UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

Doble Grado Ing. Civil–ADE

Matemática Aplicada

Prueba parcial

Teoría y problemas

12 de abril de 2023

Apellidos, Nombre:

DNI o Pasaporte:

Responde, **justificadamente**, a las cuestiones planteadas en cada uno de los siguientes ejercicios.

1. (35) En el espacio vectorial euclídeo usual $\mathbb{R}^4$, se considera el subespacio vectorial U generado por los vectores $(2,3,4,-1)$, $(2,1,0,1)$, $(1,-1,-3,2)$ y $(1,0,-1,1)$.
   - *a*) (6) Halla unas ecuaciones cartesianas de U.
   - *b*) (7) Halla una base B_1 ortogonal de U.
   - *c*) (6) Halla unas ecuaciones paramétricas de $U^\perp$.
   - *d*) (7) Halla una base B_2 ortogonal de $U^\perp$.
   - *e*) (9) Halla la proyecciones ortogonales del vector $v = (3,3,3,3)$ sobre U y $U^\perp$.

2. (30) En el espacio vectorial usual $\mathbb{R}^3$ se consideran la base $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}.$$
   - *a*) (6) Halla una base de $\mathrm{N}(T)$.
   - *b*) (6) Halla una base de $\mathrm{Im}(T)$.
   - *c*) (8) Expresa, en la base B, la matriz asociada a T.
   - *d*) (4) Halla la imagen de $(x,y,z)_B$ en la base B.
   - *e*) (6) Halla la imagen de $(x,y,z)_C$ en la base C.

3. (15) En el espacio vectorial usual $\mathbb{R}^2$ se considera la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por la matriz
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$
con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
   - *a*) (3.5) T es una isometría lineal impropia, ¿por qué?
   - *b*) (3.5) Halla el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ formado por los vectores v tales que $T(v) = v$.
   - *c*) (3.5) Halla el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ formado por los vectores v tales que $T(v) = -v$.
   - *d*) (4.5) ¿Qué tipo concreto de isometría lineal es T?

4. (20) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix}a & 2 & -2\\2 & b & 2\\-2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
   - *a*) (8) Halla a y b sabiendo que $u_1 = (1,-1,1)$ es un vector propio de A.
   - *b*) (6) Diagonaliza A por semejanza no ortogonal (esto es, $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ con P matriz no ortogonal).
   - *c*) (6) Diagonaliza A por semejanza ortogonal (esto es, $A = Q \cdot D \cdot Q^T$ con Q matriz ortogonal).

   Observación: Si no sabes resolver el apartado a, considera la matriz $A = \begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\2 & -1 & -2\\1 & -2 & 2\end{pmatrix}$ en los apartados b y c.

1) $U = L(\{(2,3,4,-1),(2,1,0,1),(1,-1,-3,2),(1,0,-1,1)\})$

a) $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in U \Rightarrow$ Existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = \lambda_1(2,3,4,-1)+\lambda_2(2,1,0,1)+\lambda_3(1,-1,-3,2)+\lambda_4(1,0,-1,1)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}2\\3\\4\\-1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\\2\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = x_1\\ 3\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 = x_2\\ 4\lambda_1 -3\lambda_3-\lambda_4 = x_3\\ -\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4 = x_4\end{array}\right\} \quad (1)$$

Veamos cuando es compatible este sistema.

$$\begin{pmatrix} 2&2&1&1&x_1\\3&1&-1&0&x_2\\4&0&-3&-1&x_3\\-1&1&2&1&x_4\end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} -1&1&2&1&x_4\\3&1&-1&0&x_2\\4&0&-3&-1&x_3\\2&2&1&1&x_1\end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1&-1&-2&-1&-x_4\\3&1&-1&0&x_2\\4&0&-3&-1&x_3\\2&2&1&1&x_1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3-4F_1\\F_4-2F_1}]{F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1&-1&-2&-1&-x_4\\0&4&5&3&x_2+3x_4\\0&4&5&3&x_3+4x_4\\0&4&5&3&x_1+2x_4\end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-F_2]{F_3-F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1&-1&-2&-1&-x_4\\0&4&5&3&x_2+3x_4\\0&0&0&0&x_3-x_2+x_4\\0&0&0&0&x_1-x_2-x_4\end{pmatrix}$$

Para que (1) sea compatible es necesario que

$$\left.\begin{array}{l} -x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2-x_4=0 \end{array}\right\}.$$

Estas son unas ecuaciones cartesianas de U.

b) Por los cálculos del apartado a, sabemos que U tiene dimensión igual a 2.

