



Apellidos, Nombre:

DNI o Pasaporte:

Responde, justificadamente, a las cuestiones planteadas en cada uno de los ejercicios.^(*)

1. (20) En el espacio afín euclídeo usual $\mathbb{R}^3$ con el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; B = \{e_1, e_2, e_3\}\}$ canónico, se consideran el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{O' = (a, b, c)_{\mathcal{R}}; B' = \{v_1, v_2, v_3\}\}$ (con $v_1 = e_1 + e_3$, $v_2 = e_1 - e_3$ y $v_3 = e_2$), el punto $P = (2, 1, 2)_{\mathcal{R}}$ y el plano π definido por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda + \mu, \\ y = 1 + \lambda + 2\mu, \\ z = 3 + \lambda + 3\mu, \end{cases} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

con respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}$.

- a) (7.5) Sabiendo que $P = (3, 0, 2)_{\mathcal{R}'}$, halla las coordenadas de O' en el sistema de referencia $\mathcal{R}$.
- b) (12.5) Sea r la recta que, con respecto a $\mathcal{R}$, es ortogonal a π y pasa por P . Expresa r , mediante ecuaciones cartesianas, en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$.^(†)

2. (30) En el plano afín euclídeo usual $\mathbb{R}^2$, se considera la aplicación afín

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 1 \\ x + 1 \end{pmatrix}$$

y la elipse C dada por la expresión reducida

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

- a) (5) T es una isometría afín inversa de $\mathbb{R}^2$, ¿por qué?
- b) (5) Halla el conjunto de puntos fijos de $F(T)$ y la variedad invariante $I(T)$.
- c) (5) ¿Qué tipo de isometría afín es T ? (Da la respuesta más completa posible).
- d) (7.5) Halla la expresión general $a(x')^2 + bx'y' + c(y')^2 + dx' + ey' + f = 0$ de la elipse C' resultante de aplicar T a C .
- e) (7.5) Determina las coordenadas de los focos de C' .

^(*)Caso de usar cualquier fórmula, a excepción de la correspondiente al cálculo de la variedad $I(T)$, se deberá demostrar previamente.

^(†)Si no se resuelve completamente el apartado a, úsese el punto $O' = (2, 2, 2)_{\mathcal{R}}$ en el apartado b. Téngase en cuenta que, en tal caso, $P = (0, 0, -1)_{\mathcal{R}'}$.

3. (25) Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} (3x + 8t) dt + (3t - 2x) dx = 0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

- a) (7.5) ¿Para qué pares $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ puedes afirmar que existe una única solución de (1)?
- b) (5) La ecuación diferencial de (1) es homogénea y exacta, ¿por qué?
- c) (12.5) Resuelve (1) para $(t_0, x_0) = (-1, 1)$ (indicando explícitamente el dominio de la solución).

4. (25) Se considera la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$t^2 x'' - 2tx' + 2x = t^3. \quad (2)$$

- a) (5) Comprueba que $\varphi_1(t) = t$, definida en un intervalo maximal adecuado, es una solución de la ecuación homogénea asociada a (2).
- b) (5) Mediante el cambio $x = ty$, halla una solución $\varphi_2(t)$ de la ecuación homogénea asociada a (2) que sea linealmente independiente con $\varphi_1(t)$.
- c) (5) Justifica, por medio del wronskiano, que $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$, definidas en un intervalo maximal adecuado, son efectivamente funciones linealmente independientes.
- d) (5) Comprueba que existe un polinomio de tercer grado, definido en un intervalo maximal adecuado, que es una solución particular de (2).
- e) (5) Explicitando los intervalos maximales de definición, halla todas las soluciones de (2).

1) $\mathcal{R} = \{0\}$; $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ canónico usual

$\mathcal{R}' = \{0'\}$; $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = e_1 + e_3$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_2$
 $O = (a, b, c)_{\mathcal{R}}$

$$P = (2, 1, 2)_{\mathcal{R}} \parallel M = \begin{cases} x = 3 + \lambda + \mu, \\ y = 1 + \lambda + 2\mu, \\ z = 3 + \lambda + 3\mu, \end{cases} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

a) $(\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{B}'} = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \alpha(e_1 + e_3) + \beta(e_1 - e_3) + \gamma e_2 =$
 $(\alpha + \beta)e_1 + \gamma e_2 + (\alpha - \beta)e_3 = (\alpha + \beta, \gamma, \alpha - \beta)_{\mathcal{B}}$

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \gamma \\ \alpha - \beta \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \Rightarrow M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \Rightarrow$$

$$a = b = c = -1 \Rightarrow O' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

b) Por las parametrizaciones de π , tenemos que $(1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$ y $(1, 2, 3)_{\mathcal{B}}$ son vectores directores de π .

