UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Doble Grado Ing. Civil–ADE

Matemática Aplicada

Primera prueba

22 de abril de 2022

Responde, **justificadamente**, a cada una de las siguientes cuestiones.

1. (25) En el espacio vectorial euclídeo usual $\mathbb{R}^3$, se considera el subespacio vectorial Y dado por las ecuaciones cartesianas

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{aligned}\right\}.$$

   a) (5) Halla una base ortonormal de B_1 de Y.

   b) (5) Comprueba que $B_2 = \{(1,1,0),(1,0,-1)\}$ es una base de $Y^\perp$.

   c) (8) Aplicando el método de Gram-Schmidt a B_2, halla una base ortonormal de $Y^\perp$.

   d) (3.5) Halla la proyección ortogonal sobre Y del vector $v = (1,1,1)$.

   e) (3.5) Halla la proyección ortogonal sobre $Y^\perp$ del vector $v = (1,1,1)$.

Resolución

Como trabajamos en el espacio vectorial euclídeo usual $\mathbb{R}^3$, el producto escalar considerado es

$$\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \quad \forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Para hallar una base del subespacio vectorial Y, primero vamos a determinar los vectores que lo forman. Para ello resolveremos el sistema formado por las ecuaciones cartesianas, para lo que aplicaremos eliminación gaussiana ala matriz ampliada asociada.

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda, \\ y = -\lambda, & \forall \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = \lambda, \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que $Y = \{(\lambda, -\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Así es claro que $B = \{(1,-1,1)\}$ es un sistema de generadores de Y que, además, está formado por vectores linealmente independientes[1]. En conclusión $B = \{(1,-1,1)\}$ es una base de Y.

Finalmente, como nos piden una base ortonormal, tenemos que dividir $(1,-1,1)$ por su norma. Ya que $\|(1,-1,1)\| = \sqrt{3}$, entonces

$$B_1 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\}$$

es una base ortonormal de Y.

b) Por definición $Y^\perp$ es el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ que son ortogonales a Y. Por tanto, para determinar si un vector (x,y,z) pertenece a $Y^\perp$ basta con comprobar si

$$\langle (x,y,x),(1,-1,1)\rangle = 0.$$

Así, $Y^\perp$ viene determinado por la ecuación cartesiana

$$x - y + z = 0.$$

[1] Recordemos que todo vector no nulo es siempre linealmente independiente.

Resolviendo esta ecuación cartesiana, es claro que los vectores de $Y^{\perp}$ son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+\mu \\ \lambda \\ -\mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

De aquí podemos asegurar que $B_2 = \{(1,1,0),(1,0,-1)\}$ es un sistema de generadores de $Y^{\perp}$. Además, ya que B es conjunto de vectores linealmente independientes[2], entonces concluimos que B_2 es una base de $Y^{\perp}$.

Veamos otro modo de contestar a este apartado. Como $Y^{\perp}$ es un subespacio complementario de Y en $\mathbb{R}^3$, tenemos que $\dim(Y) + \dim(Y^{\perp}) = \dim(\mathbb{R}^3)$. Por tanto, a partir del aparatado anterior,

$$\dim(Y^{\perp}) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(Y) = 3 - 1 = 2.$$

Ahora bien, ya que los vectores $(1,1,0),(1,0,-1)$

- son linealmente independientes, como ya se indicó anteriormente,
- pertenecen a $Y^{\perp}$ por ser ortogonales a $(1,-1,1)$,

entonces podemos asegurar que $B_2 = \{(1,1,0),(1,0,-1)\}$ es una base de $Y^{\perp}$.

c) Consideremos $u_1 = (1,1,0)$ y $u_2 = (1,0,-1)$. Para hallar una base ortogonal $\{v_1, v_2\}$ de $Y^{\perp}$, aplicamos el método de Gram-Schmidt:

- $v_1 = u_1 = (1,1,0)$.
- $v_2 = u_2 + \alpha \cdot v_1 = (1,0,-1) + \alpha(1,1,0) = (1+\alpha, \alpha, -1)$ de forma que $\langle v_2, v_1 \rangle = 0$. Así,

$$\langle (1+\alpha, \alpha, -1), (1,1,0) \rangle = 0 \Rightarrow 1 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{2} \Rightarrow v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -1 \right).$$

Por tanto, $\left\{(1,1,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)\right\}$ es una base ortogonal de $Y^{\perp}$.

