Relación de problemas: Tema 11

1.- Dos torres de alta tensión separadas 200 m sostienen un cable de 40 kg. Desde lo alto de una de las torres se golpea el cable, que permanece tenso, y una onda viaja hasta la otra torre, se refleja, y regresa al punto inicial en 10 s. ¿A qué tensión está sometido el cable?

$$v = \frac{e}{t} = \frac{400}{10} = 40 \ \text{m/s} \ ; \qquad v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}} \Rightarrow T = v^2 \frac{m}{l} = 40^2 \frac{40}{200} = 320 \ N$$

2.- Un sonar emite ondas de 40000 Hz. La velocidad de la onda en el agua es de 1400 m/s. a) ¿Cuál es la frecuencia de la onda en el aire y su longitud de onda en el agua y en el aire? b) Si un acorazado emite verticalmente con su sonar y recibe un eco 0.8 s más tarde, ¿a qué profundidad está el submarino?

a) La frecuencia en el agua y en el aire es la misma. $\lambda_{agua} = \frac{c_{agua}}{f} = 0{,}035 \text{ m}$.

Suponiendo que la velocidad del sonido en el aire es $c_{aire} = 340 \ \text{m/s}$ se tiene

$$\lambda_{aire} = \frac{c_{aire}}{f} = 8{,}5 \text{ mm}$$

b) Suponiendo que la velocidad del agua no depende de la presión (y por tanto de la densidad)

$$c_{agua} = \frac{2h}{t} \Rightarrow h = \frac{c_{agua} t}{2} = 560 \text{ m}$$

3.- Sea v_0 = 332 m/s la velocidad del sonido en el aire. ¿Qué valor resulta para la velocidad del sonido en el hidrógeno, si su densidad respecto al aire es 0.0693?

Se supone que el aire es, al igual que el hidrógeno, un gas ideal diatómico. La velocidad del sonido en un gas ideal es $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$. El cociente de las velocidades del sonido en el hidrógeno y aire es, teniendo en cuenta que para ambos el coeficiente adiabático es el mismo, el siguiente:

$$\frac{c_H}{c_{aire}} = \frac{\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_H}}}{\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_{aire}}}} = \sqrt{\frac{\rho_{aire}}{\rho_H}} \Rightarrow c_H = c_{aire} \sqrt{\frac{\rho_{aire}}{\rho_H}} = 1261 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4.- Dadas las siguientes funciones, justifique que son funciones de onda y explique por qué no son útiles para describir un movimiento ondulatorio real. Considere en todas las expresiones:

a) $\psi(x,t) = A\cdot(t-x/c)$.

b) $\psi(x,t)= A\cdot(t-x/c)^2$.
c) $\psi(x,t)= A\cdot(t-x/c)^{1/2}$
d) $\psi(x,t)= A\cdot\ln(t-x/c)$.

Todas la expresiones son de la forma $\psi(x,t)= \psi\ (t-x/c)$, y por tanto, cumplen con la ecuación diferencial de la onda plana.
Sin embargo, no son físicamente realizables porque en todos los casos la amplitud de la onda es creciente con x y t.

5.- Una onda armónica plana se propaga a lo largo de una cuerda tensa. El punto de abscisa oscila con una amplitud dada por la ecuación y = A sen(ωt) , donde A=0,3 cm y ω= 10 πrad/s, viajando en el sentido positivo de x y siendo la longitud de onda λ>0,5cm. El punto de abscisa x=5cm oscila según la ecuación y = A sen(ωt- π/4).
a) Calcule la frecuencia de la onda.
b) Determine los valores de la longitud de onda y de la velocidad de propagación.
c) Escriba la función de onda correspondiente a esta onda progresiva.

a)

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=5\,Hz$$

b)

En $x=0 \Rightarrow y(x=0,t)=0.3sen(\omega t)$

En x $=5\,cm \Rightarrow y(x=5,t)=0.3sen\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$ (*)

En general, la expresión de la onda progresiva es: $\psi(x,t)=Asen(\omega t-kx+\varphi)$

Como $\psi(0,0)=0 \Rightarrow \varphi=0$ (fase inicial es nula)

Entonces, $\psi(x,t)=0.3sen(\omega t-kx)$

Aplicándola para $x=5\,cm \Rightarrow \psi(x=5,t)=0.3sen(\omega t-k5)$

Igualando con (*):

$$0.3sen\left(10\pi\,t-\frac{\pi}{4}\right)=0.3sen(10\pi\,t-k5)$$

Como la igualdad es cierta para todo t $\Rightarrow \frac{\pi}{4}=5k$

$$k=\frac{\pi}{20}cm^{-1}$$

Si no se cumple que λ >5cm habría entre 0 y 5 cm más de una oscilación, y el valor de k no sería correcto.