Si $(x, y, z)_{\mathcal{B}}$ es un vector director de r , entonces por ser r ortogonal a π :

$$\begin{cases} \langle (1,1,1), (x,y,z) \rangle = 0 \\ \langle (1,2,3), (x,y,z) \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (1, -2, 1)_B$ es un vector director de r .

Como r pasa por $P = (2, 1, 2)_R$ y tiene a $(1, -2, 1)_B$ como vector director, entonces

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 1 - 2\lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

Son ecuaciones paramétricas de r con respecto a $\mathbb{R}$.
Tomando λ como incógnita y x, y, z como parámetros

$$\begin{cases} \lambda = x - 2 \\ -2\lambda = y - 1 \\ \lambda = z - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x-2 \\ -2 & y-1 \\ 1 & z-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x-2 \\ 0 & y+2x-5 \\ 0 & z-x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \text{son cartesianas de } r \text{ en } \mathbb{R}.$$

Necesitamos el cambio de $\mathbb{R}'$ a $\mathbb{R}$. Sea un punto $X = (x, y, z)_R = (x', y', z')_{R'}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{OX} = \vec{OO'} + \vec{O'X} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} x' + y' - 1 \\ z' - 1 \\ x' - y' - 1 \end{pmatrix}_B \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} x' + y' - 1 \\ z' - 1 \\ x' - y' - 1 \end{pmatrix}_R$$

Substituyendo en las cartesianas de r con respecto a R ,

$$\left. \begin{aligned} 2(x' + y' - 1) + (z' - 1) &= 5 \\ (x' + y' - 1) - (x' - y' - 1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x' + 2y' + z' &= 8 \\ 2y' &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 2x' + 2y' + z' &= 8 \\ y' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ cartesianas de } r \text{ en } R'$$

También son válidas: $\left. \begin{aligned} 2x' + z' &= 8 \\ y' &= 0 \end{aligned} \right\}$

Otro método

Alternativa para b

$P = (2, 1, 2)_R$ y $Q = (1, 3, 1)_R$ pertenecen a r .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix} \frac{x+z+2}{2} \\ \frac{x-z}{2} \\ y+1 \end{pmatrix}_{R'}$$
 es el cambio de R a R' .

$P = (3, 0, 2)_{R'}$ y $Q = (2, 0, 4)_{R'}$ pertenecen a r (en R').

Luego $\vec{QP} = (1, 0, -2)_{B'}$ es vector director de r (en R').

$$\left. \begin{aligned} x' &= 3 + \lambda \\ y' &= 0 \\ z' &= 2 - 2\lambda \end{aligned} \right\} \text{ parametrizaci3n de } r \text{ en } R' \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x' + z' &= 8 \\ y' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ cartesianas de } r \text{ en } R'$$

Alternativa para b

P2-36

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-z=0 \end{cases} \text{ cartesianas de } r \text{ en } \mathbb{R} \text{ (hasta aquí todo B'nal)}$$

Cambio de $\mathbb{R}'$ a $\mathbb{R}$: $\vec{x} = (x, y, z)_{\mathbb{R}} = (x', y', z')_{\mathbb{R}'}$

$$\vec{0}_{\vec{x}} = \vec{0} \vec{0}' + \vec{0}' \vec{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathbb{B}} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathbb{B}'} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} x'+y'+2 \\ z'+2 \\ x'-y'+2 \end{pmatrix}_{\mathbb{R}}$$

Substituyendo en las cartesianas de r en $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2(x'+y'+2) + (z'+2) = 5 \\ (x'+y'+2) - (x'-y'+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x' + 2y' + z' = -1 \\ 2y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x' + z' = -1 \\ y' = 0 \end{cases}$$

Otro método

$P = (2, 1, 2)_{\mathbb{R}}$ y $Q = (1, 3, 1)_{\mathbb{R}}$ pertenecen a r .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathbb{R}'} = \begin{pmatrix} \frac{x+2-4}{2} \\ \frac{x-2}{2} \\ y-2 \end{pmatrix}_{\mathbb{R}'} \text{ es el cambio de } \mathbb{R} \text{ a } \mathbb{R}'.$$

$P = (0, 0, -1)_{\mathbb{R}'}$ y $Q = (-1, 0, 1)_{\mathbb{R}'}$ pertenecen a r (en $\mathbb{R}'$).

