

Relación de problemas nº 1

① Describe en cada caso los posibles dominios D donde está definida la ecuación diferencial y los posibles intervalos de definición I de las soluciones dadas

(i) $x' = 1 + \ln(1 - t^2 + x^2)$; $x(t) = t$ (ii) $x' = \frac{x}{\sin(t^2 + x^2)}$; $x(t) = 0$

(iii) $x' = \frac{x-1}{3x^2-t}$; $x(t)$ cumple $x^3 - tx + t = 1$, $x(0) = 1$
(en este caso no es necesario que calcules I , pero sí debes probar que existe)

(iv) $x' = -x + f(t)$ donde $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ continua; $x(t) = \int_0^t e^{s-t} f(s) ds$

(v) $x' = x + \frac{1}{t} - \ln|t|$; $x(t) = \ln(-t)$

② Decide (con buenas razones) si la afirmación es correcta o falsa

(a) La función $x(t) = t^{1/3}$, $t \in \mathbb{R}$, es solución de $x' = \frac{1}{3x^2}$

(b) La función $x(t) = |t|t$, $t \in \mathbb{R}$, es solución de $x' = 2|t|$

(c) Todas las soluciones de $x' = 1 + t^2 + x^2$ son funciones crecientes

(d) Todas las soluciones de $x' = e^x + 1$ son de clase C^2

(e) Todas las soluciones de $x' = e^x + 1$ son convexas

(f) La solución de $x' = t^2 + t + x^2$ que cumple $x(0) = 0$, alcanza un máximo en $t = 0$.

(g) El problema de funciones implícitas $t^2 + 2x^2 = 1$, $x(1) = 0$, tiene una única solución.

Relación de problemas nº 2

(*) (3) Se aplica el cambio de variables $x = \tan y$ a la ecuación $x' = t^2(1+x^2)$.

(i) Determina las zonas de validez de este cambio y el dominio de la ecuación transportada al plano (t, y) .

(ii) Resuelve la ecuación de partida.

(4) Considera la ecuación

$$x' = \sqrt{1-x^2} \arcsen x.$$

Aquí $\arcsen$ representa la rama principal; es decir $\arcsen : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(i) Determina el dominio de definición de esta ecuación.

(ii) Considera el cambio de variable $x = \sen y$. Determina las regiones de validez de dicho cambio y aplícalo a la ecuación dada.

(iii) Resuelve la ecuación.

Relación de problemas nº 3

⑤ La ecuación de Bernoulli tiene la forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^n$$

donde $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas y $n \in \mathbb{R}$.

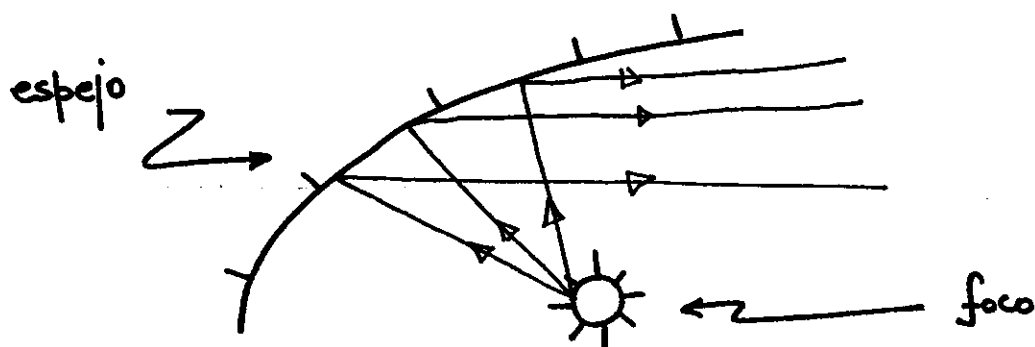
(i) Comprueba que el cambio de variable $z = x^\alpha$ de $\{x > 0\}$ en $\{z > 0\}$ transforma una ecuación de Bernoulli en otra del mismo tipo. Encuentra un exponente apropiado para que la ecuación se transforme en una lineal ($n=0$).