c)

$$\psi(x,t)=0.3sen\left(10\pi t-\frac{\pi}{20}x\right)$$

6.- Considere una onda armónica plana de velocidad de propagación 32 m/s, amplitud 3,2 cm y frecuencia 60 Hz, propagándose en el sentido positivo del eje x. En el instante inicial la elongación en el origen es máxima y positiva.
a) Escriba la función de onda, y calcule la longitud de onda.
b) Calcule la elongación, velocidad y aceleración de un punto de abscisa x=15,3 cm en el instante t=2,6 s.

a)

La expresión general de la onda es:

$$\psi(x,t)=Asen(\omega t-\kappa x+\varphi)$$

El signo es negativo porque la onda viaja en el sentido positivo de x.

$$A=3.2\,cm$$
$$\omega=2\pi f=120\pi\,rad/s$$
$$\kappa=\frac{\omega}{c}=\frac{15}{4}rad/m$$
$$\psi(0,0)=-A\Rightarrow Asen\varphi=-A\Rightarrow sen\varphi=-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{2}\text{ (Elegimos este valor de todos los posibles)}$$
$$\psi(x,t)=0.032sen\left(120\pi t-\frac{15}{4}\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=-0.032\cos\left(120\pi t-\frac{15}{4}\pi x\right)$$

b)

$$\psi\left(15.3\cdot 10^{-2},2.6\right)=0.007348\ m$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-0.032\cdot 120\pi(-1)sen\left(120\pi t-\frac{15}{4}\pi x\right)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\left(15.3\cdot 10^{-2},2.6\right)=-11.7414\,m/s$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-0.032\cdot(120\pi)^2(-1)\cos\left(120\pi t-\frac{15}{4}\pi x\right)$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\left(15.3\cdot 10^{-2},2.6\right)=-1044.32\,m/s^2$$

7.- Determine la velocidad de propagación del sonido en el agua sabiendo que cuando el agua se somete a presión de 1 atm, su volumen disminuye en 50 millonésimas del inicial.

La velocidad de propagación de las ondas en un fluido es:

$$c=\sqrt{\frac{1}{\beta\rho}}$$

donde β es el coeficiente de compresibilidad.

$$\beta=-\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P}\ \left(Pa^{-1}\right)$$

Del enunciado del problemas podemos obtener β:

$$\left.\begin{array}{l}\beta=\dfrac{50\cdot 10^{-6}}{101325}=4.93462\cdot 10^{-10}\ Pa^{-1}\\ \rho=10^{3}\ kg/m^{3}\end{array}\right\}c=\sqrt{\frac{1}{\beta\rho}}=1423.55\,m/s$$

8.- a) ¿Con qué fuerza se debe tensar un alambre de 10^{-2} cm^2 de sección para que la velocidad de las ondas transversales sea igual a la de las longitudinales, si su módulo de Young vale $9{,}1\cdot 10^{10}$ $N.m^{-2}$?

b) Discutir el resultado; ¿es realizable físicamente?

$$v_t=v_l\Rightarrow\sqrt{\frac{T}{\lambda}}=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}\Rightarrow T=Y\frac{\lambda}{\rho}=9{,}1\cdot 10^{10}A=9{,}1\cdot 10^{10}\cdot 10^{-6}=9{,}1\cdot 10^{4}\ N$$

El alambre se rompería.

9.- Las vibraciones de dos focos separados 10 m en 1−D son:

$y_1=3\sin(\pi t),\ \ y_2=\sin(\pi t)$

generando ondas de velocidad 1.5 m/s.

a) ¿Cual es la ecuación de movimiento de una partícula situada a 6 m de la primera fuente y a 4,5 m de la segunda?

b) ¿Se cumple la condición de coherencia?

a) El desfase inicial de las dos fuentes es cero. El número de ondas y la longitud de onda son $k=\frac{\omega}{c}=2{,}0944\ \text{rad/m};\lambda=\frac{2\pi}{k}=3\ \text{m}$. Por lo tanto la primera fuente está a $6=2\lambda$

de la fuente 1 y a $4,5=\frac{3}{2}\lambda$ de la fuente 2. Las vibraciones correspondientes en el punto indicado son:

$$y_1(6)=3\sin\left(\pi t-\frac{2\pi}{\lambda}6\right)=3\sin\left(\pi t-\frac{2\pi}{\lambda}2\lambda\right)=3\sin(\pi t-4\pi)=3\sin(\pi t)$$

$$y_2(4,5)=\sin\left(\pi t+\frac{2\pi}{\lambda}\frac{3}{2}\lambda\right)=\sin(\pi t+3\pi)=\sin(\pi t+\pi)=-\sin(\pi t)$$

y la suma es $y_1(6)+y_2(4,5)=2\sin(\pi t)$

b) Puesto que la fase de cada onda es constante, el desfase entre ellas es constante y por tanto ambas ondas son coherentes.

10.- Dos amplificadores idénticos están separados por una distancia de 1 m y están conectados al mismo oscilador acústico que opera a una frecuencia de 500 Hz. Hallar los puntos de mínima amplitud a lo largo de la línea que une a los dos amplificadores si la velocidad del sonido es 330 ms^{-1}.

