) Halla una base del subespacio vectorial $U_1 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{v}) = \vec{v}\}$.
- c) (5) Halla una base del subespacio vectorial $U_2 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{v}) = -\vec{v}\}$.
- d) (5) ¿Es U_1 el complemento ortogonal de U_2 en $\mathbb{R}^3$?
- e) (6) ¿Qué tipo de transformación ortogonal es T ? (Da la respuesta más completa posible).

4. (25) Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ a & b & c \\ -1 & c & 3 \end{pmatrix}$$

que admite a $\lambda_1 = 1$ como valor propio con vector propio asociado $v_1 = (1, 1, 1)$.

- a) (5) Halla A .
- b) (12) Diagonaliza A por semejanza de modo que no se corresponda con una diagonalización por semejanza ortogonal (dando explícitamente la descomposición de A).
- c) (8) Diagonaliza A por semejanza ortogonal (dando explícitamente la descomposición de A).

P1.1)

(1)

$$U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0 \}$$

$$a) \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow U = \{ (\lambda, \mu, \mu, \lambda) \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

$$(\lambda, \mu, \mu, \lambda) = \lambda(1, 0, 0, 1) + \mu(0, 1, 1, 0) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\{ (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \}$ es sistema de generadores de U .

$$\begin{cases} (1, 0, 0, 1) \text{ no es múltiplo de } (0, 1, 1, 0) \\ (0, 1, 1, 0) \text{ no es múltiplo de } (1, 0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$\{ (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \}$ son linealmente independientes

$B_1 = \{ (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \}$ es una base de U .

$$\langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle = 0 \Rightarrow B_1 \text{ es ortogonal.}$$

$$b) (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1, 0, 0, 1) \rangle = 0 \\ \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (0, 1, 1, 0) \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ Cartesiana de } U^\perp$$

$$c) \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow U^\perp = \{ (\lambda, \mu, -\mu, -\lambda) \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

$$(\lambda, \mu, -\mu, -\lambda) = \lambda(1, 0, 0, -1) + \mu(0, 1, -1, 0), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \{ (1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0) \}$ es sistema de generadores de $U^\perp$.

②

$(1,0,0,-1)$ no es múltiplo de $(0,1,-1,0)$ }
 $(0,1,-1,0)$ no es múltiplo de $(1,0,0,-1)$ } $\Rightarrow$

$\{ (1,0,0,-1), (0,1,-1,0) \}$ son linealmente independientes.

$B_2 = \{ (1,0,0,-1), (0,1,-1,0) \}$ es una base de $U^\perp$.

$\langle (1,0,0,-1), (0,1,-1,0) \rangle = 0 \Rightarrow B_2$ es ortogonal.

$$d), e) \quad (1,1,1,1) = \underbrace{1(1,0,0,1) + 1(0,1,1,0)}_U + \underbrace{0(1,0,0,-1) + 0(0,1,-1,0)}_{U^\perp}$$

$$(1,1,1,1) \in U \Rightarrow p_U(\vec{v}) = \vec{v}, \quad p_{U^\perp}(\vec{v}) = 0$$

P1.21

3

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y+z \\ -x+y-z \end{pmatrix}$$

$$a) T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \\ -x+y-z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$B = \{(0, 1, 1)\}$ es una base de $N(T)$ pues $(0, 1, 1)$ genera a todos los vectores de $N(T)$ y, al ser un vector no nulo, es linealmente independiente.

$$b) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}(T) \Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.q. } T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y-z=a \\ x-y+z=b \\ -x+y-z=c \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 & b \\ -1 & 1 & -1 & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -2 & 2 & b-a \\ 0 & 2 & -2 & c+a \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -2 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & b+c \end{pmatrix} \Rightarrow (a, b, c) \in \text{Im}(T) \text{ si y solo si } b+c=0$$

④

$$b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a=\lambda, \\ b=\mu, \\ c=-\mu, \end{cases} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\{(1,0,0), (0,1,-1)\}$ es un sistema de generadores de $\text{Im}(T)$.

$$\begin{cases} (1,0,0) \text{ no es múltiplo de } (0,1,-1) \\ (0,1,-1) \text{ no es múltiplo de } (1,0,0) \end{cases} \Rightarrow$$

$\{(1,0,0), (0,1,-1)\}$ son linealmente independientes.