Como $(2,3,4,-1)$ y $(2,1,0,1)$ son dos vectores de U linealmente independientes (obsérvese que ninguno de los dos es ~~múltiplo~~ múltiplo del otro), podemos asegurar que $\{(2,3,4,-1),(2,1,0,1)\}$ es una base de U.

Para obtener una base ortogonal de U, aplicamos Gram-Schmidt a la base $\{(2,3,4,-1),(2,1,0,1)\}$

- $u_1=(2,3,4,-1)$
- $u_2=(2,1,0,1)+\alpha(2,3,4,-1)$ de forma que $\langle u_2,u_1\rangle=0$.

$$\langle u_2,u_1\rangle=\langle(2,1,0,1)+\alpha(2,3,4,-1),(2,3,4,-1)\rangle$$

$$=\langle(2,1,0,1),(2,3,4,-1)\rangle+\alpha\langle(2,3,4,-1),(2,3,4,-1)\rangle$$

$$=(4+3+0-1)+\alpha(4+9+16+1)=6+\alpha\cdot 30=0\Longleftrightarrow$$

$\alpha = \frac{-6}{30} = \frac{-1}{5} \Rightarrow u_2 = (2,1,0,1) - \frac{1}{5}(2,3,4,-1) = \left(\frac{8}{5}, \frac{2}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{6}{5}\right)$

$\Rightarrow \left\{(2,3,4,-1), \left(\frac{8}{5}, \frac{2}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{6}{5}\right)\right\}$ es base ortogonal de U

$\Rightarrow \{(2,3,4,-1), (4,1,-2,3)\} = B_1$ es base ortogonal de U.

c) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \langle (0,-1,1,1), (x_1,x_2,x_3,x_4) \rangle = 0 \\ \langle (1,-1,0,-1), (x_1,x_2,x_3,x_4) \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$(0,-1,1,1), (1,-1,0,-1)$ son vectores de $U^\perp$.

*) $(0,-1,1,1), (1,-1,0,-1)$ son linealmente independientes (pues ninguno de los dos es múltiplo del otro).

*) $\dim U + \dim U^\perp = \dim \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim U^\perp = 4 - \dim U$

$\Rightarrow \dim U^\perp = 4 - 2 = 2$

Por tanto, $\{(0,-1,1,1), (1,-1,0,-1)\}$ es una base de $U^\perp$.

Si (x_1, x_2, x_3, x_4) pertenece a $U^\perp$ entonces existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1 (0,-1,1,1) + \lambda_2 (1,-1,0,-1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_2, \\ x_2 = -\lambda_1 - \lambda_2, \\ x_3 = \lambda_1, \\ x_4 = \lambda_1 - \lambda_2, \end{cases} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Estas son unas ecuaciones paramétricas de $U^\perp$.

d) Aplicando Gram-Schmidt a $\{(0,-1,1,1),(1,-1,0,-1)\}$ obtendremos una base ortogonal de $U^\perp$.

$v_1 = (0,-1,1,1)$

$v_2 = (1,-1,0,-1) + \alpha(0,-1,1,1)$ de forma que $\langle v_2, v_1\rangle = 0$.

$$\begin{aligned}\langle v_2, v_1\rangle &= \langle (1,-1,0,-1) + \alpha(0,-1,1,1), (0,-1,1,1)\rangle \\ &= \langle (1,-1,0,-1),(0,-1,1,1)\rangle + \alpha\langle (0,-1,1,1),(0,-1,1,1)\rangle \\ &= (0+1+0-1) + \alpha(0+1+1+1) = 0 + \alpha\cdot 3 = 0 \Rightarrow \alpha = 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow B_2 = \{(0,-1,1,1),(1,-1,0,-1)\}$ es base ortogonal de $U^\perp$.

e) $v = (3,3,3,3) = a(2,3,4,-1) + b(4,1,-2,3) + c(0,-1,1,1) + d(1,-1,0,-1)$

pues $B = B_1 \cup B_2$ es una base de $\mathbb{R}^4$. Además, como B_1 es base ortogonal de U y B_2 es base ortogonal de $U^\perp$, tenemos que B es una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$.