Se supone que no hay dispersión ni disipación de energía. La condición de interferencia destructiva para un punto en la línea que une ambos amplificadores es que la diferencia de camino entre las ondas que llegan de cada uno de ellos es $\Delta x=(2m+1)\frac{\lambda}{2}, m=0,\pm1,\pm2,...$. La longitud de onda es $\lambda=\frac{c}{f}=0,66$ m.

Para un punto P entre ambos amplificadores, si x_1 y x_2 son las distancias al amplificador 1 y 2. La diferencia de camino es $\Delta x=x_2-x_1=L-2x_1$ puesto que $x_1+x_2=L$. La condición de interferencia destructiva queda

$$L-2x_1=(2m+1)\frac{\lambda}{2}, m=0,\pm1,\pm2,...$$

$$x_1=\frac{L-(2m+1)\frac{\lambda}{2}}{2}=\frac{L}{2}-(2m+1)\frac{\lambda}{4}; m=0,\pm1,\pm2,...$$

$$x_1=0,5-(2m+1)0,165;$$

para $0\le x_1\le 1,\quad m=0,1,-1,-2.$ Resulta $x_1=0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1$ *metros*

11.- Un pulso de onda transversal, que avanza a lo largo de una cuerda tensa, está descrito por la función de onda:

$$\psi(x,t)=\frac{A_1^3}{A_1^2+(A_2x-A_3t)^2}$$

donde A_1, A_2, A_3 son constantes positivas.

a) Justifique por qué es una función de onda y dibuje la forma del pulso para el instante inicial. ¿Cuál es la amplitud del pulso?

b) Determine la velocidad del pulso y su sentido de movimiento.

c) Calcule y represente gráficamente la distribución de velocidades transversales de los puntos de la cuerda para el instante inicial.

a)
Es posible hacerlo de dos maneras diferentes:

1º) Podemos reescribir ψ(x,t) como:

$$\psi(x,t)=\frac{A_1^{\,3}}{A_1^{\,2}+A_2^{\,2}\left(\frac{A_2}{A_2}x-\frac{A_3}{A_2}t\right)^2}=\frac{A_1^{\,3}}{A_1^{\,2}+A_2^{\,2}\left(x-\underbrace{\frac{A_3}{A_2}}_{C}t\right)^2}$$

Se comprueba que ψ(x,t) es de la forma ψ(x,t)= ψ(x-ct), siendo por tanto una onda plana que se propaga según el sentido positivo de x con velocidad $c=A_3/A_2$.

2º) Comprobemos que ψ(x,t) cumple la ecuación diferencial de la onda plana:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{-A_1^{\,3}\cdot 2A_2\left(A_2x-A_3t\right)}{\left[A_1^{\,2}+\left(A_2x-A_3t\right)^2\right]^2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-2A_1^{\,3}A_2\frac{A_2\left[A_1^{\,2}+\left(A_2x-A_3t\right)^2\right]^2-4\left(A_2x-A_3t\right)^2\left[A_1^{\,2}+\left(A_2x-A_3t\right)^2\right]A_2}{\left[A_1^{\,2}+\left(A_2x-A_3t\right)^2\right]^4}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-2A_1^{\,3}A_2^{\,2}\frac{A_1^{\,2}-3\left(A_2x-A_3t\right)^2}{\left[A_1^{\,2}+\left(A_2x-A_3t\right)^2\right]^3}$$

Operando para el tiempo se obtiene:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{2A_1^{\,3}A_3\left(A_2x-A_3t\right)}{\left[A_1^{\,2}+\left(A_2x-A_3t\right)^2\right]^2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-2A_1^{\,3}A_3^{\,2}\frac{A_1^{\,2}-3\left(A_2x-A_3t\right)^2}{\left[A_1^{\,2}+\left(A_2x-A_3t\right)^2\right]^3}$$

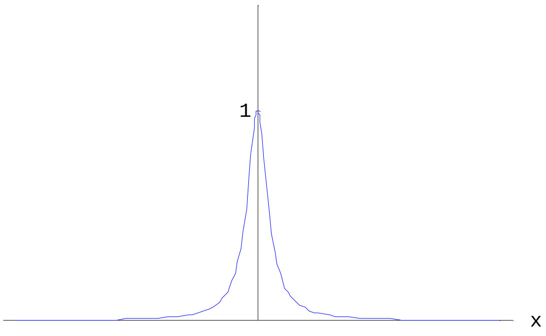
Se comprueba que:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\quad \text{con}\quad c=\frac{A_3}{A_2}$$

La amplitud es:

$$\psi(0,0)=\frac{A_1^3}{A_1^2}=A_1$$

Si tomamos $A_1=A_2=A_3=1$, $\psi(x,0)$ tendría la forma:

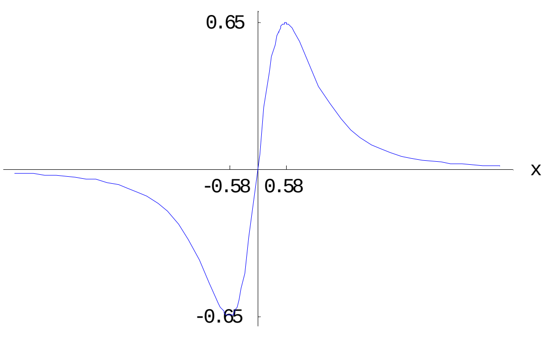


b) $c=\frac{A_3}{A_2}$, se propaga en el sentido positivo de x.

c)
$$v=\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Tomando de nuevo por comodidad $A_1=A_2=A_3=1$

$\frac{\partial\psi}{\partial t}$ en t=0:



12.- La velocidad de propagación de las ondas superficiales en el agua, siempre que la longitud de onda sea menor que la profundidad, es $c=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}}$, donde g es la aceleración de la gravedad, λ es la longitud de onda, σ es la tensión superficial y ρ es la densidad. Cuando λ>10cm, el segundo término de la raíz se puede despreciar, y cuando λ<10cm el primer término es despreciable.

a) Calcule la velocidad de unas ondas superficiales para las que se observa que su longitud de onda es bastante mayor que 10cm, y que un trozo de madera que flota en la superficie realiza 120 oscilaciones completas en un minuto.
b) Se toma una fotografía de la superficie rizada de un lago y se observa en ella que entre dos puntos a 1m de distancia hay 20 "rizos" completos. Calcule la velocidad de propagación de tales rizos.
c) Calcule el valor de la velocidad de las ondas superficiales en el agua cuando $\lambda \approx 10$cm . Tensión superficial del agua a 20ºC: $\gamma=72{,}8\cdot 10^{-3}$ N/m .

Si $\lambda > 10$ cm $\Rightarrow c \approx \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}}$

Si $\lambda < 10$ cm $\Rightarrow c \approx \sqrt{\dfrac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}}$

a) $\lambda \gg 10$ cm $\Rightarrow c \approx \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}}$

$$f = 120\,\frac{\text{oscilaciones}}{\text{minuto}} = \frac{120}{60} = 2Hz$$

Como para ondas armónicas c= λf $\Rightarrow \lambda = \dfrac{c}{f} \rightarrow c = \dfrac{g}{2\pi f} = 0.7807\,m/s = 78.07\,cm/s$

b) En 1 m tenemos 20 oscilaciones completas:

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{20} = 0.05\,m = 5\,cm < 10\,cm$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}} = 95.65\ cm/s$$

c)

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}} = 0.2477\,m/s = 24.77\,cm/s$$

13.- Determine la función de onda resultante de la superposición de las siguientes funciones de onda:

a)$\psi_1(x,t)= 3\cdot sen(\omega t-kx)$, $\psi_2(x,t)= 4\cdot sen(\omega t-kx)$;

b) $\psi_1(x,t)= 3\cdot sen(\omega t-kx)$, $\psi_2(x,t)= 4\cdot cos(\omega t-kx)$;

c) $\psi_1(x,t)= 3\cdot sen(\omega t-kx)$, $\psi_2(x,t)= 4\cdot sen(\omega t-kx+ \pi/3)$.

a)

$\psi_1(x,t) = 3\cdot \text{sen}(\omega t - kx)$
$\psi_2(x,t) = 4\cdot \text{sen}(\omega t - kx)$

$\psi_T = \psi_1 + \psi_2 = 7\text{sen}(\omega t - kx)$

b)

$\psi_1(x,t) = 3\cdot \text{sen}(\omega t - kx)$
$\psi_2(x,t) = 4\cdot \cos(\omega t - kx)$

Usamos la exponencial compleja.
Definimos:

$$\hat{\psi}_1 , \hat{\psi}_2 / \begin{cases} \text{Re}(\hat{\psi}_1) = \psi_1 \\ \text{Re}(\hat{\psi}_2) = \psi_2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\psi}_1 = 3e^{i\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right)} \\ \hat{\psi}_2 = 4e^{i(\omega t - kx)} \end{array}\right\} \hat{\psi}_T = \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2$$

$$\hat{\psi}_T = e^{i(\omega t - kx)} \cdot \left(3e^{-i\frac{\pi}{2}} + 4\right) = e^{i(\omega t - kx)}(4 - 3i) =$$

$$= e^{i(\omega t - kx)}\sqrt{4^2 + 3^2}\,e^{iArctg\frac{-3}{4}} = e^{i(\omega t - kx)}5e^{-i0.6435} = 5e^{i(\omega t - kx - 0.6435)}$$

$$\psi_T = \text{Re}(\hat{\psi}_T) = 5\cos(\omega t - kx - 0.6435)$$

c)