$\{(1,0,0), (0,1,-1)\}$ es una base de $\text{Im}(T)$.

c) $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \Phi \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Phi \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=\Phi \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Los orígenes de $(1,1,-1)$ son los vectores de la forma $\underline{(1, \lambda, \lambda)}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$d) M(T, C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Hay que justificarlo})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right) \Rightarrow M_{CB} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$M(T, B) = M_{CB} M(T, C) M_{BC} =$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

=====

P.3]

(6)

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$A = M(T, C)$$

a) C es una base ortonormal

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T$ es una transformación ortogonal

$$b) T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de U_1 .

(Hay que justificar: ¿por qué es base?)

c) $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Rightarrow$ (7)

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es una base de } U_2.$$

(Hay que justificar: ¿por qué es base?)

d) opción 1: viendo que B_1 y B_2 son ortogonales entre sí.

opción 2: A es simétrica

$U_1 \rightarrow$ Espacio propio de $\lambda = 1$

$U_2 \rightarrow$ Espacio propio de $\lambda = -1$

$\left. \begin{matrix} U_1 \rightarrow \text{Espacio propio de } \lambda = 1 \\ U_2 \rightarrow \text{Espacio propio de } \lambda = -1 \end{matrix} \right\} U_1 \text{ y } U_2 \text{ son ortogonales entre sí.}$

$$\left. \begin{array}{l} \dim U_1 = 2 \\ \dim U_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow U_1^\perp = U_2 \quad (U_1 \text{ y } U_2 \text{ "llenan" } \mathbb{R}^3)$$

$$e) \begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} - \frac{8}{27} - \frac{8}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27} =$$

$$\frac{1-16-12}{27} = -1 \Rightarrow$$

T es una transformación ortogonal inversa.

U_1 es un plano ^{vectorial} que queda fijo por T .

U_2 es una recta vectorial (ortogonal a U_1) que cambia de sentido por T .

$\Rightarrow T$ es una simetría respecto del plano U_1 .

P1.4)

9)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ a & b & c \\ -1 & c & 3 \end{pmatrix}$$

$$a) \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ a & b & c \\ -1 & c & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+a=1 \\ a+b+c=1 \\ 2+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=-1 \\ b=2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda) - (2-\lambda) - (2-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$(2-\lambda) [(2-\lambda)(3-\lambda) - 1 - 1] = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\lambda_1 = 1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (Enumerado)}$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ -z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 4 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$x = -\frac{z}{2}, y = -\frac{z}{2} \Rightarrow -\frac{z}{2} - \frac{z}{2} + z = 0 \quad \underline{OK}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

A simétrica

$\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 4$ distintos

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

c) $B^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

$\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3$

$$A(\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \vec{v}_3) = (\lambda_1 \vec{v}_1 | \lambda_2 \vec{v}_2 | \lambda_3 \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \vec{v}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Departamento de
Matemática Aplicada

Doble Grado Ing. Civil–ADE

Matemática Aplicada

Convocatoria Ordinaria

Segundo parcial

11 de junio de 2022

Apellidos, Nombre:

DNI o Pasaporte:

Responde, justificadamente, a las cuestiones planteadas en cada uno de los siguientes ejercicios.

1. (25) En el espacio afín euclídeo usual $\mathbb{R}^3$, considera los sistemas de referencia $\mathcal{R} = \{O; B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\}$ y $\mathcal{R}' = \{O'; B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}\}$, siendo $O' = (1, 1, 1)_{\mathcal{R}}$, $\vec{u}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ y $\vec{u}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Además, sean el punto $A = (2, 2, 2)_{\mathcal{R}}$ y el plano π dado por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu + 1, \\ y = \mu + 1, \\ z = \lambda + 1, \end{cases} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

en el sistema de referencia $\mathcal{R}$.