(ii) Resuelve el problema

$$x' = x + t\sqrt{x}, \quad x(0) = 1$$

¿Está definida la solución en $(-\infty, +\infty)$?

⑥ Se ha colocado un foco luminoso y se pretende construir un espejo de manera que los rayos reflejados sean paralelos

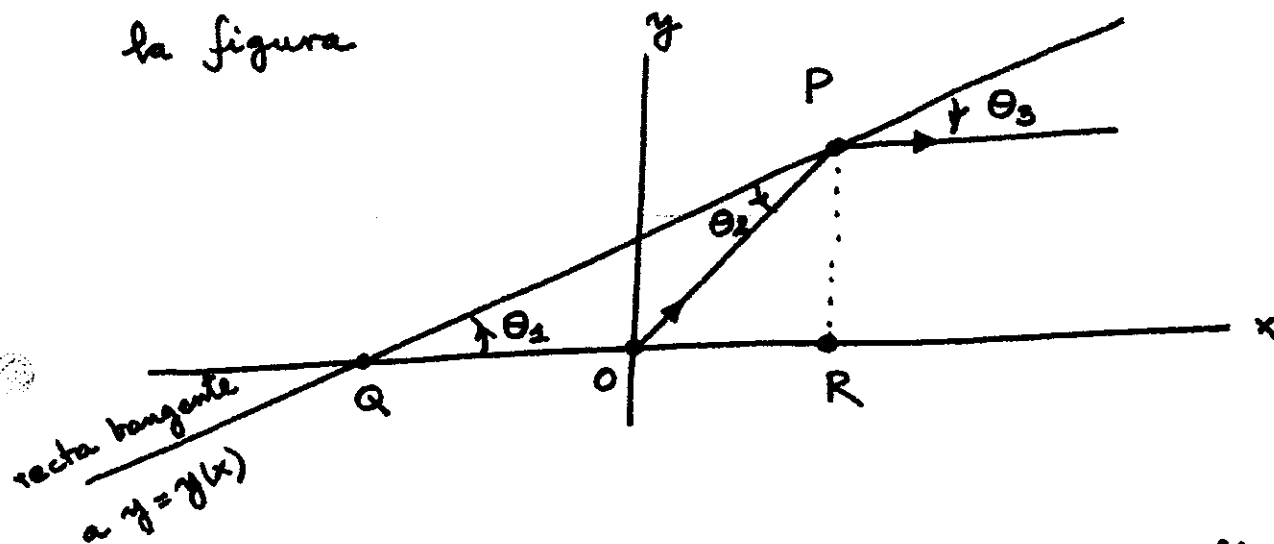


Situamos en el foco el origen de coordenadas de un plano (x, y) y hacemos coincidir la dirección del eje x con la de los rayos reflejados.

Buscaremos una curva del tipo $y = y(x)$ y supondremos

$$x > 0, \quad y(x) > 0, \quad y'(x) > 0.$$

i) Sea $P = (x, y(x))$ un punto cualquiera de la curva. Observa la figura



El ángulo de incidencia Θ_2 debe coincidir con el reflejado Θ_3 .

Deduce de la figura que se cumple $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$.

ii) Deduce la ecuación diferencial que cumple $y = y(x)$ a partir de la fórmula

$$\tan \Theta_1 = \frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}$$

iii) Resuelve la ecuación obtenida en ii) y comprueba que el espejo ha de ser un arco de parábola.

[L. Elsgoltz. Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional.
Editorial Mir. Página 40].

(*) (7) Encuentra un cambio de variable $y = \gamma(x)$ que transforme

$$x' = ch x - \frac{1}{4} t$$

en una ecuación de Riccati. Utiliza este cambio para hallar la solución que cumple $x(0) = 0$.

(8) En los dominios con agujeros la condición de exactitud no implica la existencia de un potencial. Vemos un ejemplo en el plano agujereado.

(i) Sea V una función de clase C^2 en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Demuestra

$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{-1}^1 \frac{\partial V}{\partial t}(s, 1) ds,$$

donde $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (-1, 1)$. Encuentra fórmulas análogas

para $V(P_3) - V(P_2)$, $V(P_4) - V(P_3)$, $V(P_1) - V(P_4)$ si

$P_3 = (-1, -1)$ y $P_4 = (1, -1)$.

