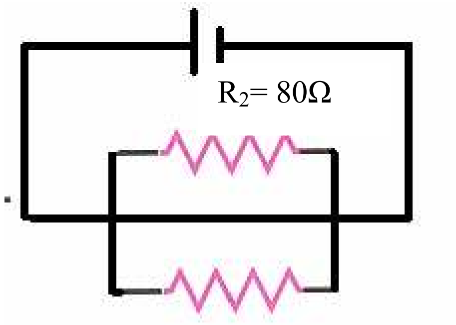
Relación de problemas: Tema10

1.-Dos conductores de resistencias 40 y 80 Ω están conectados en paralelo a una fuente de tensión constante. La cantidad de calor liberada en la primera resistencia es de $3\cdot 10^5$ J en un cierto tiempo.
a) ¿Cuánto calor se liberará en la segunda resistencia en el mismo tiempo?
b) ¿Y si ambas resistencias se conectan en serie?

a)



R_1=40Ω

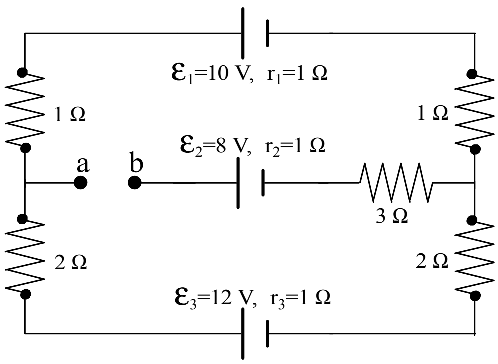
$$Q_1 = 3\cdot 10^5\, J = VI_1 t$$
$$Q_2 = VI_2 t$$
$$Q_1 = VI_1 t = \frac{V^2}{R_1} t = 3\cdot 10^5\, J \Rightarrow V = \sqrt{\frac{3\cdot 10^5 R_1}{t}} = \sqrt{\frac{12\cdot 10^6}{t}}$$
$$Q_2 = P_2 t = \frac{V^2}{R_2} t = \frac{12\cdot 10^6}{R_2}\frac{\cancel{t}}{\cancel{t}} = 1.5\cdot 10^5\, J$$

$$\boxed{Q_2 = 1.5\cdot 10^5\, J}$$

b)

$$Q_{120\Omega} = \frac{3\cdot 10^5 40}{120} = 1\cdot 10^5\, J$$
$$\boxed{Q_{120\Omega} = 1\cdot 10^5\, J}$$

2.-A partir del circuito representado en la figura, determinar:
a) La ddp entre los puntos a y b de la figura.
b) Suponiendo que a y b estén conectados, la corriente en la pila de 12 V.



a)

$$8I = 12 - 10 \Rightarrow I = \frac{1}{4}A$$

$$V_A - V_B = -\frac{1}{2} + 12 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 8 = 2.75V$$

$$\boxed{V_{AB} = 2.75V}$$

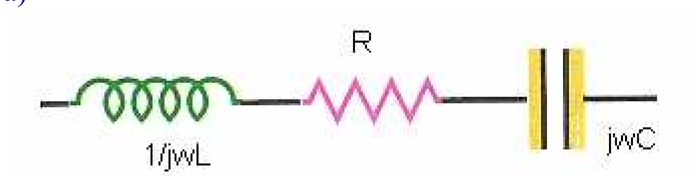
b)

$$7I_1 - 3I_2 = 8 - 10 \Rightarrow 7I_1 - 3I_2 = -2$$
$$9I_2 - 3I_1 = 12 - 8 \Rightarrow \quad 9I_2 - 3I_1 = 4$$

$$\boxed{I_2 = 0.40\,A}$$

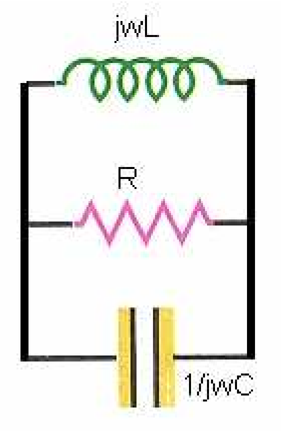
3.- Calcular la impedancia equivalente de un circuito LRC
a) cuando los tres elementos están en serie.
b) cuando los tres elementos están en paralelo.

a)



$$\boxed{Z_{serie} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

b)



$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{R}+\frac{1}{j\omega L}+j\omega C=\frac{j\omega L+R+\left(R+j\omega L\right)j\omega C}{j\omega RL}$$

$$Z=\frac{j\omega RL}{j\omega L+R+j\omega CR-\omega^{2}LC}=\frac{j\omega RL}{\left(R-\omega^{2}LC\right)+j\omega\left(L+RC\right)}$$

$$Z=\frac{j\omega RL\left[\left(R-\omega^{2}LC\right)-j\omega\left(L+RC\right)\right]}{\left(R-\omega^{2}LC\right)^{2}+\omega^{2}\left(L+RC\right)^{2}}$$