Luego $\vec{QP} = (1, 0, -2)_{\mathbb{B}'}$ es vector director de r (en $\mathbb{R}'$).

$$\begin{cases} x' = 0 + \lambda \\ y' = 0 \\ z' = -1 - 2\lambda \end{cases} \text{ parámetros de } r \text{ en } \mathbb{R}' \Rightarrow \begin{cases} 2x' + z' = -1 \\ y' = 0 \end{cases} \text{ cartesianas de } r \text{ en } \mathbb{R}'.$$

$$2) \quad T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

$$C(\text{elipse}): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a) \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

T está dada con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, que es una base ortonormal. Además,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, T es una isometría afín.

$$b) \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = x \\ x+1 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y = 1 \\ x-y = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

Sistema incompatible $\Rightarrow$ No hay puntos fijos.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(M-I)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (M-I)T(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2y=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow x-y=0$$

$$I(T) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \}$$

c) T es una simetría deslizante pues

$$*) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow T \text{ es inversa}$$

$$*) F(T) = \emptyset, I(T) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \}$$

La recta $x - y = 0$ determina la simetría.

$(1, 1)$ pertenece a la recta de simetría

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ es el vector}$$

de traslación de la simetría deslizante.

$$d) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 \\ x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = y+1 \\ y' = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y'-1 \\ y = x'-1 \end{cases}$$

$$\frac{(y'-1)^2}{4} + \frac{(x'-1)^2}{9} = 1 \Rightarrow 9(y'-1)^2 + 4(x'-1)^2 = 36 \Rightarrow$$

$$4(x')^2 - 2x' + 1 + 9(y')^2 - 2y' + 1 - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$4(x')^2 + 9(y')^2 - 8x' - 18y' - 23 = 0$$

$$e) 2 < 3 \Rightarrow \overline{c^2 + a^2 = b^2} \Rightarrow \overline{c^2 + 4 = 9} \Rightarrow \overline{c^2 = 5} \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

Focos de C : $(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$

Focos de C' : $(1+\sqrt{5}, 1), (1-\sqrt{5}, 1)$

$$3) \begin{cases} (3x+8t) dt + (3t-2x) dx = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$a) (3x+8t) dt + (3t-2x) dx = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{3x+8t}{2x-3t}$$

$f(t,x) = \frac{3x+8t}{2x-3t}$ está bien definida si $2x-3t \neq 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3(2x-3t) - (3x+8t)2}{(2x-3t)^2} \text{ está bien definida si } 2x-3t \neq 0$$

(1) admite solución única siempre que $2x_0 - 3t_0 \neq 0$.

$$b) \frac{dx}{dt} = \frac{3x+8t}{2x-3t} = \frac{3\frac{x}{t}+8}{2\frac{x}{t}-3} \Rightarrow \text{Homogénea}$$

$$\underbrace{(3x+8t)}_M dt + \underbrace{(3t-2x)}_N dx = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial x} = 3 \\ \frac{\partial N}{\partial t} = 3 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow \text{Exacta} \end{array} \right.$$

c) Homogénea

$$u = \frac{x}{t} \Rightarrow x = ut \Rightarrow x' = u't + u \Rightarrow$$

$$u't + u = \frac{3u+8}{2u-3} \Rightarrow u't = \frac{3u+8}{2u-3} - u \Rightarrow u't = \frac{-2u^2+6u+8}{2u-3}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2u-3}{u^2-3u-4} du = -2 \int \frac{1}{t} dt \Rightarrow$$

$$\ln |u^2-3u-4| = -2 \ln |t| + C \Rightarrow \ln |u^2-3u-4| + \ln t^2 = C$$

$$\Rightarrow \ln |u^2 t^2 - 3u t^2 - 4 t^2| = C \Rightarrow \ln |x^2 - 3x t - 4 t^2| = C$$

$$\Rightarrow |x^2 - 3x t - 4 t^2| = K, K > 0 \Rightarrow x^2 - 3x t - 4 t^2 = K, K \neq 0$$

$$x(-1) = 1 \Rightarrow (1)^2 - 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 4(-1)^2 = K \Rightarrow 1 + 3 - 4 = 0 = K$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x t - 4 t^2 = 0$$

Habría que comprobar, por sustitución, que sí tenemos una solución.

$$x^2 - 3t x - 4t^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3t \pm \sqrt{9t^2 + 16t^2}}{2} = \frac{3t \pm 5|t|}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} t \geq 0 \Rightarrow x = \frac{3t \pm 5t}{2} \begin{cases} 4t \\ -t \end{cases} \\ t < 0 \Rightarrow x = \frac{3t \mp 5t}{2} \begin{cases} -t \\ 4t \end{cases} \end{array} \right\} x(t) = \begin{cases} 4t, & t > 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases}$$

En cualquier caso, ambas funciones no son derivables en $t=0$.

