UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos matemáticos de la Física IV
Primer Parcial (Primera parte). 26 de enero de 2009.

- *Entrega los ejercicios por separado.*
- *Duración de la primera parte: 1 hora 45 minutos. Puntuación máxima: 60.*

1. [15 puntos] Considera las funciones

$$\varphi_1(t) = e^t,\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_2(t) = t + e^t,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

   (a) Calcula $W(\varphi_1, \varphi_2)$.
   (b) ¿Son φ_1, φ_2 linealmente independientes en el espacio $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$? Razona tu respuesta.
   (c) ¿Existe alguna ecuación del tipo

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0,$$

   con $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas, que tenga a φ_1 y φ_2 como soluciones? Razona tu respuesta.

2. [15 puntos] Encuentra la transformada de Laplace de la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' + 2x' - 3x = 1, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

3. [15 puntos] Considera el problema con condiciones de contorno

$$\begin{cases} x'' + 4x = 0, \\ x(0) = x(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases}$$

   ¿Tiene una única solución? Razona tu respuesta.

4. [15 puntos] Considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^\pi \left\{ (y'(x))^2 - 4(y(x))^2 \right\} dx, \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$$

   Determina, razonadamente, cuáles de las siguientes funciones son extremales de dicho funcional:

   (a) $y_1(x) = \operatorname{sen} 4x,\ \forall x \in [0, \pi]$;
   (b) $y_2(x) = \cos 2x,\ \forall x \in [0, \pi]$;
   (c) $y_3(x) = \operatorname{sen} 2x,\ \forall x \in [0, \pi]$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos matemáticos de la Física IV
Primer Parcial (Segunda parte). 26 de enero de 2009.

- *Duración de la segunda parte: 2 horas. Puntuación máxima: 40*

En este ejercicio vamos a realizar una estimación de $\int_0^1 e^{t^2} dt$. Para ello seguiremos los siguientes pasos:

1. [8 puntos] Comprueba que $\varphi_1(t) = e^{-t^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, es una solución de la ecuación diferencial
$$x'' + 2tx' + 2x = 0.$$

2. [8 puntos] Aplicando el método de reducción de orden, halla una solución $\varphi_2(t)$ que sea linealmente independiente con $\varphi_1(t)$.

3. [8 puntos] Calcula, a partir de los apartados anteriores, la solución del problema de valores iniciales
$$\begin{cases} x'' + 2tx' + 2x = 0, \\ x(0) = 0, \ x'(0) = 1. \end{cases}$$

4. [8 puntos] Resuelve nuevamente el problema de valores iniciales del apartado anterior mediante el método de series de potencias.

   Nota: Es suficiente dar la relación de recurrencia y las condiciones iniciales (esto es, los dos primeros términos) que permiten calcular los coeficientes de la serie resultante.

5. [8 puntos] Estima el valor de $\int_0^1 e^{t^2} dt$ considerando los ocho primeros términos de la serie hallada en el apartado anterior.