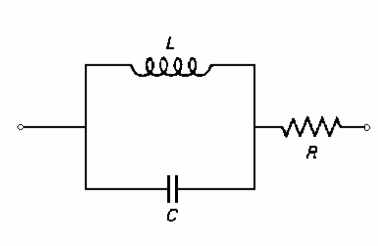
$$Z=\frac{\omega^{2}RL\left(L+RC\right)+j\omega RL\left(R-\omega^{2}LC\right)}{R^{2}+\omega^{4}L^{2}C^{2}-2R\omega^{2}LC+\omega^{2}\left(L^{2}+R^{2}C^{2}+2RLC\right)}=$$

$$Z=\frac{\omega^{2}RL\left(L+RC\right)+j\omega RL\left(R-\omega^{2}LC\right)}{R^{2}+\omega^{4}L^{2}C^{2}-2R\omega^{2}LC+\omega^{2}L^{2}+\omega^{2}R^{2}C^{2}+\omega^{2}2RLC}$$

$$Z=\frac{\omega^{2}RL\left(L+RC\right)+j\omega RL\left(R-\omega^{2}LC\right)}{R^{2}+\omega^{2}\left(L^{2}+R^{2}C^{2}\right)+\omega^{4}L^{2}C^{2}}$$

$$\boxed{Z=\frac{\omega^{2}RL\left(L+RC\right)+j\omega RL\left(R-\omega^{2}LC\right)}{R^{2}+\omega^{2}\left(L^{2}+R^{2}C^{2}\right)+\omega^{4}L^{2}C^{2}}}$$

4.-En la práctica una autoinducción presenta efectos de capacidad y resistencia. El modelo utilizado para representar una autoinducción real es el que aparece en la figura: la autoinducción en paralelo con un condensador, y esta agrupación en serie con una resistencia. Demostrar que si la frecuencia de la corriente que circula por el montaje es pequeña los efectos del condensador se hacen despreciables.



$$\frac{1}{Z_{1}}=\frac{1}{j\omega L}+j\omega C=\frac{1-\omega^{2}LC}{j\omega L}$$

$$Z_{equi}=\frac{j\omega L}{1-\omega^{2}LC}+R$$

$$\boxed{Z_{equi}=\frac{j\omega L}{1-\omega^{2}LC}+R}$$

5.- La resistencia de una estufa eléctrica consiste en un alambre incrustado en un material eléctricamente aislante que, a su vez, se encuentra dentro de una cubierta metálica. El alambre tiene una resistencia de 20 Ω a temperatura ambiente (23.0ºC) y la resistividad tiene un coeficiente de temperatura $\alpha = 2.8 \cdot 10^{-3}$ (ºC)$^{-1}$. La estufa funciona conectada a una línea de 120 V.
a) Cuando se enciende, ¿cuánta corriente toma y cuánta potencia disipa?
b) Cuando ha alcanzado una temperatura de 280ºC, ¿cuánta corriente toma y cuánta potencia disipa?

a) $$I = \frac{V}{R} = \frac{120\ \text{V}}{20\ \Omega} = 6.0\ \text{A}$$

$$P = IV = (6.0\ \text{A})\,(120\ \text{V}) = 720\ \text{W}$$

$$\boxed{6\,A,\ 720\,W}$$

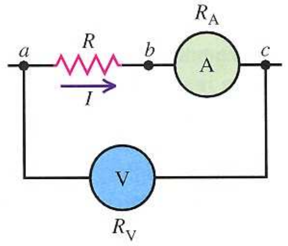
b) $$\text{T} = \ 280°\text{C},\ \ R = R_0(1+\alpha\Delta T) = 20\ \Omega\left[1+(2.8\cdot 10^{-3}(\text{C}°)^{-1}\cdot(257°\text{C})\right] = 34.4\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120\ \text{V}}{34.4\ \text{A}} = 3.49\ \text{A}$$

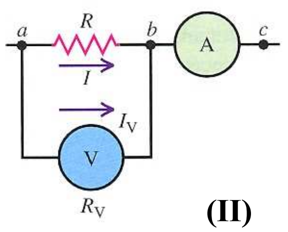
$$P = (3.49\ \text{A})\cdot(120\ \text{V}) = 419\ \text{W}$$

$$\boxed{3.49\,A,\ 419\,W}$$

6.- Sean V e I, respectivamente, las lecturas del voltímetro y del amperímetro que se muestran en la figura, y sean R_V y R_A sus resistencias equivalentes. Debido a las resistencias de los instrumentos de medida, la resistencia R no es simplemente igual a V/I. Calcule la resistencia y la potencia disipada en el resistor con el circuito conectado:
a) como en la figura (I),
b) como en la figura (II).
c) Obtenga los resultados numéricos considerando V = 12 V, I = 0.1 A, R_V = 106 Ω y R_A = 2 Ω.
d) ¿Qué montaje resulta más adecuado?