Ahora, para obtener una base ortonormal de $Y^{\perp}$ basta con normalizar los vectores de la base anterior.

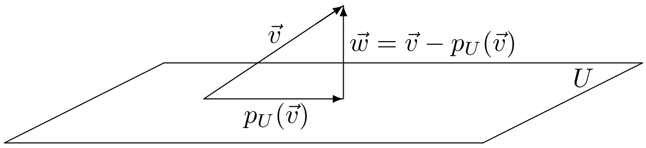
- $\|v_1\| = \|(1,1,0)\| = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.
- $\|v_2\| = \left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)\right\| = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}\right)$.

Concluimos que

$$B_2 = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3} \right) \right\}$$

es una base ortonormal de $Y^{\perp}$.

d) Para este apartado, y el siguiente, tendremos en cuenta que, si $p_U(\vec{v}) \in U$ es la proyección ortogonal de un vector $\vec{v}$ sobre un subespacio vectorial U, entonces $\vec{w} = \vec{v} - p_U(\vec{v})$ es ortogonal a U, tal como se aprecia en el siguiente esquema.



En este apartado, como queremos calcular $p_Y(1,1,1)$, entonces:

- $p_Y(1,1,1) \in Y \Rightarrow p_Y(1,1,1) = a(1,-1,1)$;
- $\vec{w} = (1,1,1) - p_Y(1,1,1) \perp Y \Rightarrow \langle \vec{w}, (1,-1,1) \rangle = 0 \Rightarrow \langle (1,1,1) - p_Y(1,1,1), (1,-1,1) \rangle = 0$.

Combinando ambas expresiones, y operando adecuadamente,

$$\langle (1,1,1) - a(1,-1,1), (1,-1,1) \rangle = 0 \Rightarrow \langle (1-a, 1+a, 1-a), (1,-1,1) \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$(1-a) - (1+a) + (1-a) = 1 - 3a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow p_Y(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

[2]Observemos que ninguno de los dos vectores es múltiplo del otro.

e) A partir de lo comentado en el apartado anterior, para calcular $p_{Y^\perp}(1,1,1)$, tenemos que

- $p_{Y^\perp}(1,1,1) \in Y^\perp \Rightarrow p_{Y^\perp}(1,1,1) = a(1,1,0) + b(1,0,-1)$;
- $\vec{w} = (1,1,1) - p_{Y^\perp}(1,1,1) \perp Y^\perp \Rightarrow \left.\begin{array}{c}\langle \vec{w}, (1,1,0)\rangle = 0 \\ \langle \vec{w}, (1,0,-1)\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{c}\langle (1,1,1) - p_{Y^\perp}(1,1,1), (1,1,0)\rangle = 0 \\ \langle (1,1,1) - p_{Y^\perp}(1,1,1), (1,0,-1)\rangle = 0\end{array}\right\}.$$

De nuevo, combinado las expresiones anteriores, y operando adecuadamente,

$$\left.\begin{array}{c}\langle (1,1,1) - a(1,1,0) - b(1,0,-1), (1,1,0)\rangle = 0 \\ \langle (1,1,1) - a(1,1,0) - b(1,0,-1), (1,0,-1)\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}\langle (1-a-b, 1-a, 1+b), (1,1,0)\rangle = 0 \\ \langle (1-a-b, 1-a, 1+b), (1,0,-1)\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}2-2a-b=0 \\ -a-2b=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}a = \frac{4}{3}, \\ b = \frac{-2}{3}.\end{array}\right.$$

Por tanto, $p_{Y^\perp}(1,1,1) = \frac{4}{3}(1,1,0) - \frac{2}{3}(1,0,-1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

d/*e*) Los apartados *d*) y *e*) se pueden hacer de manera conjunta teniendo en cuenta que, por los apartados *a*) y *c*), una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ es

$$B = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}\right) \right\},$$

siendo el primer vector de Y y los dos restantes de $Y^\perp$.