- a) (7) Halla la expresión matricial del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.
b) (4) Halla las coordenadas de O , O' y A en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$.
c) (6) Expresa π como una ecuación cartesiana en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$.
d) (5) El punto $Q = (\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})_{\mathcal{R}}$ es la proyección de A sobre π , ¿por qué?
e) (3) Calcula la distancia de A a π .
2. (25) En el plano afín euclídeo usual $\mathbb{R}^2$, con el sistema de referencia canónico $\mathcal{R} = \{O; B\}$, considera la aplicación afín

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = \left(\frac{3x + 4y + 6}{5}, \frac{4x - 3y - 2}{5} \right).$$

- a) (4) ¿Por qué T es un movimiento rígido de $\mathbb{R}^2$?
b) (6) Mediante ecuaciones paramétricas o cartesianas, halla el conjunto $F(T)$ de puntos fijos de T y la variedad invariante $I(T)$.
c) (5) ¿Qué tipo de movimiento rígido es T ? (Da la respuesta más completa posible).
d) (2) Sea C la cónica que, por medio de T , se transforma en la canónica C' de expresión reducida

$$(x')^2 = 4y'.$$

¿Qué tipo de cónica es C' ?

- e) (4) Determina las coordenadas de los elementos geométricos de C' (ejes de simetría, centro, vértices, focos, asíntotas y directriz, caso de existir).
f) (4) Determina las coordenadas de los elementos geométricos de C (ejes de simetría, centro, vértices, focos, asíntotas y directriz, caso de existir).

3. (25) Considera la ecuación diferencial

$$(t + x) dx + (t - x) dt = 0. \quad (1)$$

- a) (4) Estudia los dominios maximales de (1).
b) (4) Comprueba que (1) no es exacta.
c) (5) ¿Admite (1) un factor integrante del tipo $\mu = \mu\left(\frac{x}{t}\right)$?
d) (7) Resuelve (1) mediante el cambio $u = \frac{x}{t}$ (no siendo necesario dar los dominios).
e) (5) ¿Se puede asegurar que existe una única solución de (1) que verifica la condición inicial $x(2) = 2$? En caso afirmativo, halla dicha solución (no siendo necesario dar el dominio).

4. (25) Considera la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$ty'' + (2 - 4t)y' + 4(t - 1)y = 12. \quad (2)$$

a) (4) Estudia los dominios maximales de (2).

b) (6) Comprueba que el cambio de variable $y = \frac{x}{t}$ transforma (2) en la ecuación diferencial lineal de segundo orden y coeficientes constantes

$$x'' - 4x' + 4x = 12. \quad (3)$$

c) (8) Resuelve (3), indicando explícitamente el dominio maximal de cada solución.

d) (3) Resuelve (2), indicando explícitamente el dominio maximal de cada solución.

e) (4) ¿Cuál es el dominio maximal de la solución de (2) que satisface la condición inicial

$$y(-1) = e^{-2}, \quad y'(-1) = e^{-2}?$$

P2.11 a) $\mathcal{R} = \{O\}; \mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$\mathcal{R}' = \{O'\}; \mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

$O' = (1, 1, 1)_{\mathcal{R}}$

$\vec{u}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3; \vec{u}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3;$

$\vec{u}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$

①

$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \Rightarrow$

$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{O'P} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

$O' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \Rightarrow \vec{OO'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

$\vec{OO'} + \vec{O'P} = \vec{OP}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad (*)$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \Rightarrow$

$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (**)$

$(*), (**) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad (***)$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{BB'} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad (*4)$$

$$(*3), (*4) \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_B \right] \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}_{R'}$$

$$b) \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_R \Rightarrow 0 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}_{R'}$$

$$0' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R'} \quad \text{mes} \quad \vec{0'0'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_R \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_R + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{R'} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}_{R'}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{R'}$$

Alternative: $\vec{0'A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right]$

$$= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'} \right] = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{B'} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{R'}$$

c) Hallamos tres puntos de π .

$$\left. \begin{aligned} \lambda = \mu = 0 &\Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_R \\ \lambda = 1, \mu = 0 &\Rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_R \\ \lambda = 0, \mu = 1 &\Rightarrow P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_R \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1 P_2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'} \\ \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_1 P_3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'} \end{aligned}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son vectores directores de π .