(I)



(II)

a) (I) $V = IR + IR_A \Rightarrow R = \dfrac{V}{I} - R_A \Rightarrow R < \dfrac{V}{I}$

$$P = I^2R = I^2\left(\frac{V}{I} - R_A\right) = IV - I^2R_A$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R = \dfrac{V}{I} - R_A \\ P = IV - I^2R_A \end{array}}$$

b) (II) $I = \dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R_V} \Rightarrow R = \dfrac{VR_V}{IR_V - V} = \dfrac{V}{I - (V/R_V)} \Rightarrow R > \dfrac{V}{I}$

$$P = \frac{V^2}{R} = V\left(\frac{V}{R}\right) = V\left(I - \frac{V}{R_V}\right) = IV - \frac{V^2}{R_V}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R = \dfrac{V}{I - (V/R_V)} \\ P = IV - \dfrac{V^2}{R_V} \end{array}}$$

c) (I) $R = \dfrac{V}{I} - R_A = \dfrac{12\ \text{V}}{0.1\ \text{A}} - 2\ \Omega = 118\ \Omega$

$$P = IV - I^2R_A = (0{,}1\ \text{A} \cdot 12\ \text{V}) - ((0{,}1\ \text{A})^2 \cdot 2\ \Omega) = 1{,}18\ \text{W}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R = 118\Omega \\ P = 1.18W \end{array}}$$

(II) $R = \dfrac{V}{I - (V/R_V)} = \dfrac{12\ \text{V}}{0{,}1\ \text{A} - (12\ \text{V}/10^6\ \Omega)} = 120{,}01\ \Omega$

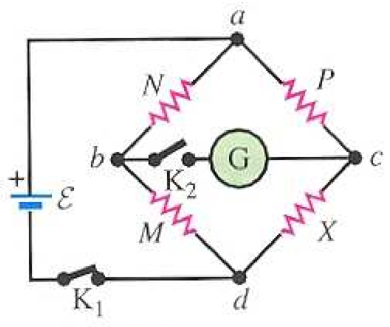
$$P = IV - \frac{V^2}{R_V} = (0{,}1\ \text{A} \cdot 12\ \text{V}) - \frac{(12\ \text{V})^2}{10^6\ \Omega} = 1{,}20\ \text{W}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R = 120.01\ \Omega \\ P = 1.2\ W \end{array}}$$

d) El (II)

7.- El circuito que se muestra en la figura se conoce como puente de Wheatstone, se utiliza para determinar el valor de un resistor desconocido *X* por comparación con tres resistores *M*, *N* y *P* cuyas resistencias se pueden modificar. Con los interruptores K_1 y K_2 cerrados, se modifican estos resistores hasta que la corriente en el galvanómetro G es cero; se dice entonces que el puente está equilibrado.

a) En estas condiciones, obtenga la resistencia desconocida en función de las restantes.
b) Si el galvanómetro G muestra una desviación nula cuando $M = 850.0\ \Omega$, $N = 15.00\ \Omega$ y $P = 33.48\ \Omega$, ¿cuál es la resistencia desconocida X?
c) Con los valores anteriores de M, N y P si $X = 2000\ \Omega$ y $\varepsilon = 13$ V, ¿qué marcará el galvanómetro?



a)

$$I_G = 0 \Rightarrow V_N = V_P \Rightarrow NI_{NM} = PI_{PX} \Rightarrow N\frac{(P+X)}{(P+X+N+M)} = P\frac{(N+M)}{(P+X+N+M)}$$

$$\Rightarrow N(P+X) = P(N+M) \Rightarrow NX = PM \Rightarrow X = \frac{MP}{N}$$

$$\boxed{X = \frac{MP}{N}}$$

b) $$X = \frac{(8.50\,\Omega)(33.48\,\Omega)}{15.00\,\Omega} = 1897\,\Omega$$

$$\boxed{X = 1897\ \Omega}$$

c)
$$\left.\begin{array}{l} \text{Malla } a\ b\ d\ K_1\ a:\ 13\text{ V} = I_1N + (I_1 - I_3)M \\ \text{Malla } a\ c\ d\ K_1\ a:\ 13\text{ V} = I_2P + (I_2 + I_3)X \\ \text{Malla } a\ c\ K_2\ b\ a:\ 0 = I_2P - I_1N \end{array}\right\}$$

$$I_3 = -2{,}93\cdot 10^{-2}\,\text{A} = -0.29\text{ mA}$$

$$\boxed{I_3 = -0.29\,mA}$$

8.- En un condensador en proceso de carga la corriente viene dada por la ecuación $i = I_0 e^{-t/RC}$.
a) La potencia instantánea que suministra la batería es $\varepsilon \cdot i$. Integre esta expresión para hallar la energía total suministrada por la batería.
b) La potencia instantánea que se disipa en el resistor es $i^2 \cdot R$. Integre esta expresión para hallar la energía total disipada en el resistor.

c) Halle la energía final almacenada en el condensador y demuestre que es igual a la energía total suministrada por la batería menos la energía disipada en el resistor.
d) ¿Qué fracción de la energía suministrada por la batería queda almacenada en el condensador? ¿De qué forma depende de *R* esta fracción?

a) $$E_{total} = \int_0^\infty P_\varepsilon \, dt = \int_0^\infty \varepsilon I \, dt = \frac{\varepsilon^2}{R} \int_0^\infty e^{-t/RC} \, dt = \varepsilon^2 C$$

$$\boxed{E_{total} = \varepsilon^2 C}$$

b) $$E_R = \int_0^\infty P_R \, dt = \int_0^\infty i^2 R \, dt = \frac{\varepsilon^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} \, dt = \frac{1}{2}\varepsilon^2 C$$

$$\boxed{E_R = \frac{1}{2}\varepsilon^2 C}$$

c) $$U = \frac{Q_0^{\,2}}{2C} = \frac{V^2 C}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon^2 C = E_{total} - E_R$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\varepsilon^2 C}$$

d) La mitad de la energía suministrada por la batería queda almacenada en el condensador independientemente del valor de *R*.