(ii) En las condiciones de (i) demuestra que se cumple

$$-\int_{-1}^1 \frac{\partial V}{\partial t}(s, 1) ds - \int_{-1}^1 \frac{\partial V}{\partial x}(-1, s) ds + \int_{-1}^1 \frac{\partial V}{\partial t}(s, -1) ds + \int_{-1}^1 \frac{\partial V}{\partial x}(1, s) ds = 0.$$

(iii) Las funciones $P(t, x) = -\frac{x}{t^2 + x^2}$, $Q(t, x) = \frac{t}{t^2 + x^2}$

cumplen la condición de exactitud en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ pero no existe $V \in C^2(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ de manera que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = P, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = Q \text{ en } \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

(*) 9 Encuentra:

- (i) una ecuación exacta que admita el factor integrante $\mu(t, x) = t \cdot x$
- (ii) un factor integrante para las ecuaciones lineales
- (iii) un factor integrante para las ecuaciones de variables separables
- (iv) un factor integrante para la ecuación homogénea $x' = q\left(\frac{x}{t}\right)$
- (v) todos los campos conservativos $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de clase C^1 , tales que

$$F_2(x_1, x_2) = -x_2.$$

(*) 10 En ocasiones una ecuación diferencial se puede resolver si se intercambian los papeles de las variables

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad \rightsquigarrow \quad t' = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t, x)}$$

En este ejercicio tratamos de comprender este procedimiento.

Dada una función $x = \varphi(t)$, $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t_0) = x_0$; se dirá que φ es localmente invertible en t_0 si existen intervalos abiertos U, V con $t_0 \in U$, $x_0 \in V$ tales que la restricción de φ , $\varphi: U \rightarrow V$, es biyectiva. La función $t = \psi(x)$, $\psi: V \rightarrow U$, inversa de $\varphi: U \rightarrow V$, se llama inversa local.

i) Se supone φ de clase C^1 y $\varphi'(t_0) \neq 0$. Justifica la existencia de una inversa local ψ [Se sabe que en este caso también ψ es de clase C^1]. Justifica la fórmula

$$\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(\psi(x))}, \quad x \in V.$$

ii) Sea $x = \varphi(t)$ una solución de $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. Se supone que $f(t_0, x_0) \neq 0$. Demuestra que φ tiene una inversa local $t = \psi(x)$ que cumple $t' = \frac{1}{f(t, x)}$, $t(x_0) = t_0$.

iii) Halla la solución de $x' = \frac{1}{t + \sin x}$, $x(0) = \frac{\pi}{2}$.

Relación de problemas nº 6

(*) (11) Decide en cada caso si es cierto que el funcional $F[y]$ alcanza un mínimo en la función $y(x)$.

i) $F[y] = \int_0^{3\pi/2} \{y'(x)^2 - y(x)^2\} dx, y(0) = y(3\pi/2) = 0$

$y(x) \equiv 0$

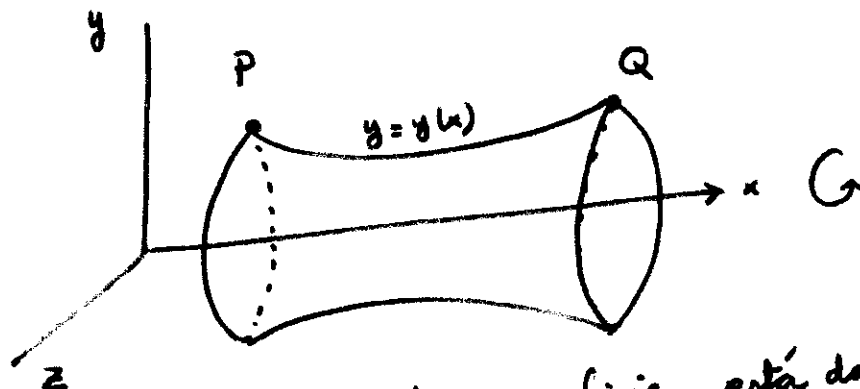
ii) $F[y] = \int_0^1 \{ \frac{1}{2} y'(x)^2 + \omega y(x) \} dx, y(0) = y(1) = \pi$

