

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
Métodos matemáticos de la Física IV  
Examen Final. Primer Parcial. 9 de julio de 2010

- *Entrega los ejercicios en hojas separadas.*
- *Las respuestas han de ser justificadas adecuadamente.*

Selecciona **TRES** ejercicios.

1. Considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = t e^{x^2}, \\ x(1) = 3. \end{cases}$$

¿Es estrictamente creciente su solución?

2. Considera el funcional de acción

$$\mathcal{F}[y] = \int_{-1}^1 \left( (y'(x))^2 + \frac{y(x)}{1+y(x)} \right) dx, \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

- (a) Describe con precisión el dominio del funcional.
- (b) Encuentra una función  $\Phi = \Phi(y, p)$  tal que, si  $y = y(x)$  es una extremal de  $\mathcal{F}$ , se verifica que  $\Phi(y(x), y'(x)) = cte$ .
- (c) ¿Alcanza  $\mathcal{F}$  su mínimo sobre la función  $y(x) \equiv 0$ ?
3. Considera las funciones  $\phi_1(t) = \frac{1}{t}$ ,  $\phi_2(t) = t$  definidas en  $]0, \infty[$ . ¿Forman estas funciones un sistema fundamental para alguna ecuación del tipo

$$x'' + a_1(t) x' + a_2(t) x = 0,$$

siendo  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$  funciones continuas en  $]0, \infty[$ ?

4. Considera la ecuación diferencial

$$t^4 x'' + (2t^3 - 3t^2) x' - 4x = 0.$$

¿Están acotadas sus soluciones en un entorno de  $+\infty$ ?

(Sugerencia: emplea un cambio de variable temporal adecuado.)