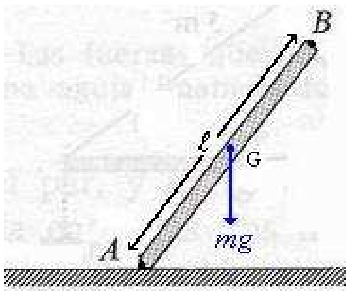
Relación de problemas: Tema 2

1.- Una varilla delgada AB de masa m y longitud l, está sujeta por una bisagra colocada en el suelo en su extremo A. Si inicialmente está en posición vertical y comienza a caer, cuando llega a la posición horizontal, justo antes de golpear el suelo, calcule:
a) La velocidad angular.
b) La aceleración angular.
c) Las componentes horizontal y vertical de la aceleración del centro de masas.
d) Las componentes de la fuerza de reacción en el pivote.

a)

$I_A = I_G + mh^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2$ (momento de inercia alrededor de un eje transversal a través del extremo A)



La varilla va al suelo y G cae una distancia $\ell/2$

Aplicamos principio de conservación de la energía:
La E_{pot} perdida por la varilla es igual a la E_C ganada por la varilla:

$$mg\frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m\ell^2\right)\omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}}$$

b)

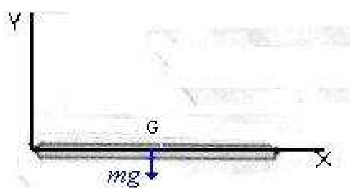
mg origina un momento en G $\Rightarrow M = I\alpha$

$$mg\frac{\ell}{2} = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{mg\frac{\ell}{2}}{\frac{1}{3}m\ell^2} = \boxed{\frac{3g}{2\ell}}$$ común a todos los puntos de la barra.

c)

En el cm $\rightarrow a_t = \alpha \cdot r = \alpha\frac{\ell}{2} = \frac{3g}{2\ell}\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{3g}{4}$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \left(\sqrt{\frac{3g}{\ell}}\right)^2 \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{3g}{2}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} a_t = \dfrac{3g}{4} \\ a_n = \dfrac{3g}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \boxed{a_x = -a_n = -\dfrac{3g}{2}} \\ \boxed{a_y = -a_t = -\dfrac{3g}{4}} \end{cases}$$

d)

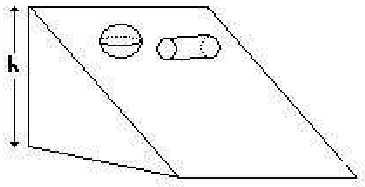
F sobre el pivote? $\sum \bar{F} = m \cdot \bar{a}$

X, $m \cdot a_x = -m\dfrac{3g}{2} = N_x$ (no hay otra fuerza)

Y, $m \cdot a_y = -m\dfrac{3g}{4} = N_y - mg \Rightarrow N_y = -\dfrac{3mg}{4} + mg = \dfrac{mg}{4}$

$$\boxed{\bar{N} = \left(-\dfrac{3mg}{2}, \dfrac{mg}{4}\right)}$$

2.- Desde lo alto de un plano inclinado se sueltan un cilindro y una esfera homogéneos, la esfera un segundo después del cilindro. Se supone que la pérdida de energía por rozamiento es despreciable. ¿Alcanzará la esfera al cilindro? En caso afirmativo, ¿cuánto tiempo ha rodado la esfera hasta alcanzarlo?



r = radio del cilindro
m = masa del cilindro
M = masa de la esfera
R = radio de la esfera

Principio de conservación de la Energía:

- Cilindro: $mgh = E_c + \dfrac{1}{2}mv_c^2$, $I_c = \dfrac{1}{2}mr^2$

$$mgh = \frac{1}{2}I_c\omega_c^2 + \frac{1}{2}mv_c^2$$

- Esfera: $Mgh = \dfrac{1}{2}I_e\omega_e^2 + \dfrac{1}{2}Mv_e^2$, $I_e = \dfrac{2}{5}MR^2$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ mgh = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}mr^2v_c^2 + \dfrac{1}{2}mv_c^2 \\ 2)\ Mgh = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{5}MR^2\omega_e^2 + \dfrac{1}{2}Mv_e^2 \end{array}\right\} \quad v = \omega r$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow v_c^2 = \dfrac{4gh}{3} \\ \Rightarrow v_e^2 = \dfrac{10}{7}gh \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{v_e > v_c}$$

Sí, la alcanza.