$x(-1) = 1 \Rightarrow$ la única posibilidad es
 $x(t) = -t, \forall t < 0.$

Veamos que se verifica la ecuación:

$$x'(t) = -1$$

$$x' = \frac{3(-t) + 8t}{2(-t) - 3t} = \frac{5t}{-5t} = -1 \quad \} \text{ OK}$$

Además, $2x - 3t = -2t - 3t = -5t \neq 0 \forall t < 0.$

Conclusión: la solución de (1) es $x(t) = -t, \forall t < 0.$

Exacta

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M = 3x + 8t \Rightarrow F = \int (3x + 8t) dt \Rightarrow$$

$$F = 3xt + 4t^2 + h(x) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 3t + h'(x) = 3t - 2x \Rightarrow$$

$$h'(x) = -2x \Rightarrow h(x) = -x^2 \Rightarrow F(t, x) = 3xt + 4t^2 - x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 3tx - 4t^2 = C, C \in \mathbb{R}$$

A partir de aquí se razona como antes.

4) $t^2 x'' - 2tx' + 2x = t^3 \quad (2)$

a) $\varphi_1(t) = t \Rightarrow \varphi_1'(t) = 1 \Rightarrow \varphi_1''(t) = 0$

$$t^2 \cdot 0 - 2t \cdot 1 + 2 \cdot t = 0 \Rightarrow \text{Cumple (2)}$$

$$t^2 x'' - 2tx' + 2x = t^3 \Rightarrow x'' - \frac{2}{t}x' + \frac{2}{t^2}x = t \Rightarrow$$

Las soluciones de (2) están definidas en $\mathbb{R}^+$ o en $\mathbb{R}^-$ (como intervalos maximales).

$\varphi_1(t) = t$, $\forall t > 0$ es solución de $t^2 x'' - 2tx' + 2x = 0$

$\varphi_2(t) = t$, $\forall t < 0$ es solución de $t^2 x'' - 2tx' + 2x = 0$

b) $x = ty \Rightarrow x' = y + ty' \Rightarrow x'' = 2y' + ty'' \Rightarrow$

$$2t^2 y' + t^3 y'' - 2ty - 2t^2 y' + 2ty = 0 \Rightarrow t^3 y'' = 0 \Rightarrow$$

$$y'' = 0 \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y = t \Rightarrow \varphi_2(t) = t^2, \forall t > 0 \text{ o } \forall t < 0$$

c) $\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t^2 - t^2 = t^2 \neq 0 \quad \forall t > 0 \text{ o } \forall t < 0$

φ_1, φ_2 son linealmente independientes en $\mathbb{R}^+$ y en $\mathbb{R}^-$.

$$d) \left. \begin{aligned} x_p(t) &= a + bt + ct^2 + dt^3, \quad \forall t > 0 \text{ o } \forall t < 0 \\ x_p'(t) &= b + 2ct + 3dt^2 \\ x_p''(t) &= 2c + 6dt \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} t^2(2c + 6dt) - 2t(b + 2ct + 3dt^2) + 2(a + bt + ct^2 + dt^3) &= t^3 \\ 2ct^2 + 6dt^3 - 2bt - 4ct^2 - 6dt^3 + 2a + 2bt + 2ct^2 + 2dt^3 &= t^3 \\ 2a + 2dt^3 &= t^3 \Rightarrow a = 0, d = \frac{1}{2}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $b = c = 0$, tenemos que

$$x_p(t) = \frac{1}{2} t^3, \quad \forall t > 0 \text{ o } \forall t < 0,$$

es una solución particular de (2)

e) Las soluciones de (2) son

$$x(t) = \alpha t + \beta t^2 + \frac{1}{2} t^3, \quad \forall t > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

o

$$x(t) = \alpha t + \beta t^2 + \frac{1}{2} t^3, \quad \forall t < 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