$\psi_1(x,t) = 3\cdot \text{sen}(\omega t - kx)$
$\psi_2(x,t) = 4\cdot \text{sen}(\omega t - kx + \pi/3)$

$$\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2 / \begin{cases} \mathrm{Re}(\hat{\psi}_1) = \psi_1 \\ \mathrm{Re}(\hat{\psi}_2) = \psi_2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\psi}_1 = 3e^{i\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right)} \\ \hat{\psi}_2 = 4e^{i\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)} \end{array}\right\} \hat{\psi}_T = \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2$$

$$\hat{\psi}_T = e^{i(\omega t - kx)} \cdot \left(3e^{-i\frac{\pi}{2}} + 4e^{-i\frac{\pi}{6}} \right) = e^{i(\omega t - kx)} \sqrt{37} e^{-i0.9649} =$$

$$= 6.0828 e^{i(\omega t - kx - 0.9649)}$$

$$\psi_T = \mathrm{Re}(\hat{\psi}_T) = 6.0828 \cos(\omega t - kx - 0.9649)$$

14.- Dos ondas armónicas de 100 Hz de frecuencia interfieren de manera que en el instante inicial, la elongación y la velocidad de la suma de ambas vienen dadas por las siguientes ecuaciones (en el sistema cegesimal):

$$\psi(x,0) = 0.05\left[\sqrt{3} sen(2x) + \cos(2x)\right]$$

$$v(x,0) = -10\pi\left[\sqrt{3}\cos(2x) - sen(2x)\right]$$

Las ondas se propagan en el mismo sentido (suponemos que éste es el positivo del eje x).
Calcule la función de la onda resultante de superponer las ondas armónicas anteriores.
Considerar v como la velocidad de oscilación de un punto del medio.

Este ejercicio de puede resolver de dos formas diferentes:

1º) Transformar $\psi(x,0)$ y $v(x,0)$ a funciones de la forma:

$\psi(x,0)$ =Asen(2x+B)
$v(x,0)$=Ccos(2x+D)

Con esto tendríamos simplemente que saber que, en general:

$\psi(x,t)$ =Asen(ωt-kx+B)
$v(x,t)$=Ccos(ωt-kx+D)

2º) Operar sabiendo que estas relaciones existen pero **no** calculándolas explícitamente. Esta será la forma que desarrollaremos aquí.

La suma de las dos ondas armónicas planas de igual frecuencia, número de ondas y sentido de propagación es de la forma:

ψ(x,t) =Asen(ωt-kx+φ)

y la velocidad de oscilación de un punto del medio es:
v(x,t) =Aωsen(ωt-kx+φ)

Por tanto en x=0 y t=0:

$$\Psi(0,0) = Asen\varphi = 0.05\left[\sqrt{3}sen(2\cdot 0) + \cos(2\cdot 0)\right]$$

$$v(0,0) = A\omega\cos\varphi = -10\pi\left[\sqrt{3}\cos(2\cdot 0) + sen(2\cdot 0)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} Asen\varphi = 0.05 \\ A\omega\cos\varphi = -10\pi\sqrt{3} \end{array}\right\} \frac{sen\varphi}{\cos\varphi} = tg\varphi = \frac{0.05\omega}{-10\pi\sqrt{3}}$$

$$\varphi = arctg\frac{0.05\omega}{-10\pi\sqrt{3}} = arctg\frac{0.05\cdot 2\pi\cdot 100}{-10\pi\sqrt{3}} = arctg\frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$$

$$Asen\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0.05 \Rightarrow A = \frac{0.05}{sen\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = -0.1$$

$$A = -0.01$$

Por tanto:

$$\Psi(x,t) = -0.1sen\left(100\pi t - 2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

donde se ha tenido en cuenta que, como

$$\Psi(x,0) = Asen(kx+\varphi) \Rightarrow k = 2$$

Como el seno es una función impar:

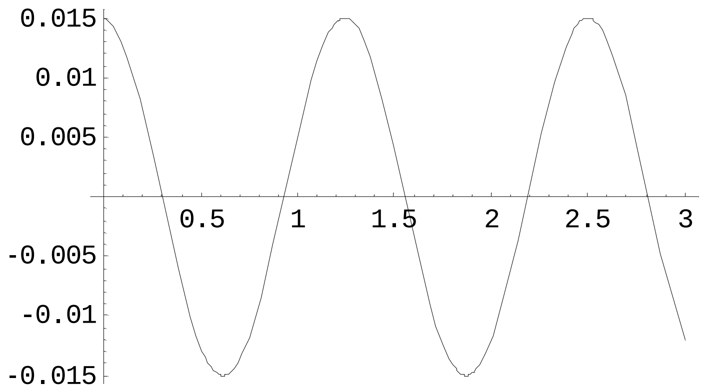
$$\Psi(x,t) = 0.1sen\left(2x - 100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$

15.- Se propaga una onda armónica transversal en un hilo tenso en el sentido *(– x)*, siendo A=15 mm, k=5 rad/m, y ω=20 rad/s.
a) Hallar la velocidad y la aceleración máximas, la velocidad de propagación de la onda, y la tensión de la cuerda si es λ =0,075 kg/m.
b) Si la elongación en t=0, x=0,30 m, es y=0, escribir la función de ondas *y(x,t)*.
c) Representar gráficamente *y(x)* para t=0.