¿tiempo empleado en alcanzarla?

$$e = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad e_c = \frac{1}{2}a_c t^2 \qquad e_e = \frac{1}{2}a_e (t-1)^2$$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2ae \Rightarrow a = \frac{v_f^2}{2e} \Rightarrow v_f^2 = 2ae$$

$$\left.\begin{aligned} v_e^2 = \frac{10}{7}gh \Rightarrow e_e = \frac{1}{2}\frac{v_f^2}{2e_e}(t-1)^2 \\ e_c = \frac{1}{2}\frac{v_c^2}{2e_c}t^2 \end{aligned}\right\} \quad e_e = e_c$$

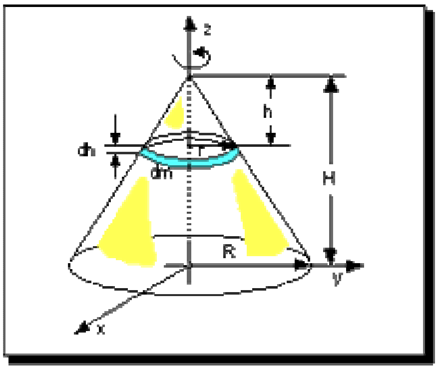
$$\left.\begin{aligned} e_e^2 = \frac{1}{4}v_e^2 (t-1)^2 \\ e_c^2 = \frac{1}{4}v_c^2 (t)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{10}{7}gh(t-1)^2 = \frac{4}{3}ght^2 \Rightarrow 2t^2 - 60t + 30 = 0 \quad \begin{cases} t = 0.65 \\ t = 29.5 \end{cases}$$

$$\boxed{Sol: t = 29.5s}$$

3.- Calcule el momento de inercia de un cono sólido, homogéneo, circular recto, de masa m y radio de la base R, alrededor de su eje de simetría.

La figura muestra un cilindro elemental de radio r, masa dm y altura dh, cuyo momento de inercia es:

$$dI = \frac{1}{2}r^2 dm \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^R r^2 dm$$



La masa elemental es:

$$dm = \rho dV = \rho\pi r^2 dh$$

y la densidad:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{3M}{\pi R^2 H}$$

Al sustituir en la integral nos queda:

$$I = \frac{3M}{2R^2 H}\int_0^R r^4 dh$$

Observe que el integrando depende de dos variables, h y r, relacionadas entre sí mediante la expresión:

$$\frac{H}{R} = \frac{h}{r}$$

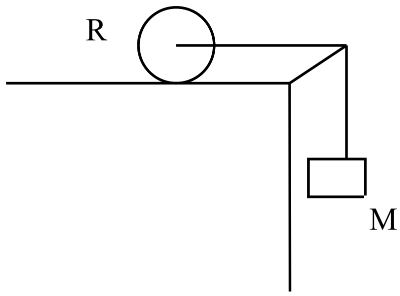
Esta expresión se obtiene de la relación de semejanza entre los triángulos de lados R y H (grande) y r y h (pequeño).
Despejando h y diferenciando resulta:

$$dh = \frac{Hdr}{R}$$

Si introducimos esta expresión en la integral resulta:

$$I = \frac{3M}{2R^3}\int_0^R r^4 dr$$

$$\boxed{I = \frac{3}{10}MR^2}$$



4.-En la figura adjunta, el rodillo R es cilíndrico y tiene un radio de 5 cm y una masa de 4 kg, siendo M = 2 kg. Calcular la aceleración del sistema y la fracción de energía potencial que se convierte en cinética de rotación.