Por tanto, aplicando ortogonalidad,

$$a = \frac{\langle (3,3,3,3),(2,3,4,-1)\rangle}{\langle (2,3,4,-1),(2,3,4,-1)\rangle} = \frac{6+9+12-3}{4+9+16+1} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

$$b = \frac{\langle (3,3,3,3),(4,1,-2,3)\rangle}{\langle (4,1,-2,3),(4,1,-2,3)\rangle} = \frac{12+3-6+9}{16+1+4+9} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

$$c = \frac{\langle (3,3,3,3),(0,-1,1,1)\rangle}{\langle (0,-1,1,1),(0,-1,1,1)\rangle} = \frac{0-3+3+3}{0+1+1+1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$d = \frac{\langle (3,3,3,3),(1,-1,0,-1)\rangle}{\langle (1,-1,0,-1),(1,-1,0,-1)\rangle} = \frac{3-3+0-3}{1+1+0+1} = \frac{-3}{3} = -1$$

Así;

$$(3,3,3,3) = \underbrace{\frac{4}{5}(2,3,4,-1) + \frac{3}{5}(4,1,-2,3)}_{\in U} + \underbrace{(0,-1,1,1) - (1,-1,0,-1)}_{\in U^\perp}$$

$$\frac{4}{5}(2,3,4,-1) + \frac{3}{5}(4,1,-2,3) = (4,3,2,1) = proy_U(v)$$

$$(0,-1,1,1) - (1,-1,0,-1) = (-1,0,1,2) = proy_{U^\perp}(v)$$

2) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

a)
$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_B = xT\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_B + yT\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_B + zT\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_B =$$

$$xT\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + zT\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}x+y+2z\\-x+y\\x+y+2z\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_B \in N(T) \text{ si y sólo si } \left.\begin{array}{l}x+y+2z=0\\-x+y=0\\x+y+2z=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y+2z=0\\-x+y=0\\x+y+2z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&2&0\\-1&1&0&0\\1&1&2&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&2&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+z=0\\y+z=0\\0=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x=-z\\y=-z\\0=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\lambda,\\y=\lambda,\\z=-\lambda,\end{array}\right. \lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_B = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}_B,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}_B\right\}$ es una base de $N(T)$

$\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $N(T)$ "en canónica".

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ es un sistema de generadores de Im(T). Veamos si estos vectores son linealmente independientes.

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+2c=0 \\ -a+b=0 \\ a+b+2c=0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ El rango de la matriz es dos, por lo que "sobra" un vector. Tomaremos (2,0,2) como vector sobrante al no tener pivote en su columna.

Concluimos que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de Im(T).

c)

$M(T, B, C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ por los cálculos hechos en el apartado a.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, B) \arrow[r, "M(T,B,C)"] \arrow[dr, "{M(T,B,B)=?}"'] & (\mathbb{R}^3, C) \arrow[d, "M(C,B)"] \\
& (\mathbb{R}^3, B)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x+y \\ x+z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B \Rightarrow M(B,C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M(C,B) = (M(B,C))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Por eliminación gaussiana:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$M(T,B,B) = M(C,B)\cdot M(T,B,C) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$M(T,B,B) = \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/2 + y/2 \\ \frac{3}{2}x + y/2 + 2z \\ -x/2 - y/2 \end{pmatrix}_B$

e) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = ?$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y-z}{2} \\ \frac{x-y+z}{2} \\ \frac{-x+y+z}{2} \end{pmatrix}_B$$

$$T\begin{pmatrix} \frac{x+y-z}{2} \\ \frac{x-y+z}{2} \\ \frac{-x+y+z}{2} \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{x+y-z}{2} \\ \frac{x-y+z}{2} \\ \frac{-x+y+z}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x+y-z}{2} + \frac{x-y+z}{2} + 2\frac{-x+y+z}{2} \\ -\frac{x+y-z}{2} + \frac{x-y+z}{2} \\ \frac{x+y-z}{2} + \frac{x-y+z}{2} + 2\frac{-x+y+z}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ -y+z \\ y+z \end{pmatrix}_C$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ -y+z \\ y+z \end{pmatrix}$$

3) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$M(T,C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

a) La base canónica de $\mathbb{R}^2$ es una base ortonormal y la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es ortogonal, pues

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, T es una isometría lineal.