$y(x) \equiv \pi$

iii) $F[y] = \int_0^\pi \{ y'(x)^2 - y(x)^4 \} dx, y(0) = y(\pi) = 0$

$y(x) = \sin x.$

(*) (12) Sea $y = y(x)$ una curva en el plano x, y que une dos puntos $P = (a, A)$ y $Q = (b, B)$. En el espacio x, y, z se rota la curva alrededor del eje x y se obtiene una superficie de revolución.



Se sabe que el área de esta superficie está dado por

$$A[y] = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1+y'(x)^2} dx,$$

Encuentra la ecuación de Euler-Lagrange asociada y calcula las extremales.

(13) i) Considera las funciones

$$\varphi_1(t) = e^t, \varphi_2(t) = \sin t, \quad t \in I = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Construye una ecuación lineal homogénea

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0; \quad a_0, a_1 \in C(I),$$

de manera que φ_1 y φ_2 formen un sistema fundamental.

ii) Sean φ_1 y φ_2 dos funciones de clase C^2 en un intervalo abierto I . Demuestra que φ_1, φ_2 forman un sistema fundamental de alguna ecuación lineal homogénea si y sólo si $W(\varphi_1, \varphi_2)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

(14) i) ¿Forman las funciones $\varphi_1(t) = \cosh t$, $\varphi_2(t) = e^t$, $\varphi_3(t) = e^{-t}$, $\varphi_4(t) = \cos t$, un sistema fundamental de $x'''' - x = 0$? (Junio 2001)

ii) ¿Forman las funciones $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t^3$, $\varphi_3(t) = t^5$, un sistema fundamental de alguna ecuación del tipo

$$x''' + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

con funciones a_2, a_1, a_0 continuas en $(-\infty, +\infty)$? (Julio 2000)

iii) ¿Son las funciones $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t^3$, $\varphi_3(t) = t^5$, linealmente independientes en $(-\infty, +\infty)$?

(15) Calcula un sistema fundamental de la ecuación

$$x'' + \frac{2}{t}x' + x = 0, \quad t \in (0, \infty)$$

[Sugerencia: $y = tx$]

(*) (16) Decide de forma razonada la validez de cada afirmación

i) la solución de $x'' + 4x = 1$, $x(0) = \frac{5}{4}$, $x'(0) = 0$ cumple

$$x(\pi) = \frac{5}{4}.$$

ii) la ecuación $x' = 3x + t^3$ admite una solución polinómica.

iii) la solución de $x'' + 2x = 1 + t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$, cumple

$$x(\pi) = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

iv) la solución de $x'' + 2x = 3 \cos t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, cumple

$$x(2\pi) = 3 - 2 \cos(2^{3/2} \pi).$$

v) la solución de $x'' + x' + x = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ cumple

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

vi) el cambio de variables $\sqrt{t} x = y$ transforma la ecuación

$$t^2 x'' + t x' + (t^2 - \frac{1}{4}) x = 0$$

en una ecuación de coeficientes constantes.

vii) existe una ecuación lineal y homogénea, de coeficientes constantes y de orden 7, que admite las soluciones

$$f_1(t) = (t^3 + 2t^4) \cos 2t, \quad f_2(t) = t e^{-t}$$

(17) Resolver $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = \sin t$
 $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ }

* (18) Decide de forma razonada la validez de cada afirmación

i) La función $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 2-t & \text{si } t \in (1, \infty) \end{cases}$, está en la clase

Λ y su transformada viene dada por $\mathcal{L}f = F$,

$$F(s) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{si } s \in [0, 1] \\ \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} & \text{si } s \in (1, \infty). \end{cases}$$

ii) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y 2π -periódica. Se cumple que f está en la clase Λ y su transformada está dada por

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} f(t) dt, \quad s > 0.$$

$$[\text{Sugerencia: } \int_0^\infty = \sum_{n=0}^\infty \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}].$$

iii) La solución de $x' = x + 2y$, $y' = -2y$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ cumple $x(3) = 6$, $y(3) = 2$.