$$\begin{matrix} P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_R \\ \text{0} \\ \text{0} \end{matrix} \Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R'}$$

Paramétricas de π en $\mathbb{R}^1$:

$$\begin{cases} x' = 0, \\ y' = \lambda, \\ z' = \mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Cartesiana de π en $\mathbb{R}^1$: $x' = 0$.

$$d) \left. \begin{aligned} \frac{7}{3} &= \lambda + \mu + 1 \\ \frac{5}{3} &= \mu + 1 \\ \frac{5}{3} &= \lambda + 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\mu = \frac{2}{3} \\ &\lambda = \frac{2}{3} \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q \in \pi$$

(4)

$$\vec{AQ} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 5/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{3} = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 0 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{AQ} \in \pi^\perp$$

$$\left. \begin{aligned} Q &\in \pi \\ \vec{AQ} &\in \pi^\perp \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q = p_\pi(A)$$

$$e) \quad d(A, \pi) = d(A, Q) = \|\vec{AQ}\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

P2.2]

5

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

a) T está expresada en el sistema de referencia canónico $R = \{0; B\}$. Por tanto, la matriz $\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$, asociada a la aplicación lineal correspondiente a T , viene dada en la base canónica B que es una base ortonormal. De esta forma, T será un movimiento rígido si la matriz es ortogonal.

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como la matriz es ortogonal y está expresada en una base ortonormal, podemos asegurar que T es un movimiento rígido.

$$b) \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

(6)

$$\begin{cases} -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{6}{5} = 0 \\ \frac{4}{5}x - \frac{8}{5}y - \frac{2}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

$\Rightarrow T$ no tiene puntos fijos $\Rightarrow F(T) = \emptyset$.

$$\begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 20/25 & -40/25 \\ -40/25 & 80/25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20/25 \\ 40/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4/5 & -8/5 \\ -8/5 & 16/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ 8/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 8y - 4 = 0 \\ -8x + 16y + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow I(T) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 1 \}$$

c) $\begin{vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{vmatrix} = \frac{-9}{25} - \frac{16}{25} = -1 \Rightarrow T$ es ~~una simetría~~ un movimiento rígido inverso.

$F(T) = \emptyset \Rightarrow T$ es una simetría deslizante.

$I(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 1\}$ es una recta
 $I(T)$ es la recta de la simetría deslizante T .

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in I(T); \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\vec{v} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ es el vector que determina el "deslizamiento".

d) $(x')^2 = 4y' \Rightarrow$ Parábola

e) $(x')^2 = 2 \cdot 2 \cdot y' \Rightarrow p = 2$

Foco: $(0, 1)$

Directriz: $y' = -1$

Eje de simetría: $x' = 0$

Vértice: $(0, 0)$

f)
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/5 \\ -6/5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Foco: } \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/5 \\ -6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/5 \\ -6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -9/5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vértice: } \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/5 \\ -6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -6/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{6}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\text{Directriz: } y' = -1 \Rightarrow \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} = -1 \Rightarrow 4x - 3y = -3$$

$$\text{Eje de simetría: } x' = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{6}{5} = 0 \Rightarrow 3x + 4y = -6$$

- * El foco y el vértice están en el eje de simetría.
- * La directriz y el eje de simetría son ortogonales.

$$\begin{cases} 4x - 3y = -3 \\ 3x + 4y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-12+18}{16+9} = \frac{-30}{25} = -\frac{6}{5} \\ y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-24+9}{16+9} = \frac{-15}{25} = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

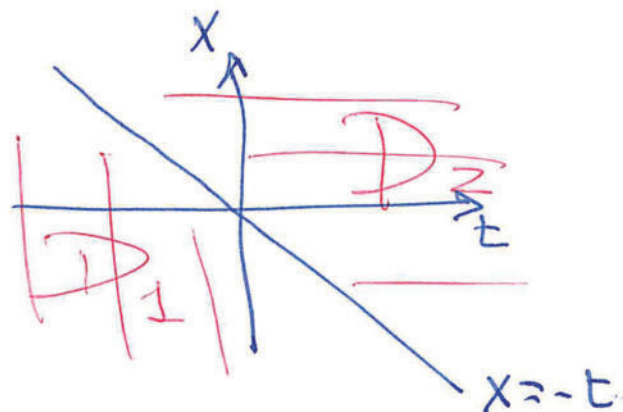
$$\frac{\left(-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}, -\frac{9}{5}\right)}{2} = \left(\frac{-2}{5}, -\frac{6}{5}\right) \Rightarrow \text{El vértice equidista del foco y la directriz.}$$