a) $v_{max} = A\omega = 0,3\ \text{m/s}; a_{max} = A\omega^2 = 6\ \text{m/s}^2; c = \omega/k = 4\ \text{m/s}; T = c^2\lambda = 1,2\ \text{N}$

b) $A\sin(\omega t + kx + \phi) = 0 \Rightarrow \omega t + kx + \phi = 0 \Rightarrow \phi = -k0.3 = -1.5$ rad

$\psi(x,t) = 0{,}015\sin(20t + 5x - 1{,}5)$

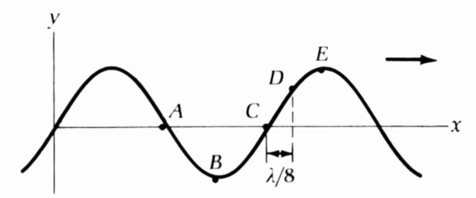


16.- La onda armónica en el hilo que se muestra en la figura tiene una amplitud de 25 mm, una velocidad de 46 m/s, una frecuencia angular de 160 rad/s y se propaga hacia +x.

a) Si el dibujo representa la forma de la onda para t = 1 ms, escribir la función de ondas.

b) Si ahora suponemos que la figura corresponde a t = 0, determinar la velocidad y aceleración de los elementos marcados por letras.

c) Determinar la pendiente del hilo y $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ en esas posiciones.



a) $k = \dfrac{\omega}{c} = 3{,}47826 \approx 3{,}48\ \dfrac{\text{rad}}{\text{m}}$

$t = 1\text{ ms} \Rightarrow y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \phi) = 0 \Rightarrow \omega t - kx + \phi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi ...$

De la forma de la onda en el instante inicial, puesto que el desplazamiento es hacia la derecha, la función de onda es decreciente y por tanto el valor correcto de la fase inicial es:

$\phi = -\omega t + \pi = 2{,}98$ rad .

Finalmente la función de ondas es $y(x,t) = 0{,}025\sin(160t - 3{,}48x + 2{,}98)$ m .

b) Con la nueva suposición, el desfase es $\phi = \pi$ rad , y la nueva función de onda es

$y(x,t) = 0{,}025\sin(160t - 3{,}48x + \pi) = -0{,}025\sin(160t - 3{,}48x)$ m .

Derivando y particularizando para el instante inicial

$$v(x,t)=\frac{\partial y}{\partial t}=-4\cos\left(160t-3,48x\right)$$

$$v(x,0)=-4\cos\left(3,48x\right)\rightarrow\{4;0;-4;-2,828;0\}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$a(x,t)=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=640\sin\left(160\ t-3,48\ x\right)$$

$$a(x,0)=-640\sin\left(3,48\ x\right)\rightarrow\{0;640;-452.548;-640\}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

c)

Pendiente = $p\left(x,t\right)\equiv\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{t=0}=\frac{\partial y}{\partial x}=0,087\cos[160t-3,48x]$

$$p\left(x,0\right)=0,087\cos[3,48x]\rightarrow\{-0,087;0;0,087;0,061\}$$

Curvatura = $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{t=0}=0,30\sin\left(160t-3,48x\right)$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{t=0}\left(x,0\right)=-0,30\sin\left(3,48x\right)\rightarrow\{0;\ \ 0,3;\ \ 0;\ \ 0,21;\ \ -0,3\}$$

17.- Una onda se transmite a lo largo del eje X según la función $\Delta P(x,y)=0,1\sin(5t-2x)$, donde t es el tiempo, x la posición y ΔP la sobrepresión, y todas las unidades están expresadas en el SI.

a) Explique las características del citado fenómeno ondulatorio.

b) Compruebe que la función dada satisface la ecuación de ondas y determine el valor de la velocidad de propagación.

c) En $x=3$ la onda se encuentra con la superficie plana de separación de dos medios, el segundo con una velocidad de propagación doble que la del primer medio. Escriba las funciones de onda correspondientes a las ondas reflejada y transmitida sabiendo que la energía inicial se reparte en ambas al 50% y que no hay disipación.

a) Se trata de una onda escalar armónica longitudinal monocromática de amplitud $0,1\ \mathrm{Pa}$, frecuencia angular $\omega=5\,\mathrm{rad/s}$, número de ondas $k=2\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ y fase inicial nula.

b) Derivando para comprobar que la función dada cumple la ecuación diferencial de la onda plana se obtiene:

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\pi;f=\frac{5}{2\pi};c=\lambda f=\frac{5}{2}$$

$$\frac{\partial^2\left(\Delta P(x,y)\right)}{\partial x^2}=-0,4\sin[5t-2x]$$
$$\frac{\partial^2\left(\Delta P(x,y)\right)}{\partial t^2}=-2,5\sin[5t-2x]$$
Se comprueba que la función cumple la ecuación de ondas $\frac{\partial^2\left(\Delta P(x,y)\right)}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\left(\Delta P(x,y)\right)}{\partial t^2}$ con $c=\frac{5}{2}$

c) Como no se aportan datos, se supone que no hay cambio de fase en la reflexión. De las condiciones del problema la intensidad incidente se reparte por igual en la onda reflejada y transmitida, con lo que se cumple $I_R=I_T=\frac{I_I}{2}$. Como la amplitud es proporcional al cuadrado de la intensidad $A_R^2=A_T^2=\frac{A_I^2}{2}\rightarrow A_R=A_T=\frac{A_I}{\sqrt{2}}=0,07071\ \text{m}$.