Ahora bien, si denotamos por $u_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $u_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $u_3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}\right)$, entonces (por la ortonormalidad de B) se verifica que $v = (1,1,1) = a \cdot u_1 + b \cdot u_2 + c \cdot u_3$ con $a = \langle v, u_1\rangle$, $b = \langle v, u_2\rangle$ y $c = \langle v, u_3\rangle$. Operando, $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = \sqrt{2}$ y $c = \frac{-\sqrt{6}}{3}$, de donde

$$(1,1,1) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) - \frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}\right).$$

Para acabar, teniendo en cuenta que $a \cdot u_1 \in Y$ y que $b \cdot u_2 + c \cdot u_3 \in Y^\perp$, concluimos que

- $p_Y(1,1,1) = a \cdot u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$;
- $p_{Y^\perp}(1,1,1) = b \cdot u_2 + c \cdot u_3 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) - \frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Por cierto, y como no puede ser de otro modo, los vectores $p_Y(1,1,1)$ y $p_{Y^\perp}(1,1,1)$ son ortogonales entre sí.

& - & - & - & - & - & - & - &

2. (25) En el espacio vectorial real usual $\mathbb{R}^3$, se considera la aplicación lineal T definida por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

a) (3) $U_1 = \left\{u \in \mathbb{R}^3 \mid T(u) = u\right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, ¿por qué?

b) (5.5) Halla una base del subespacio vectorial U_1.

c) (3) $U_2 = \left\{u \in \mathbb{R}^3 \mid T(u) = -u\right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, ¿por qué?

d) (5.5) Halla una base del subespacio vectorial U_2.

e) (8) Halla la matriz asociada a T con respecto a la base $B = \{(1,-1,1),(1,1,0),(1,0,-1)\}$.

Resolución

a) Para comprobar que U_1 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, consideremos u, v dos vectores cualesquiera de U_1 (esto es, $T(u) = u$ y $T(v) = v$) y λ un número real cualquiera.

- Ya que T es lineal, $T(u) = u$ y $T(v) = v$, entonces

$$T(u+v) = T(u) + T(v) = u + v \Rightarrow u + v \in U_1.$$

- Ya que T es lineal, $T(u) = u$ y λ es un número real, entonces

$$T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda u \Rightarrow \lambda u \in U_1.$$

Por tanto, U_1 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Para hallar una base de U_1 hemos de tener en cuenta que $T(u) = Mu$. Por tanto, si $u = (x,y,z)$, entonces

$$T(u) = u \Leftrightarrow Mu = u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = x \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z = y \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = z \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{array}\right\}.$$

Teniendo en cuenta que la tercera ecuación es la diferencia entre la primera y la segunda, el sistema anterior es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{array}\right\},$$

que es el mismo que se resolvió en el apartado *a*) del ejercicio 1. Por tanto, una base de U_1 es $B_1 = \{(1,-1,1)\}$.

c) Para comprobar que U_2 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, consideremos u, v dos vectores cualesquiera de U_2 (esto es, $T(u) = -u$ y $T(v) = -v$) y λ un número real cualquiera.

- Ya que T es lineal, $T(u) = -u$ y $T(v) = -v$, entonces

$$T(u+v) = T(u) + T(v) = -u - v = -(u+v) \Rightarrow u + v \in U_2.$$

- Ya que T es lineal, $T(u) = -u$ y λ es un número real, entonces

$$T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda(-u) = -(\lambda u) \Rightarrow \lambda u \in U_2.$$

Por tanto, U_2 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

d) Como en el apartado *b*), para hallar una base de U_2 tendremos en cuenta que $T(u) = Mu$. Por tanto, si $u = (x, y, z)$, entonces

$$T(u) = -u \Leftrightarrow Mu = -u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = -x \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z = -y \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = -z \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\}.$$

Teniendo en cuenta que la segunda ecuación es la opuesta de la primera y que la tercera es igual a la primera, el sistema anterior es equivalente al sistema de una ecuación

$$x - y + z = 0,$$

que es la misma que se resolvió en el apartado *b*) del ejercicio 1. Por tanto, una base de U_2 es $B_2 = \{(1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$.

e) Para hallar la matriz de T con respecto a la base $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$, podemos recurrir a la expresión $M(T, B) = M(C, B)M(T, C)M(B, C)$, siendo

- $M(T, C) = M$ la matriz dada en el enunciado;
- $M(B, C)$ la matriz de cambio de la base B a la base canónica,
- y $M(B, C)$ la matriz de cambio de la base canónica a la base B.