a)

$$\left.\begin{aligned} &Mg - T = Ma \\ &T - F_r = ma \\ &F_r R = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} \end{aligned}\right\} \; Mg - \frac{1}{2}Ma = (M+m)a \;\Rightarrow\; \boxed{a = \frac{Mg}{\frac{3}{2}M + m} = \frac{2}{7}g}$$

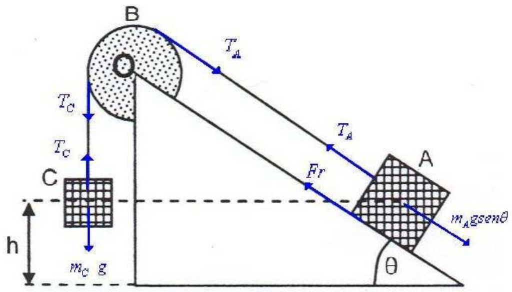
b)

$$\boxed{\frac{\Delta E_r}{E_p} = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{Mgh} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2} = \frac{m}{m+M} = \frac{2}{3}}$$

5.- Un cuerpo A de masa m_A desliza por un plano inclinado un ángulo θ con la horizontal. Con la ayuda de un hilo inextensible de masa despreciable, que pasa por una polea B, hace subir una carga C de masa m_C. La polea B es un disco homogéneo de masa m_B y radio R, que gira alrededor del eje fijo O perpendicular a su plano. El coeficiente de rozamiento cinético entre el cuerpo A y la superficie sobre la que desliza es μ_c. Determine:
a) La aceleración angular de B.

b) La energía del sistema al cabo de 2 s de iniciarse el movimiento, si inicialmente A y C estaban a una altura h sobre la base del plano inclinado.

Datos: $m_A = 10$ kg; $m_B = m_C = 1$ kg; R = 0.5 m; θ = 30º; $\mu_C = 0.2$; h = 10 m.



$m_A = 10Kg \quad m_B = m_C = 1Kg \quad R = 0.5m$

$\theta = 30^o,\ \mu_C = 0.2,\ h = 10m$

a) $\alpha = ?$

$Fr = \mu_C \cdot m_A \cdot g \cdot \cos\theta$

$$\begin{cases} T_C - m_C \cdot g = m_C \cdot a = m_C \cdot \alpha \cdot R \\ T_A R - T_C R = (T_A - T_C) R = I_B \alpha \\ m_A g sen\theta - T_A - \mu_C m_A g \cos\theta = m_A a = m_A \alpha R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_C = m_C \cdot \alpha \cdot R + m_C \cdot g \\ T_A = m_A g sen\theta - \mu_C m_A g \cos\theta - m_A \alpha R \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left[(m_A g sen\theta - \mu_C m_A g \cos\theta - m_A \alpha R) - (m_C \alpha R + m_C g) \right] R = \frac{1}{2} m_B R^2 \alpha$$

$$\alpha \left(\frac{1}{2} m_B R + m_A R + m_C R \right) = m_A g sen\theta - \mu_C m_A g \cos\theta - m_C g$$

$$\alpha = \frac{m_A g (sen\theta - \mu_C \cos\theta) - m_C g}{\left(\frac{1}{2} m_B + m_A + m_C \right) R} = \frac{10 \cdot 9.8 \cdot (sen 30^o - 0.2 \cos 30^o) - 1 \cdot 9.8}{\left(\frac{1}{2} \cdot 1 + 10 + 1 \right) 0.5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 3.87 rad/s^2}$$

b)

$$E_{sis}(2s) = K(2s\text{Cinética}) + U(2s\text{Potencial})$$

$$\omega_o = 0 \rightarrow \omega(2s) = 2\alpha \qquad V(2s) = \omega(2s) R = 2\alpha R$$

$$K_A = \frac{1}{2} m_A V^2 = \frac{1}{2} m_A \omega^2 R^2 = \frac{1}{2} m_A 4\alpha^2 R^2 = 2 m_A \alpha^2 R^2$$

$$K_C = \frac{1}{2} m_C V^2 = 2 m_C \alpha^2 R^2$$

$$K_B = \frac{1}{2} I_B \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_B R^2 \right) 4\alpha^2 = m_B R^2 \alpha^2$$