9.- Para reducir las pérdidas que tienen lugar en las líneas de transmisión de energía eléctrica, resulta más económico emplear alto voltaje y baja corriente. Para ilustrar esto, considere una línea que tiene una resistencia de 0,02 Ω/km y calcule la pérdida de potencia si se ha de transmitir una potencia de 200 kW desde una central generadora a una ciudad distante 10 km de aquélla a:
a) 240 V
b) 4,4 kV.

Resistencia total de la línea: R = (0,02 Ω/km)(10 km) = 0,2 Ω

a) La corriente necesaria para transmitir 200 kW de potencia a 240 V es:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{200\ \text{kW}}{240\ \text{V}} = 833,33\ \text{A}$$

⇒ la pérdida de potencia vendrá dada por:

$$Pot = I^2 R = (833,33\ \text{A})^2 \cdot 0,2\ \Omega = 138888,9\ \text{kW} \simeq 139\ \text{kW}$$

$$\boxed{P = 139\, kW}$$

b) La corriente necesaria para transmitir 200 kW de potencia a 4,40 kV es:

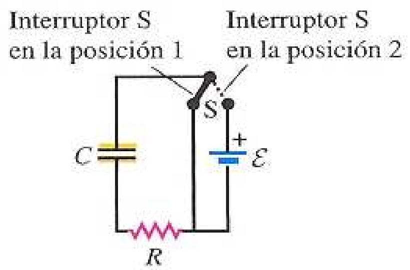
$$I = \frac{P}{V} = \frac{200\ \text{kW}}{4{,}4\ \text{kV}} = 45{,}45\ \text{A}$$

$\Rightarrow$ la pérdida de potencia vendrá dada por:

$$Pot = I^2 R = (45{,}45\ \text{A})^2 \cdot 0{,}2\ \Omega = 413{,}22\ \text{W} \simeq 413\ \text{W}$$

$$\boxed{P = 413W}$$

10.- Un condensador con $C = 1.50 \cdot 10^{-5}$ F está conectado como se muestra en la figura a un resistor $R = 980\ \Omega$ y a una fuente de f.e.m. con $\varepsilon = 18.0$ V y resistencia interna despreciable. Inicialmente el condensador está descargado y el interruptor S está en la posición 1. Después se lleva el interruptor a la posición 2 para que el condensador comience a cargarse. Cuando el interruptor ha estado en la posición 2 durante 10.0 ms, se lleva de nuevo a la posición 1 para que el condensador comience a descargarse. Calcule:
a) La carga del condensador.
b) La diferencia de potencial entre los extremos del resistor y del condensador inmediatamente antes de que se lleve de nuevo el interruptor de la posición 2 a la 1.
c) Las diferencia de potencial entre los extremos del resistor y del condensador inmediatamente después de que se lleve de nuevo el interruptor de la posición 2 a la 1.
d) La carga del condensador 10.0 ms después de llevar de regreso el interruptor de la posición 2 a la 1.



Constante de tiempo: $\tau = RC = (980\ \Omega)\,(1.50 \cdot 10^{-5}\ \text{F}) = 0.0147\ \text{s}$

a) $$q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) = (1.50 \cdot 10^{-5}\ \text{F})\,(18.0\ \text{V})\,(1 - e^{-0.010/0.0147}) = 1.33 \cdot 10^{-4}\ \text{C}$$

$$\boxed{q = 1.33 \cdot 10^{-4}\ \text{C}}$$

b) $$i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} = \frac{18.0\ \text{V}}{980\ \Omega} e^{-0.10/0.0147} = 9.30 \cdot 10^{-3}\ \text{A}$$

$$V_R = IR = (9.30 \cdot 10^{-3}\ \text{A})\,(980\ \Omega) = 9.11\ \text{V}$$

$$V_C = 18.0\ \text{V} - 9.11\ \text{V} = 8.89\ \text{V}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} V_R = 9.11v \\ V_C = 8.89v \end{array}}$$

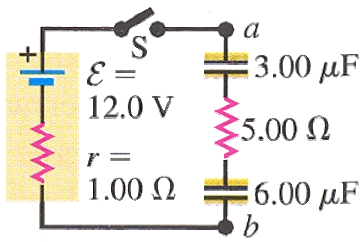
c) $\mathrm{V_R = V_C = 8.89\ V.}$

$$\boxed{V_R = V_C = 8.89\, v}$$

d) $q = Q_0 e^{-t/RC} = (1.50 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{F})\ (8.89\ \mathrm{V}) e^{-0.01/0.0147} = 6.75 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}$

$$\boxed{q = 6.75 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}}$$

11.- Una batería de 12.0 V con una resistencia interna de 1.00 Ω carga dos condensadores en serie. Hay un resistor de 5.00 Ω en serie entre los dos condensadores (ver figura).
a) ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito de carga?
b) Después de que el interruptor ha permanecido cerrado durante un tiempo igual a esa constante de tiempo, ¿cuál es el voltaje entre los bornes del condensador de 3.00 μF?