Para hallar $M(B, C)$, tomamos $(x, y, z)_B$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$ expresado en la base B. Entonces, ya que $(1, -1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, -1)$ están expresados en la base canónica,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_C + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} x + y + z \\ -x + y \\ x - z \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B.$$

Por tanto, la matriz que nos permite cambiar de la base B a la base canónica es

$$M(B, C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, ya que $M(B, C)$ y $M(C, B)$ son una la matriz inversa de la otra, para calcular $M(C, B)$ hallaremos la inversa de $M(B, C)$ mediante eliminación gaussiana.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{array}\right).$$

Por tanto, la matriz de cambio de la base canónica a la base B es

$$M(C,B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, por la igualdad $M(T,B) = M(C,B)M(T,C)M(B,C)$ dada al inicio del apartado,

$$M(T,B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El resultado obtenido no debe extrañarnos. De hecho, este apartado se podía haber resuelto más rápidamente teniendo en cuenta que $B = \{(1,-1,1),(1,1,0),(1,0,-1)\}$ está formada por vectores de U_1 (el primero) y U_2 (el segundo y el tercero), por lo que

- $T(1,-1,1) = (1,-1,1) \Rightarrow T(1,0,0)_B = (1,0,0)_B$;
- $T(1,1,0) = (-1,-1,0) = -(1,1,0) \Rightarrow T(0,1,0)_B = (0,-1,0)_B$;
- $T(1,0,-1) = (-1,0,1) = -(1,0,-1) \Rightarrow T(0,0,1)_B = (0,0,-1)_B$.

& - & - & - & - & - & - & - &

3. (25) En el espacio vectorial real euclídeo usual $\mathbb{R}^3$, se considera la aplicación lineal T definida por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

a) (3.5) T una transformación ortogonal, ¿por qué?

b) (2) T es una transformación ortogonal ¿propia o impropia?

c) (6) Determina los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen por T son ellos mismos.

d) (6) Determina los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen por T son sus opuestos.

e) (7.5) ¿Qué tipo concreto de transformación ortogonal es T?

Resolución

a) Puesto que

- la aplicación lineal T está definida por la matriz M con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$,
- la base canónica es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$,

entonces, para asegurar que T es una transformación ortogonal, nos bastará con comprobar que $M^{-1} = M^T$. Veamos que esto es así. Por cierto, al ser M simétrica, se verifica que $M^T = M$.

$$M \cdot M^T = M^T \cdot M = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $M \cdot M^T = M^T \cdot M = I_3$, tenemos que $M^{-1} = M^T$ y, al estar M dada con respecto a la base canónica (que es una base ortonormal), podemos afirmar que T es una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^3$.

b) Para determinar si T es propia o impropia, hallamos su determinante.

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{27} + \frac{8}{27} + \frac{8}{27}\right) - \left(-\frac{4}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27}\right) = \frac{15}{27} - \left(-\frac{12}{27}\right) = 1.$$

Por consiguiente T es una transformación ortogonal directa.

c) En este apartado nos piden hallar los vectores u de $\mathbb{R}^3$ tales que $T(u) = u$. Ahora bien, ya que M es la misma matriz que la del ejercicio 2, podemos aprovechar los cálculos del apartado *b*) de dicho ejercicio para afirmar que

$$T(u) = u \Leftrightarrow u = (\alpha, -\alpha, \alpha),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

d) En este apartado nos piden hallar los vectores u de $\mathbb{R}^3$ tales que $T(u) = -u$. En este caso podemos aprovechar los cálculos del apartado *d*) del ejercicio 2 para afirmar que

$$T(u) = -u \Leftrightarrow u = (\alpha + \beta, \alpha, -\beta),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

e) A partir de los apartados anteriores, tenemos que T es una transformación ortogonal que

- deja fijos a los vectores de la recta $\mathcal{R}$ generada por el vector $(1, -1, 1)$;
- cambia de sentido a los vectores del plano $\mathcal{P}$ generado por los vectores $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, -1)$.

Como los vectores $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, -1)$ son ortogonales al vector $(1, -1, 1)$ (esto ya se comprobó en el apartado *b*) del ejercicio 1), podemos afirmar que T es un giro alrededor de la recta $\mathcal{R}$ con ángulo de giro igual a π radianes.

& - & - & - & - & - & - & - &

4. (25) Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}.$$
con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

a) (5) La matriz A es diagonalizable, tanto por semejanza como por semejanza ortogonal, ¿por qué?

b) (15) Diagonaliza la matriz A por semejanza ortogonal.

c) (5) Calcula A^{2022}.