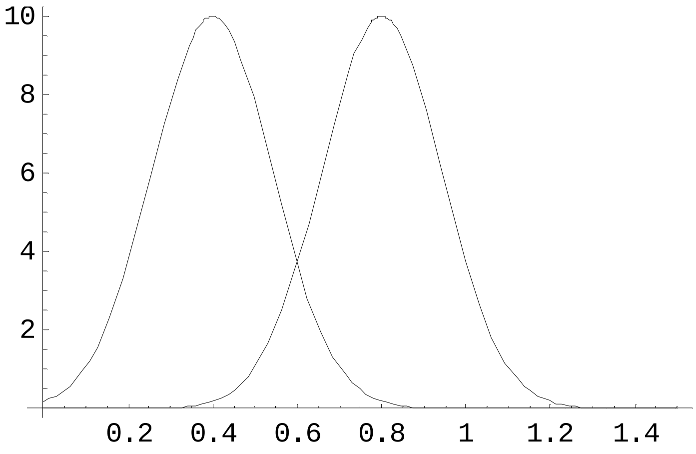
Finalmente las funciones de onda son
Reflejada: $\Delta P(x,y)=0,071\ \sin(5t+2x)$ Pa
Transmitida: $\Delta P(x,y)=0,071\ \sin(5t-x)$ Pa

18.- a) Justificar que $y=10\cdot e^{-(5x-2t)^2}$ es una función de ondas y probar que satisface a la ecuación de ondas. Determinar su velocidad de propagación (x,y en metros, t en segundos).
b) Representarla gráficamente en función de x y de t. ¿Corresponde a una onda sostenida o a un pulso de onda? Explíquese.
c) ¿Pueden calcularse parámetros de esta onda tales como su amplitud, frecuencia o longitud de onda? Si no, definir y calcular algún otro parámetro característico.

a) Es posible hacerlo de dos maneras: comprobando si cumple la ecuación diferencial de onda plana o viendo si es una función de argumento $t-x/c$. Por esta segunda vía se ve que la función de onda puede escribirse como $y(x,t)=10\cdot e^{-(5x-2t)^2}=10\cdot e^{-\left[2\left(\frac{5}{2}x-t\right)\right]^2}$. La velocidad de propagación es $c=\frac{2}{5}=0,4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

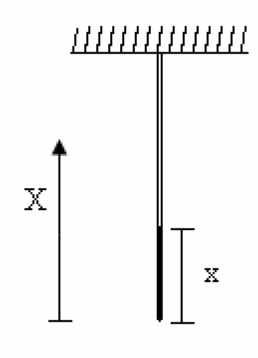
b) Representación para los instantes $t=1$ s y $t=2$ s : corresponde a una curva gaussiana

c) No se trata de una onda sostenida, sino de un pulso. Por tanto no tiene sentido hablar de frecuencia o longitud de onda. Si es posible hablar de la amplitud máxima, 10. Podría hablarse, por ejemplo, de, para un instante de tiempo dado *t* cuál es el rango de posiciones Δx para los cuales la amplitud es *A/2*. O dada una posición dada *x* cuál es el intervalo temporal Δt para el cual la amplitud es *A/2*.

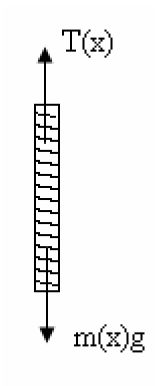


19.- Una cuerda homogénea de longitud L y masa m se cuelga verticalmente, sujeta firmemente de su extremo superior y libre en su extremo inferior.
a) Determine la velocidad de propagación de un pulso transversal a lo largo de la cuerda en función de la distancia al extremo inferior de la misma.
b) Calcule la velocidad de propagación promedio de las ondas transversales.
c) Calcule el tiempo que tarda el pulso en recorrer la cuerda completa.
d) El extremo inferior se hace oscilar transversalmente con una frecuencia. Exprese la longitud de onda de la perturbación en función de la distancia al extremo inferior.

a)



Analicemos las fuerzas que se ejercen sobre un trozo de cuerda de tamaño x:



$$T(x) - m(x)g = 0$$
$$\Rightarrow T(x) = m(x)g$$

Como la cuerda es homogénea $\Rightarrow \mu = \frac{m}{L} = cte$

Para un trozo de tamaño x $\Rightarrow \mu = \frac{m(x)}{x} \to m(x) = \mu x = \frac{m}{L}x \Rightarrow T(x) = \frac{m}{L}xg$