a) $$C_{\mathrm{eq}} = \left(\frac{1}{3\ \mu\mathrm{F}} + \frac{1}{6\ \mu\mathrm{F}} \right)^{-1} = 2.00\ \mu\mathrm{F}$$

$$\tau = R_{total} C_{\mathrm{eq}} = (6.00\ \Omega)(2.00\ \mu\mathrm{F}) = 1.20 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}$$

$$\boxed{\tau = 1.20 \cdot 10^{-5}\ s}$$

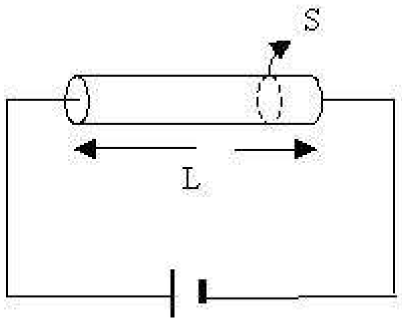
b) $$t = 1.20 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}$$

$$q = Q_f (1 - e^{-t/RC_{\mathrm{eq}}}) = C_{\mathrm{eq}} \varepsilon (1 - e^{-t/RC_{\mathrm{eq}}})$$

$$V_{3\,\mu\mathrm{F}} = \frac{q}{C_{3\,\mu\mathrm{F}}} = \frac{C_{\mathrm{eq}} \varepsilon}{C_{3\,\mu\mathrm{F}}} (1 - e^{-t/RC_{\mathrm{eq}}}) = \frac{(2.0\ \mu\mathrm{F})(12\ \mathrm{V})}{3.0\ \mu\mathrm{F}} (1 - e^{-1}) = 5.06\ \mathrm{V}$$

$$\boxed{V_{3\,\mu\mathrm{F}} = 5.06\ \mathrm{V}}$$

12.- Hallar la resistencia del tubo de corriente de la figura, formado por dos conductores ideales, en los extremos, entre los cuales se encuentra un medio óhmico de longitud L, sección transversal S y conductividad σ_0.



Basándonos en la analogía con un condensador, el campo eléctrico y, por tanto, las líneas de corriente van a estar dirigidas según la generatriz del cilindro, siendo **J** constante entre las placas metálicas.
Partiendo de la definición de resistencia:

$$R = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\int_S \vec{J} \cdot \vec{dS}}$$

$$R = \frac{\int_1^2 \frac{\vec{J}}{\sigma_0} \cdot \vec{dl}}{\int_S \vec{J} \cdot \vec{dS}} = \frac{\frac{J}{\sigma_0} L}{JS} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{L}{S}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{\sigma_0} \frac{L}{S}}$$

13.-Un generador de 4 Ω de resistencia interna se conecta en serie sucesivamente a dos resistencias R_1 y R_2. La ddp en los extremos de la segunda resistencia es 4/3 superior a la existente entre los extremos de la primera, mientras que la potencia disipada en ésta es de 1,1250 la disipada en R_2. Obtener los valores de ambas resistencias.

$$V_R = \frac{\varepsilon}{r+R} R$$

$$P = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{r+R}\right)^2 R$$

$$P_1 = 1{,}125 P_2 \Rightarrow \left(\frac{\varepsilon}{4+R_1}\right)^2 R_1 = 1{,}125\left(\frac{\varepsilon}{4+R_2}\right)^2 R_2$$

$$\frac{4}{3}\frac{R_1}{R_1+4} = \frac{R_2}{R_2+4}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R_1 = 4\Omega \\ R_2 = 8\Omega \end{array}}$$

14.- En un circuito serie LRC, sean R=300 Ω, L=0.9 H, C=2 μF y $\omega=10^3$ rad/s. Este circuito se conecta a un generador de corriente alterna de amplitud de votaje 50 V. Calcular:

a) La amplitud de la intensidad.

b) El retardo de la fase.

c) La amplitud del voltaje a través de la resistencia, de la autoinducción y del condensador.

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} = \frac{50}{\sqrt{300^2 + \left(\frac{1}{10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} - 0.9 \cdot 10^3\right)^2}} = \frac{50}{\sqrt{25 \cdot 10^4}} = 0.1$$

$$\boxed{I_m = 0.1 A}$$

$$tg\phi = \frac{X_C - X_L}{R} = \frac{-0.4 \cdot 10^3}{50} = -8$$

$$\boxed{\phi = -82^\circ}$$

$$V_{Rm} = I_m R = 0.1 \cdot 300 = 30V$$

$$V_{Cm} = I_m \frac{1}{\omega C} = \frac{0.1}{2 \cdot 10^{-3}} = 50V$$

$$V_{Lm} = I_m \omega L = 0.1 \cdot 10^3 \cdot 0.9 = 90V$$

$$\boxed{\begin{array}{l} V_{Rm} = 30V \\ V_{Cm} = 50V \\ V_{Lm} = 90V \end{array}}$$

15.- En un circuito RLC en serie, encuentre a qué frecuencia angular alcanza su valor máximo la amplitud de voltaje entre los extremos: a) del resistor, b) del inductor, y c) del condensador.

a)

V_R = máximo cuando $V_C = V_L \Rightarrow \ \omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\boxed{\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

b)