P2.3]

(9)

$$(t+x) dx + (t-x) dt = 0$$

$$a) (t+x) dx + (t-x) dt = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{x-t}{x+t}$$



Los dominios máximos
de la ecuación son
 D_1 y D_2 .

$$b) \underbrace{(t+x)}_P dx + \underbrace{(t-x)}_Q dt = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial t} = 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \end{array} \right\} \frac{\partial P}{\partial t} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{La ecuación no es exacta.}$$

$$c) \underbrace{\mu\left(\frac{x}{t}\right)(t+x)}_P dx + \underbrace{\mu\left(\frac{x}{t}\right)(t-x)}_Q dt = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \cancel{\mu'} \cdot \frac{-x}{t^2} (t+x) + \cancel{\mu}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \cancel{\mu'} \cdot \frac{1}{t} (t-x) - \cancel{\mu}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\mu'} \frac{-x}{t^2} (t+x) + \cancel{\mu} = \cancel{\mu'} \frac{1}{t} (t-x) - \cancel{\mu} \Leftrightarrow$$

$$\mu' \frac{-tx - x^2}{t^2} - \mu' \frac{t-x}{t} = -2\mu \Leftrightarrow$$

$$\mu' \frac{-tx - x^2 - t^2 + xt}{t^2} = -2\mu \Leftrightarrow$$

$$\mu' \frac{x^2 + t^2}{t^2} = 2\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{2t^2}{x^2 + t^2} = \frac{2}{\left(\frac{x^2}{t^2}\right) + 1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{2}{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1} \Rightarrow \text{como } \frac{\mu'}{\mu} \text{ es igual a}$$

una función que depende de $\frac{x}{t}$, podemos concluir que la ecuación dada admite un factor integrante del tipo $\mu = \mu\left(\frac{x}{t}\right)$.

$$d) \quad x' = \frac{x-t}{x+t} = \frac{\frac{x}{t} - 1}{\frac{x}{t} + 1} \quad \left. \vphantom{x' = \frac{x-t}{x+t}} \right\} \Rightarrow$$

$$u = \frac{x}{t} \Rightarrow x = ut \Rightarrow x' = u't + u$$

$$u't + u = \frac{u-1}{u+1} \Rightarrow u't = \frac{u-1}{u+1} - u = -\frac{1+u^2}{1+u} \Rightarrow$$

$$\int \frac{1+u}{1+u^2} du = -\int \frac{1}{t} dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{1+u^2} du + \frac{1}{2} \int \frac{2u}{1+u^2} du = -\int \frac{1}{t} dt \Rightarrow$$

$$\operatorname{arctg} u + \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = -\ln|t| + C \Rightarrow$$

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{t} + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{x^2}{t^2}\right) + \frac{1}{2} \ln t^2 = C \Rightarrow$$

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{t} + \frac{1}{2} \ln(t^2 + x^2) = C \Rightarrow$$

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{t} + \ln \sqrt{t^2 + x^2} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$e) \quad x' = f(t, x) = \frac{x-t}{x+t}$$

$$x(2) = 2 \Rightarrow (2, 2) \in D_2$$

$$f(t, x) = \frac{x-t}{x+t} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x+t - (x-t)}{(x+t)^2} = \frac{2t}{(x+t)^2}$$

f y $\frac{\partial f}{\partial x}$ son continuas en D_2 . Por tanto existe una única solución tal que $x(2) = 2$.

$$\operatorname{arctg} \frac{2}{2} + \ln \sqrt{4+4} = C \Rightarrow C = \ln \sqrt{8} + \operatorname{arctg} 1 \Rightarrow$$

$$C = \ln \sqrt{8} + \frac{\pi}{4}$$

P2.4)