Como

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0-1 = -1,$$

concluimos que T es impropia.

b) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y$

$$\{v \in \mathbb{R}^2 \,/\, T(v) = v\} = L\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

c)

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y$$

$$\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid T(v) = -v \} = L\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

d) T es una simetría en el plano con respecto a la recta $x = y$.

4)

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & b & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

a) $$\begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & b & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-4 \\ 4-b \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-3 = \lambda \cdot 1 \Rightarrow \lambda = -3 \Rightarrow \begin{pmatrix} a-4 \\ 4-b \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a-4 = -3 \\ 4-b = 3 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 8 - 8 - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) =$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 - 16 - 12 + 12\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -9 & 27 \\ -3 & & -3 & 18 & -27 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & \lfloor 0 \end{array}$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3 \text{ doble.}$$

$\lambda = -3 \Rightarrow v = (1, -1, 1)$ por el apartado a.

$\underline{\lambda = 3}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$x - y + z = 0 \Rightarrow x = y - z \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array}\right\} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes (pues no son múltiplo el uno del otro).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = PDP^{-1}.$$

c) Necesitamos que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. y ser A simétrica

Por la construcción, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal a los otros dos vectores. Pero $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no son ortogonales entre sí.

Aplicando Gram-Schmidt,

$(-1,0,1) + \alpha(1,1,0)$ tal que se verifique que $\langle (-1,0,1) + \alpha(1,1,0), (1,1,0) \rangle = 0$. De aquí, $-1 + 2\alpha = 0$, luego $\alpha = \frac{1}{2}$.

Así, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A asociados a $\lambda = 3$ y, además, ortogonales entre sí.

Hay que normalizar todos los vectores.

$(1,-1,1) \Rightarrow \|(1,-1,1)\| = \sqrt{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$(1,1,0) \Rightarrow \|(1,1,0)\| = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow \left\|\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = QDQ^T$$

con $QQ^T = I$.

4) Alternativa (sin lograr hacer el apartado a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(2-\lambda)^2 - 4 - 4 + (1+\lambda) - 4(2-\lambda) - 4(2-\lambda)$

$= -(1+\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2) - 8 + 1 + \lambda - 16 + 8\lambda$

$= -4 + 4\lambda - \lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 23 + 9\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & -9 & 27 \\ 3) & & 3 & 0 & -27 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & \underline{|0} \end{array}$$

$\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$\underline{\lambda = -3}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \\ 0 & 12 & -24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & -24 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -z \\ y = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right\} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow v' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda=3}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$x-2y-z=0 \Rightarrow x=2y+z \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x=2\lambda+\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{array}\right\} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes (pues no son múltiplo el uno del otro)

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A=PDP^{-1}$$

c) Necesitamos que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Por los cálculos de b y ser A simétrica, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es ortogonal a los otros dos vectores.

Pero $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no son ortogonales entre sí.

Aplicando Gram-Schmidt,

$(1,0,1)+\alpha(2,1,0)$ tal que se verifique que $\langle(1,0,1)+\alpha(2,1,0),(2,1,0)\rangle=0$. De aquí, $2+5\alpha=0$, luego $\alpha=\frac{-2}{5}$.

Así, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1/5\\-2/5\\1\end{pmatrix}$ son vectores propios de A asociados a $\lambda=3$ y, además, ortogonales entre sí.

Hay que normalizar todos los vectores.

$$(1,-2,-1) \Rightarrow \|(1,-2,-1)\|=\sqrt{6} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{-2}{\sqrt6},\frac{-1}{\sqrt6}\right)$$

$$(2,1,0) \Rightarrow \|(2,1,0)\|=\sqrt{5} \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0\right)$$

$$\left(\frac{1}{5},\frac{-2}{5},1\right) \Rightarrow \left\|\left(\frac{1}{5},\frac{-2}{5},1\right)\right\|=\sqrt{\frac{6}{5}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{-2}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

$$Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt6 & 2/\sqrt5 & 1/\sqrt{30}\\ -2/\sqrt6 & 1/\sqrt5 & -2/\sqrt{30}\\ -1/\sqrt6 & 0 & 5/\sqrt{30}\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix} \Rightarrow A=QDQ^T$$

con $QQ^T=I$.