UNIVERSIDAD DE GRANADA. Métodos Matemáticos de la Física IV
Convocatoria ordinaria de junio. Primer Parcial. 27 de junio de 2011

- *Entrega los ejercicios en hojas separadas.*
- *Las respuestas han de ser justificadas adecuadamente.*
- *El examen ha de ser realizado a bolígrafo (azul o negro).*

Selecciona **SOLO TRES** ejercicios.

1. Considera la ecuación
$$x'' - \frac{2(1+t^2)}{t}x' + \frac{2(1+t^2)}{t^2}\,x = 0, \quad t > 0. \tag{1}$$
   (a) Encuentra una solución particular de (1) del tipo $\varphi_1(t) = k\,t, \quad t > 0$.
   (b) Usando el método de reducción del orden, calcula otra solución de (1) que sea linealmente independiente con φ_1.
   (c) Encuentra la solución φ_2 de (1) que cumple $\varphi_2(2011) = 0$, $\varphi_2'(2011) = 1$.
   (d) Calcula $W(\varphi_1, \varphi_2)(t)$. ¿Depende de t?

2. (a) Calcula una función $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q = Q(t,x)$, con $Q(0,0) = 1$, de manera que la ecuación
$$5t + 2x + Q(t,x)x' = 0 \tag{2}$$
   sea exacta.
   (b) Halla una función $V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $V = V(t,x)$, tal que las soluciones $x = x(t)$ de (2) cumplan que
$$V(t, x(t)) = cte.$$
   (c) Justifica si el problema
$$\begin{cases} V(t,x(t)) = cte \\ x(0) = 0 \end{cases}$$
   determina implícitamente una función $x : \,]-\varepsilon, \varepsilon[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ para algún $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

3. Considera el funcional
$$\mathcal{F}[y] = \int_0^{2\pi} \left[y'(x)^2 - \cos(y(x)) \right] dx\,, \qquad y(0) = 0,\ y(2\pi) = 2\pi\,.$$
   (a) Describe con precisión el dominio $\mathcal{D}$ del funcional.
   (b) ¿Alcanza el funcional su mínimo sobre la función $y(x) = x,\ x \in [0, 2\pi]$?

4. Considera la ecuación lineal
$$x'' + \frac{x'}{t} - e^t x = 0, \quad t > 0. \tag{3}$$
   (a) ¿Forman $\phi_1(t) = \frac{1}{t}$ y $\phi_2(t) = \frac{1}{t^2}$ (ambas definidas en $\mathbb{R}^+$) un sistema fundamental de (3)?
   (b) Determina un punto $t_0 \in \mathbb{R}$ de manera que todas las soluciones de (3) sean desarrollables en serie de potencias centradas en t_0 y con radio de convergencia al menos 5.
   (c) ¿Existe alguna solución no trivial (es decir, $x \not\equiv 0$) de (3) que esté acotada sobre algún intervalo de la forma $]0, \varepsilon[$ con $\varepsilon > 0$?