V_L = máximo cuando $\dfrac{dV_L}{d\omega} = 0$

$$\frac{dV_L}{d\omega} = 0 = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{V\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}\right)$$

$$0 = \frac{VL}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} - \frac{V\omega^2 L(L - 1/\omega^2 C)(L + 1/\omega^2 C)}{(R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2)^{3/2}}$$

$$R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2 = \omega^2 (L^2 - 1/\omega^4 C^2)$$

$$R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} - \frac{2L}{C} = -\frac{1}{\omega^2 C^2}$$

$$\frac{1}{\omega^2} = LC - \frac{R^2 C^2}{2}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC - R^2 C^2 / 2}}$$

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC - R^2 C^2 / 2}}}$$

c)

V_C = máximo cuando $\dfrac{dV_C}{d\omega} = 0$

$$\frac{dV_C}{d\omega} = 0 = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{V}{\omega C\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}\right)$$

$$0 = -\frac{V}{\omega^2 C\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} - \frac{V(L - 1/\omega^2 C)(L + 1/\omega^2 C)}{C(R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2)^{3/2}}$$

$$R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2 = -\omega^2 (L^2 - 1/\omega^4 C^2)$$

$$R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} = -\omega^2 L^2$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}}$$

16.- Un circuito *RLC* en serie está conectado a una fuente de corriente alterna de voltaje constante V y frecuencia angular variable ω.

a) Encuentre la expresión de la amplitud de corriente I en función de ω.

b) Encuentre la expresión de la potencia promedio <*P*> que se disipa en el resistor en función de ω.

c) Demuestre que tanto I como <*P*> son máximas cuando la frecuencia de la fuente es igual a la frecuencia de resonancia del circuito.

d) Haga una gráfica de <*P*> en función de ω tomando $V = 100$ V, $R = 200$ Ω, $L = 2.0$ H y $C = 0.50$ μF. Analice el comportamiento de I y <*P*> en los límites $\omega = 0$ y $\omega \to \infty$.

a) $$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

$$\boxed{I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}}$$

b)

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I^2 R = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{Z}\right)^2 R = \frac{V^2 R/2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{V^2 R/2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

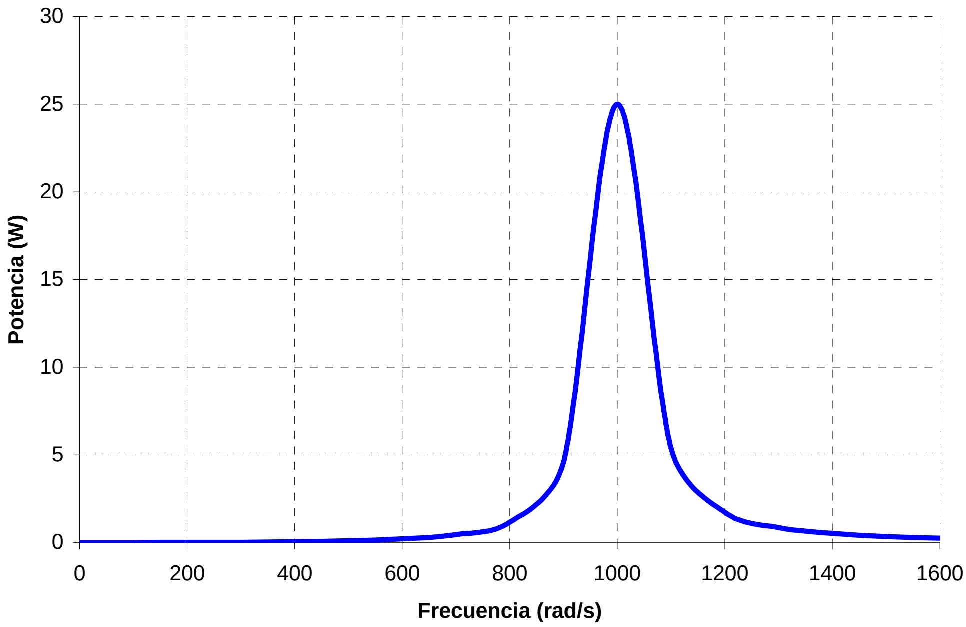
c)

Tanto <*P*> como la amplitud de corriente I serán máximas cuando el denominador sea mínimo, es decir cuando:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

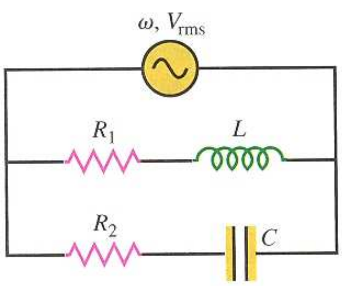
d) $$\langle P \rangle = \frac{(100\text{ V})^2 (200\,\Omega)/2}{(200\,\Omega)^2 + \left(\omega(2.00\text{ H}) - 1/\omega\left(0.50\cdot 10^{-6}\text{ F}\right)\right)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\langle P \rangle = \frac{10^6 \omega^2}{4\cdot 10^4 \omega^2 + \left(2\omega^2 - 2\cdot 10^6\right)^2}$$



Cuando $\omega \to 0$ y cuando $\omega \to \infty \;\Rightarrow\; <P> \to 0$ igual que sucede con I.