Resolución

a) Puesto que A es simétrica, podemos asegurar que es diagonalizable tanto por semejanza (es decir, existe una matriz P invertible tal que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ con D diagonal) como por semejanza ortogonal (esto es, existe una matriz ortogonal Q tal que $A = Q \cdot D \cdot Q^{-1} = Q \cdot D \cdot Q^T$ con D diagonal).

b) Puesto que la matriz A es la matriz M de los ejercicios 2 y 3, podemos aprovechar los cálculos realizados en ellos para hallar una diagonalización de A por semejanza ortogonal.[3]

En primer lugar, podemos asegurar que

- $u_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ es un vector propio de A con valor propio $\lambda_1 = 1$ (o sea, $Au_1 = u_1$);
- $u_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ es un vector propio de A con valor propio $\lambda_2 = -1$ (o sea, $Au_2 = -u_2$);
- $u_3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}\right)$ es un vector propio de A con valor propio $\lambda_3 = -1$ (o sea, $Au_3 = -u_3$).

Además, siendo
$$Q = \begin{pmatrix} u_1 & | & u_2 & | & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$
la matriz formada por u_1, u_2 y u_3 por columnas, entonces
$$A \cdot Q = A \begin{pmatrix} u_1 & | & u_2 & | & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au_1 & | & Au_2 & | & Au_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & | & -u_2 & | & -u_3 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} u_1 & | & u_2 & | & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = Q \cdot D, \quad \text{con } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, ya que (notando por I_3 a la matriz identidad de orden 3×3)
$$Q \cdot Q^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} = I_3,$$
tenemos que $Q^{-1} = Q^T$, por lo que Q es ortogonal. Además,
$$A \cdot Q = Q \cdot D \Rightarrow A = Q \cdot D \cdot Q^{-1} = Q \cdot D \cdot Q^T,$$
es decir, una diagonalización de A por semejanza ortogonal viene dada por
$$A = Q \cdot D \cdot Q^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

[3]Por supuesto, este apartado se puede resolver sin tener en cuenta lo hecho en los ejercicios 2 y 3. Esto es, se resolvería la ecuación característica asociada a A para ver que sus valores propios son $\lambda_1 = 1$ simple y $\lambda_2 = -1$ doble. A continuación, hallaríamos los espacios propios U_1 y U_2 asociados a cada uno de estos valores (esto es, lo hecho en los apartados *b*) y *d*) del ejercicio 2). Por último, teniendo en cuenta que el vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$ es ortogonal a los vectores propios asociados a $\lambda_2 = -1$, aplicaríamos el método de Gram-Schmidt a una base de U_2 (tal como se hizo en el apartado *c*) del ejercicio 1) para llegar a obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que permita dar la expresión de la diagonalización de A por semejanza ortogonal.

c) A partir del apartado anterior,

$$A^{2022} = (Q \cdot D \cdot Q^T)^{2022} = Q \cdot D \cdot Q^T \cdot Q \cdot D \cdot Q^T \cdots Q \cdot D \cdot Q^T \cdot Q \cdot D \cdot Q^T =$$

$$Q \cdot D \cdot I_3 \cdot D \cdot I_3 \cdots I_3 \cdot D \cdot I_3 \cdot D \cdot Q^T = Q \cdot D \cdot D \cdots D \cdot D \cdot Q^T = Q \cdot D^{2022} \cdot Q^T.$$

Ya que

$$D^{2022} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{2022} = \begin{pmatrix} 1^{2022} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2022} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2022} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,$$

podemos concluir que

$$A^{2022} = Q \cdot D^{2022} \cdot Q^T = Q \cdot I_3 \cdot Q^T = Q \cdot Q^T = I_3.$$

Para acabar, podemos observar que, gracias al ejercicio 3, sabemos que A representa un giro de π radianes en $\mathbb{R}^3$ (con respecto a una cierta recta). Por tanto, siempre que apliquemos A un número n par de veces, obtendremos un giro de $2n\pi$ radianes, esto es, todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ se quedarán fijos por "haber dado vueltas completas". Consecuentemente, $A^n = I_3$ siempre que n sea un entero par, en particular cuando $n = 2022$.

& - & - & - & - & - & - & - &