La velocidad de propagación de las ondas transversales es:

$$c(x)=\sqrt{\frac{T(x)}{\mu}}=\sqrt{\frac{\mu x g}{\mu}}=\sqrt{gx}$$

b)

La velocidad promedio a lo largo de la cuerda es:

$$\langle c(x)\rangle=\frac{\int_0^L c(x)\,dx}{\int_0^L dx}=\frac{1}{L}\int_0^L\sqrt{gx}\,dx=\frac{\sqrt{g}}{L}\int_0^L\sqrt{x}\,dx=\frac{\sqrt{g}}{L}\frac{\left[x^{3/2}\right]_0^L}{3/2}=\frac{2}{3}\sqrt{gL}$$

c)

Calculemos x(t) a partir de c(x):

$$c=\frac{dx}{dt}\to\sqrt{gx}=\frac{dx}{dt}\to\frac{dx}{\sqrt{gx}}=dt\Rightarrow\int\frac{dx}{\sqrt{gx}}=\int dt\to\frac{1}{\sqrt{g}}2\sqrt{x}=t+cte$$

Con las condiciones iniciales x(t=0)=0 $\Rightarrow cte=0$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}2\sqrt{x}=t\to x(t)=\frac{1}{4}gt^2$$

Por tanto se trata de un movimiento uniformemente acelerado con velocidad y espacio iniciales nulos.

El tiempo que tarda en llegar el pulso hasta arriba es:

$$t=?/\,x=L\Rightarrow t=2\sqrt{\frac{L}{g}}$$

d) La relación entre λ y f es:

$$c=\lambda f\to\lambda=\frac{c}{f}=\frac{1}{f}\sqrt{gx}$$

20.- De una cuerda inextensible de 25 cm y 20 g se cuelga una pesa de 150 g. Sobre la pesa se da un golpe horizontal, lo que provoca que un pulso de onda ascienda a lo largo de la cuerda.

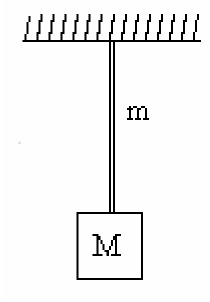
a) ¿Qué tipo de onda recorre la cuerda? Determine la velocidad de propagación de las ondas si se desprecia la masa de la cuerda comparada con la pesa.

b) Teniendo en cuenta ahora la masa de la cuerda, calcule el valor de la velocidad de propagación en función de la altura, así como su valor medio.

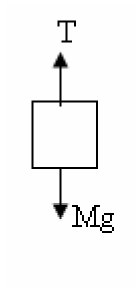
c) Con las suposiciones realizadas en los apartados anteriores, calcule el tiempo que tardar el pulso en llegar hasta el techo. Comente el resultado.

Este ejercicio es una aplicación numérica del ejercicio anterior, añadiéndole una masa adicional.

a) La onda que recorre la cuerda es transversal, plana y del tipo pulso. La magnitud propagada es un desplazamiento respecto de la posición de equilibrio.



Si se desprecia la masa de la cuerda, la tensión de la cuerda es constante.

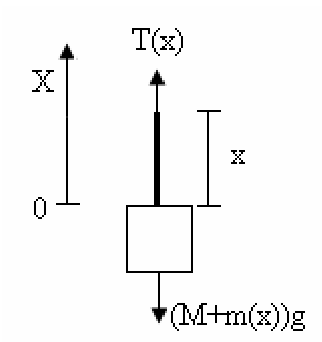


$$T - Mg = 0$$
$$\Rightarrow T = Mg = cte$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg}{\frac{m_c}{L}}} = \sqrt{\frac{MgL}{m_c}} = 4.2866\, m/s$$

m_c = masa de la cuerda

b) Analizando un trozo de cuerda:



$$T(x) - (M + m(x))g = 0$$
$$\Rightarrow T(x) = (M + m(x))g$$

Como $m(x) = \mu x \Rightarrow T(x) = (M + \mu x)g$

$$c(x) = \sqrt{\frac{T(x)}{\mu}} = \sqrt{\frac{M + \mu x}{\mu} g}$$
$$c(x) = 11.07\sqrt{0.15 + 0.08x}$$

El valor promedio es, como se hizo en el problema anterior,

$$\langle c(x) \rangle = \frac{\int_0^L c(x)\,dx}{\int_0^L dx} = \frac{1}{L}\int_0^L \sqrt{\frac{M + \mu x}{\mu} g}\,dx = 1.4140\, m/s$$

c)

- La cuerda no tiene masa:

$$c = \frac{L}{t} \rightarrow t = \frac{L}{c} = 0.05832\, s$$

-La cuerda tiene masa:

$$c(x)=\sqrt{\frac{M+\mu x}{\mu}g}\rightarrow c=\frac{dx}{dt}\Rightarrow \frac{dx}{c(x)}=dt\rightarrow \int_0^L \frac{dx}{c(x)}=\int_0^t dt\rightarrow t=0.05650\,s$$

La diferencia es pequeña pues m<<M.