17.- En el circuito de la figura R_1 = 60.0 Ω , R_2 = 40.0 Ω , L = 0.400 H, C = 5.00 μF y V_{rms} = 240 V. ¿Cuál es la potencia que suministra la fuente en el límite cuando la frecuencia ω de la fuente es: a) muy grande, b) muy pequeña?



a) Cuando $\omega \to \infty \;\Rightarrow\; \omega L \to \infty$ y $(1/\omega C) \to 0$

Por tanto, a altas frecuencias, la corriente a través de R_1 es prácticamente cero y la potencia disipada por el circuito es

$$P = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R_2} = \frac{(240\ \text{V})^2}{40.0\ \Omega} = 1.44\ \text{kW} \qquad \boxed{P = 1.44\,kW}$$

b) Cuando $\omega \to 0 \;\Rightarrow\; \omega L \to 0$ y $(1/\omega C) \to \infty$
Por tanto, a bajas frecuencias, la corriente a través de R_2 es prácticamente cero y la potencia disipada por el circuito es:

$$P = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R_1} = \frac{(240\ \text{V})^2}{60.0\ \Omega} = 0.96\ \text{kW} \qquad \boxed{P = 0.96\,kW}$$

18.- Diseño de un radiorreceptor de FM. A usted le agrada escuchar la KONG-FM, que transmite a 94.1 MHz , pero detesta escuchar la KING-FM, que difunde a 94.0 MHz. Usted vive a la misma distancia de las dos estaciones y ambos transmisores son igualmente potentes, por lo que las dos señales de radio generan el mismo voltaje de 1.0 V medido en su hogar. Diseñe un circuito *RLC* serie con las siguientes propiedades:
a) proporcionar la máxima potencia en el receptor para la señal de la KONG-FM.
b) que la potencia en el receptor para la KING-FM sea el 1.00% de la anterior. Esto limita la potencia recibida de la estación indeseable, con lo cual resulta en la práctica inaudible. Es necesario utilizar un inductor con L = 1 μH . Halle la capacidad C y la resistencia R que satisfacen los requisitos fijados.

Se desea que:

$$P_{prom}(\omega_1) = máx. \qquad \text{y} \qquad P_{prom}(\omega_2) = 0.01 \cdot P_{prom}(\omega_1)$$

La Potencia es máxima para la frecuencia de resonancia:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{L\omega_0^2} = \frac{1}{(1.0 \cdot 10^{-6}\ \text{H})[2\pi(94.1 \cdot 10^6\ \text{Hz})]^2}$$

$$\boxed{C = 2.86 \cdot 10^{-12}\ \text{F}}$$

$$P_{prom}(\omega_2) = 0.01 \cdot P_{prom}(\omega_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{V^2 R/2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \frac{1}{100}\left(\frac{V^2}{2R}\right)$$

$$100\,R^2 = R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2$$

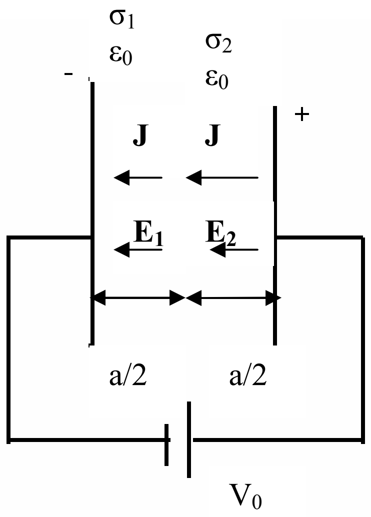
$$R = \sqrt{\frac{(\omega L - 1/\omega C)^2}{99}} = \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{\sqrt{99}}$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{99}}\left(2\pi(94.0 \cdot 10^6\ \text{Hz})(1.00 \cdot 10^{-6}\ \text{H}) - \frac{1}{2\pi(94.0 \cdot 10^6\ \text{Hz})(2.86 \cdot 10^{-12}\ \text{F})}\right)$$

$\boxed{R = 0.126\,\Omega}$

19.-Dos placas conductoras ideales, planas y paralelas tienen una superficie S y están separadas una distancia a. Del espacio entre las placas la mitad está llena de una lámina con conductividad σ_1 y la otra mitad por una lámina con conductividad σ_2. Calcular la resistencia existente entre las placas conductoras ideales.

Por analogía con $\vec{D}$, entre las placas de un condensador entre las que existen dos medios dieléctricos, $\vec{J}$ es constante entre las placas.



$$\vec{J_1} = \vec{J_2} = \vec{J} \Rightarrow \sigma_1 \vec{E_1} = \sigma_2 \vec{E_2} \Rightarrow \vec{E_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\vec{E_2}$$

Calculemos V_0 :

$$\left.\begin{aligned} &V_0 = \int_0^a dV = \int_0^a \nabla V \cdot \vec{dl} = -\int_0^a \vec{E} \cdot \vec{dl} \\ &\vec{dl} = \hat{i}dx \\ &\vec{E_1} = -E_1\hat{i} \\ &\vec{E_2} = -E_2\hat{i} \end{aligned}\right\} V_0 = \int_0^{\frac{a}{2}} E_1 dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} E_2 dx = \frac{aE_1}{2} + \frac{aE_2}{2}$$

