UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos matemáticos de la Física IV
Primer Parcial (Primera parte). 18 de febrero de 2011.

- *Entrega los ejercicios por separado.*
- *Duración de la primera parte: 1 hora 30 minutos. Puntuación máxima: 40.*

1. [10] Calcula un factor integrante, que sea función de $t^2 + x^2$, para la ecuación

$$t + x\,x' = 0.$$

2. [10] Calcula un sistema fundamental para la ecuación

$$x'' - 3x' + 2x = 0$$

y, a partir de tal sistema, construye explícitamente un isomorfismo entre el espacio de soluciones de la ecuación y el espacio $\mathbb{R}^2$.

3. [10] Justifica, de manera razonada, si la función

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 5, \\ e^{t-5}, & 5 \le t, \end{cases}$$

pertenece o no a la clase Λ. En caso afirmativo, calcula la transformada de Laplace de dicha función.

4. [10] Justifica, de manera razonada, si es verdadero o falso que la ecuación

$$t\,x'' + 2x' + t\,x = 0$$

admite infinitas soluciones analíticas en $t_0 = 0$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos matemáticos de la Física IV
Primer Parcial (Segunda parte). 18 de febrero de 2011.

- *Entrega los ejercicios por separado.*
- *Duración de la segunda parte: 2 horas. Puntuación máxima: 60.*

1. [30] Con objeto de resolver la ecuación diferencial

$$t\,x' + x = 2\,t^3\,x^3, \tag{1}$$

se considera el cambio de variables

$$y = \sqrt{t\,x}.$$

a) Determina las zonas de validez del cambio de variable y los posibles dominios para la ecuación transportada.

b) Calcula todas las soluciones, de la ecuación diferencial (1), cuyas gráficas están contenidas en el primer cuadrante del plano (t, x), esto es, en el conjunto

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0,\ x > 0\}.$$

Además, para cada solución precisa su intervalo maximal de definición.

c) Resuelve el problema de valores iniciales formado por la ecuación diferencial (1) y la condición inicial $x(1) = 1$.

2. [30] Se considera el funcional de acción

$$\mathcal{F}[y] := \int_1^e \left[x(y'(x))^2 + \frac{5(y(x))^2}{x} + 8x^2 y(x) \right] dx\,, \quad y(1) = 1,\ y(e) = e^3\,.$$

a) ¿Alcanza $\mathcal{F}$ su mínimo sobre la función $y_1(x) = (1+e+e^2)x - (e+e^2)$, $\forall x \in [1, e]$?

b) ¿Es la función $y_2(x) = x^3$, $\forall x \in [1, e]$, una extremal del funcional $\mathcal{F}$?

c) Calcula todas las extremales del funcional $\mathcal{F}$.