UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos matemáticos de la Física IV.
Convocatoria de junio. Primera parte. 11 de julio de 2012.

- *Entrega los ejercicios en hojas separadas.*
- *Las respuestas han de ser justificadas adecuadamente.*
- *El examen ha de ser realizado a bolígrafo (azul o negro).*
- *Duración: 1hora y 45 minutos.*

Selecciona **SOLO TRES** ejercicios.

1. Sean las funciones

$$\varphi_1(t) := t^3,\ \forall x \in \mathbb{R}; \qquad \varphi_2(t) := t^4,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

   a) ¿Son φ_1, φ_2 linealmente independientes en el espacio $C^1(\mathbb{R})$?

   b) ¿Es $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ un sistema fundamental para alguna ecuación del tipo

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0,$$

   con a_0, a_1 funciones continuas sobre $\mathbb{R}$?

   c) Encuentra, si es posible, una ecuación del tipo anterior, con funciones a_i definidas y continuas sobre $]0, +\infty[$, de manera que $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ sea un sistema fundamental suyo.

2. Se considera la ecuación

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - 7)x = 0,\ t > 0.$$

   a) Si aplicamos el cambio de variables $t = e^s$, ¿se transforma la ecuación dada en una lineal de coeficientes constantes?

   b) Encuentra (si existe alguna) las soluciones $x = x(t)$ de la ecuación dada que verifican que $\lim\limits_{t\to 0}(t^{\sqrt{7}}x(t)) = -2$.

3. Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 \left[\frac{y'(x)^2}{2} + (y(x)+1)^4\right] dx, \quad y(0) = y(1) = -1\,.$$

   a) Describe con precisión el dominio de $\mathcal{F}$.

   b) ¿Cuál es la ecuación de Euler-Lagrange asociada a $\mathcal{F}$?

   c) ¿Es la función $y_0(x) \equiv -1$ una extremal de $\mathcal{F}$?

   d) ¿Alcanza $\mathcal{F}$ su mínimo sobre la función y_0? Si así fuera, ¿es y_0 la única función donde $\mathcal{F}$ lo alcanza?

4. Sea la ecuación

$$(1+t^2)x' + 2tx + 4 = 0.$$

   a) ¿Es exacta esta ecuación?

   b) La función $\mu(t, x) = 2 + \cos t$, ¿es un factor integrante de esta ecuación?

   c) Encuentra la(s) solución(es) que cumplen la condición inicial $x(0) = 0$, indicando el intervalo maximal de definición.