(12)

$$ty'' + (2-4t)y' + 4(t-1)y = 12$$

$$a) y'' + \frac{2-4t}{t}y' + \frac{4(t-1)}{t}y = 12$$

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \{(t, y, y') \in \mathbb{R}^3 / t > 0\} \\ D_2 &= \{(t, y, y') \in \mathbb{R}^3 / t < 0\} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Dominios maximales} \\ \text{de la ecuación} \end{array}$$

$$b) y = \frac{x}{t} \Rightarrow y' = \frac{x't - x}{t^2} \Rightarrow y'' = \frac{(x''t + x' - x')t^2 - (x't - x)2t}{t^4}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{(x''t)t - 2(x't - x)}{t^3} = \frac{t^2x'' - 2tx' + 2x}{t^3}$$

$$t \frac{t^2x'' - 2tx' + 2x}{t^3} + (2-4t) \frac{tx' - x}{t^2} + 4(t-1) \frac{x}{t} = 12 \Rightarrow$$

$$\frac{t^2x'' - 2tx' + 2x}{t^2} + \frac{(2t - 4t^2)x' - (2-4t)x}{t^2} + \frac{(4t^2 - 4t)x}{t^2} = 12 \Rightarrow$$

$$\frac{t^2x'' + (-2t + 2t - 4t^2)x' + (2 - 2 + 4t + 4t^2 - 4t)x}{t^2} = 12 \Rightarrow$$

$$\frac{t^2x'' - 4t^2x' + 4t^2x}{t^2} = 12 \Rightarrow x'' - 4x' + 4x = 12$$

$$c) x'' - 4x' + 4x = 12$$

Homogénea: $x'' - 4x' + 4x = 0$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \quad (\text{ecuación característica})$$

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2 \text{ doble}$$

$$x_h(t) = a e^{2t} + b t e^{2t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Particular: $x_p(t) = \alpha \Rightarrow x_p' = 0 \Rightarrow x_p'' = 0 \Rightarrow$
 $0 - 4 \cdot 0 + 4\alpha = 12 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow x_p(t) = 3, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Solución general: $x(t) = a e^{2t} + b t e^{2t} + 3, \quad \forall t \in \mathbb{R},$
 $a, b \in \mathbb{R}.$

$$d) \quad y(t) = \frac{a e^{2t} + b t e^{2t} + 3}{t}, \quad \forall t > 0, a, b \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \frac{a e^{2t} + b t e^{2t} + 3}{t}, \quad \forall t < 0, a, b \in \mathbb{R}$$

$$e) \quad y'(t) = \frac{(2a e^{2t} + b e^{2t} + 2b t e^{2t})t - (a e^{2t} + b t e^{2t} + 3)}{t^2}$$

$$y(-1) = \frac{a e^{-2} - b e^{-2} + 3}{-1} = e^{-2}$$

$$y'(-1) = \frac{(2a e^{-2} + b e^{-2} - 2b e^{-2})(-1) - (a e^{-2} - b e^{-2} + 3)}{1} = e^{-2}$$

$$\left. \begin{aligned} ae^{-2} - be^{-2} + 3 &= -e^{-2} \\ -2ae^{-2} + be^{-2} - ae^{-2} + be^{-2} - 3 &= e^{-2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a - b + 3e^2 &= -1 \\ -3a + 2b - 3e^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a - b &= -1 - 3e^2 \\ -3a + 2b &= 1 + 3e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1-3e^2 \\ -3 & 2 & 1+3e^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1-3e^2 \\ 0 & -1 & -2-6e^2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1-3e^2 \\ 0 & 1 & 2+6e^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+3e^2 \\ 0 & 1 & 2+6e^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a = 1 + 3e^2, \quad b = 2 + 6e^2 \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{(1+3e^2)e^{2t} + (2+6e^2)te^{2t} + 3}{t}, \quad \forall t < 0$$

Aunque se ha calculado explícitamente la solución en el apartado e), para responder a la pregunta planteada solo es necesario tener en cuenta lo respondido en el apartado d) y que la condición inicial está dada en $t = -1$.