* (19) Dada una función $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se define una transformada

$$\mathcal{E}f(s) = \int_0^\infty \sin(ts) f(t) dt.$$

i) Prueba que si f es continua y cumple $|f(t)| \leq M e^{-\sigma t}$, $t \geq 0$ con $M \geq 0$ y $\sigma > 0$, entonces $\mathcal{E}f$ está definida en $\mathbb{R}$.

ii) Para la clase de funciones Λ^* definida por el apartado anterior, encuentra una relación entre $\mathcal{E}f$ y $\mathcal{E}f''$ cuando $f \in C^2[0, \infty)$, $f, f', f'' \in \Lambda^*$.

(20) Se define $S_n(t) = \sum_{k=0}^n t^k$, $n \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Demuestra las identidades

$$S_{n+1}(t) = t S_n(t) + 1, \quad S_{n+1}(t) = t^{n+1} + S_n(t).$$

A partir de aquí concluye que si $t \neq 1$

$$S_n(t) = \frac{t^{n+1} - 1}{t - 1}$$

y si $|t| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$.

Por derivación e integración de esta fórmula suma las

series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$.

(21) Decide de forma razonada qué afirmaciones son correctas

(i) la función $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n^2}$ está bien definida para $t \in (-1, 1)$

y alcanza un mínimo en $t=0$.

(ii) las funciones $\sin(e^t)$, $\tan t$, $\ln(1-t)$, $t^{1/3}$, $\frac{1}{t+e^t}$ son analíticas en $t_0=0$.

(iii) la función $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ es analítica en $t_0=0$ y cumple

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}, \quad |t| < 1.$$

(iv) la función $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(t) = \arctan t$, es analítica en $t_0=0$ y cumple

$$\arctan t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}, \quad |t| < 1.$$

(v) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 3^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{\pi}{6}.$

(*) (22) ¿Son correctas las afirmaciones siguientes?

- i) La solución de $x' + \frac{2t}{1+t^2}x = 0$, $x(0) = 1$, es analítica en $t_0 = 0$ y tiene radio de convergencia $R = \infty$
- ii) La solución de $x'' + tx' + \frac{1}{1+t+t^2}x = 0$, $x(1) = 0$, $x'(1) = 1$ es analítica en $t_0 = 1$ y tiene radio de convergencia $R > 1$
- iii) Las soluciones de $t^2x'' + tx' + 3x = \sin t$ son analíticas en $t_0 = 0$ con radio de convergencia $R = \infty$
- iv) Idéntica situación a la de iii) pero $t_0 = 1$, $R \geq 1$.

(23) Considera la ecuación

$$x'' - t^3x = 0.$$

- i) Calcula el desarrollo en serie de potencias de las soluciones si el centro t_0 es el origen
- ii) Determina el radio de convergencia de las series obtenidas.

* (24) Se considera la ecuación diferencial

$$t^2 x'' + t(1+t^3)x' + x = 0, \quad t \in (0, \infty).$$

- Describe el comportamiento de las soluciones en un entorno del origen.
- Construye un sistema fundamental en serie de Frobenius centrada en $t_0 = 0^+$.

* (25) En este ejercicio se pretende mostrar que no siempre se pueden usar las series de Frobenius para el estudio de una singularidad.

- Sea $x(t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, $t \in (0, R)$; donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y la serie $\sum c_n t^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$. Discute, según los valores de α , el valor del límite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha x(t)$$

¿Qué ocurre si $\alpha \in \mathbb{Q}$?

- Sea $x(t) = e^{1/t}$. Calcula ~~límite~~ $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha x(t)$ y concluye que esta función no puede admitir un desarrollo de Frobenius centrado en $t_0 = 0$.

- Construye una ecuación diferencial de la forma

$$t^3 x'' + t \alpha x' + \beta x = 0,$$

donde α y β son constantes, que admita la solución $x(t) = e^{1/t}$.

- Encuentra un sistema fundamental de la ecuación encontrada en iii).

Fín del primer cuatrimestre