UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos matemáticos de la Física IV
Primer Parcial (Primera parte). 11 de febrero de 2010.

- *Entrega los ejercicios por separado.*
- *Duración de la primera parte: 1 hora 45 minutos. Puntuación máxima: 50.*

1. Considera la ecuación diferencial de primer orden

$$x' + 5t\,x = 2t(t^2+1).$$

   a) [7] Determina las zonas de validez del cambio de variable $s = t^2$ y los posibles dominios para la ecuación transportada.

   b) [8] Resuelve la ecuación aplicando el cambio de variable $s = t^2$.

   c) [7] Resuelve el problema de valores iniciales (precisando el intervalo maximal de definición de la solución)

$$\begin{cases} x' + 5t\,x = 2t(t^2+1), \\ x(-2) = 1. \end{cases}$$

2. Decide, de forma razonada, la validez de cada una de las siguientes afirmaciones.

   a) [7] La solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} (t^2+1)\,x' + te^{t^2} = 0, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

   tiene un máximo relativo en $t = 0$.

   b) [7] Sean $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ linealmente independientes. Entonces $W(f,g)(t) \neq 0\ \ \forall t \in \mathbb{R}$.

   c) [7] Sea Λ la clase de funciones que admiten transformada de Laplace. Sea $f \in C^1([0,+\infty[)$ tal que $f \in \Lambda$. Entonces $f' \in \Lambda$.

   d) [7] Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, todas las soluciones de la ecuación diferencial

$$x'' + 5t\,x' + \left(\frac{3t+1}{t^2-4t+8}\right)x = \cos t$$

   se pueden desarrollar como serie de potencias centrada en t_0 con radio de convergencia $R \geq 2$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos matemáticos de la Física IV
Primer Parcial (Segunda parte). 11 de febrero de 2010.

- *Entrega los ejercicios por separado.*
- *Duración de la segunda parte: 1 hora 45 minutos. Puntuación máxima: 50.*

1. Considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] := \int_0^\pi \Big((y'(x))^2 - 2\ln(y(x))\Big)dx, \qquad y(0) = y(\pi) = 1.$$

   a) [7] Determina con precisión el dominio de $\mathcal{F}$.
   b) [7] Escribe la ecuación de Euler-Lagrange asociada al funcional dado.
   c) [7] La función $y_0(x) \equiv 1$, ¿es una extremal de $\mathcal{F}$?
   d) [7] ¿Alcanza $\mathcal{F}$ su mínimo global en la función y_0 dada anteriormente?

2. Considera la ecuación diferencial

$$\Big(2 + \operatorname{sen}(e^x)\Big)x' + t = 0.$$

   a) [7] Justifica que tal ecuación diferencial es exacta.
   b) [8] Halla una función $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no constante que satisfaga la condición $V(0,0) = 0$ y tal que las soluciones $x = x(t)$ de la ecuación diferencial verifiquen la expresión

$$V(t, x(t)) = cte.$$

   c) [7] Para la función $V(t,x)$ calculada en b), justifica que la ecuación

$$V(t, x(t)) = 0$$

   define de manera implícita una función $x = x(t)$ en un entorno de $t = 0$.