Cálculo de la resistencia:

$$\int_S \vec{J}\cdot\vec{dS} = JS$$

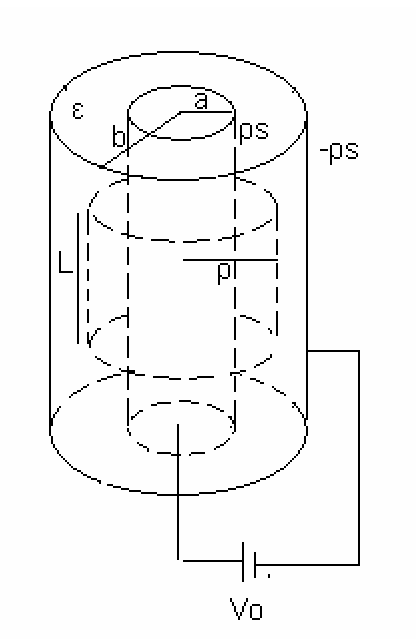
$$V_0 = -\int_0^a \vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{a(E_1+E_2)}{2} = \frac{aJ}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}\right)$$

Luego: $R = \dfrac{\frac{aJ}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}\right)}{JS} = \dfrac{1}{\sigma_1}\dfrac{a/2}{S} + \dfrac{1}{\sigma_2}\dfrac{a/2}{S} = R_1 + R_2$

siendo: $R_1 = \dfrac{1}{\sigma_1}\dfrac{a/2}{S}$ y $R_2 = \dfrac{1}{\sigma_2}\dfrac{a/2}{S}$

$$\boxed{R = \frac{1}{\sigma_1}\frac{a/2}{S} + \frac{1}{\sigma_2}\frac{a/2}{S}}$$

20.-Con dos conductores ideales, cilíndricos y concéntricos, de radio interior a y exterior b y longitud c mucho mayor que los radios, se forma en primer lugar un condensador llenando el espacio entre placas con un dieléctrico de constante dieléctrica ε. Posteriormente, este espacio se vacía y se llena de un conductor de conductividad σ, formando de esta manera una resistencia. Determinar la relación existente entre la capacidad del condensador y la resistencia del tubo de corriente.



$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho \Rightarrow \int_S \vec{D}\cdot\vec{dS} = Q_t$$

Usamos coordenadas cilíndricas:

$$D2\pi\rho L = 2\pi a\rho_s L \Rightarrow \vec{D} = \frac{a\rho_s}{\rho}\hat{\rho}\ ;\ \vec{E} = \frac{a\rho_s}{\varepsilon\rho}\hat{\rho}$$

$$\left.\begin{aligned} -V_0 &= -\int_a^b \vec{E}\cdot\vec{dl} \\ \vec{dl} &= d\rho\hat{\rho} \end{aligned}\right\} V_0 = \int_a^b \frac{a\rho_s}{\varepsilon\rho}d\rho \Rightarrow V_0 = \frac{a\rho_s}{\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$

$$\rho_s = \frac{V_0\varepsilon}{a\ln\frac{b}{a}}$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\frac{V_0\varepsilon}{a\ln\frac{b}{a}}2\pi ac}{V_0} = \frac{2\pi\varepsilon c}{\ln\frac{b}{a}}$$

Conductor: $\vec{E}=\frac{K}{\rho}\hat{\rho}$ es decir, el campo va a tener la misma dependencia de las coordenadas y la misma dirección que en el caso del condensador. Sólo queda por determinar la constante K. (Ver nota al final)

$$V_0=\int_a^b \frac{K}{\rho}d\rho = K\ln\frac{b}{a} \Rightarrow K=\frac{V_0}{\ln\frac{b}{a}} \Rightarrow \vec{E}=\frac{V_0}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{\rho}\hat{\rho}$$

$$\vec{J}=\sigma\vec{E} \Rightarrow \vec{J}=\frac{\sigma V_0}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{\rho}\hat{\rho}$$

con $R=\frac{\int_a^b \vec{E}\cdot\vec{dl}}{\int_S \vec{J}\cdot\vec{dS}}=\frac{V_0}{\int_S \vec{J}\cdot\vec{dS}}$

$$\left.\begin{matrix}\int_S \vec{J}\cdot\vec{dS} \\ dS=c\rho d\varphi\end{matrix}\right\}\int_S \vec{J}\cdot\vec{dS}=\frac{\sigma V_0}{\ln\frac{b}{a}}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{\rho}c\rho\, d\varphi=\frac{\sigma V_0 c2\pi}{\ln\frac{b}{a}}$$

$$R=\frac{V_0}{V_0\frac{\sigma c2\pi}{\ln\frac{b}{a}}}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{\sigma c2\pi}$$

luego: $\boxed{RC=\frac{\varepsilon}{\sigma}}$

Nota: Para un dieléctrico en ausencia de cargas libres y un medio conductor óhmico existe la siguiente analogía:

Dieléctrico ρ=0	Conductor óhmico
$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$	$\vec{J}=\sigma\vec{E}$
$\nabla\cdot\vec{D}=0$	$\nabla\cdot\vec{J}=0$
$\nabla\times\vec{E}=0$	$\nabla\times\vec{E}=0$
$\vec{E}=-\nabla V$	$\vec{E}=-\nabla V$
$\nabla^2 V=0$	$\nabla^2 V=0$

La dependencia del campo tiene que ser la misma cuando se sustituye el dieléctrico por el conductor.