C habrá subido una distancia $=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\alpha R\cdot 2^2=2\alpha R$

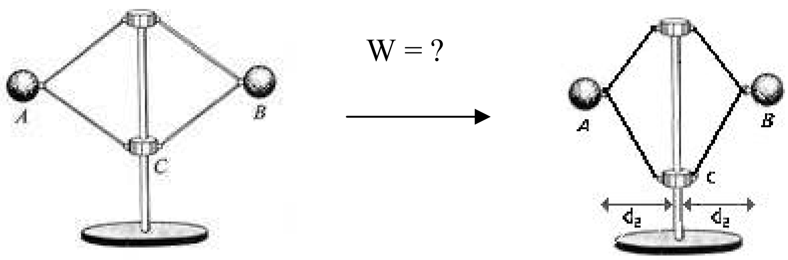
A habrá bajado una distancia $=2\alpha\cdot R\cdot sen\theta$

$$U=U_{inicial}+\Delta U_C+\Delta U_A=\left(m_Agh+m_Cgh\right)+\left(m_Cg2\alpha R\right)+\left(-m_Ag2\alpha R\cdot sen\theta\right)=$$
$$=\left(m_A+m_C\right)g\cdot h+2g\alpha R\left(m_C-m_A\cdot sen\theta\right)$$

$$E_{sist}\left(2s\right)=\left(2m_A+m_B+2m_C\right)\alpha^2R^2+\left(m_A+m_C\right)gh+\left(m_C-m_Asen\theta\right)2g\alpha R=$$
$$=\left(2\cdot 10+1+2\cdot 1\right)3.87^2\cdot 0.5^2+\left(10+1\right)9.8\cdot 10+\left(1-10\cdot sen30^{\text{o}}\right)2\cdot 9.8\cdot 3.87\cdot 0.5$$

$$\Rightarrow\boxed{E_{csist}\left(2s\right)=1012.41J}$$

6.- En la figura adjunta la masa de cada una de las bolas de acero A y B es de 500 g. Estas bolas están situadas a 15 cm del eje vertical cuando giran alrededor de él con una velocidad angular de 4 rad/s. Se obliga ahora al collar C a desplazarse hacia abajo hasta que las bolas se encuentren a una distancia de 5 cm del eje. ¿Qué trabajo se ha realizado en este desplazamiento? Despréciese la variación de energía potencial gravitatoria



$$m_A=m_B=500g=m \qquad d_2=5cm$$
$$d_1=15cm \qquad \omega_2=?$$
$$\omega_1=4\,rad/s \qquad I_2=2md_2^2$$
$$I_1=2md_1^2$$

$$W=\Delta E_{cr}=\frac{1}{2}I_2\omega_2^2-\frac{1}{2}I_1\omega_1^2$$

$$\sum M_{eje}=0\Rightarrow L_{eje}=I\omega=cte\Rightarrow I_1\omega_1=I_2\omega_2\Rightarrow\omega_2=\frac{I_1}{I_2}\omega_1=\frac{2md_1^2}{2md_2^2}\omega_1=\frac{d_1^2}{d_2^2}\omega_1$$

$$\omega_2=\frac{0.15^2}{0.05^2}4\,rad/s\Rightarrow\boxed{\omega_2=36\,rad/s}$$

$$W=\frac{1}{2}\left(2md_2^2\omega_2^2-2md_1^2\omega_1^2\right)=\frac{1}{2}2m(d_2^2\omega_2^2-d_1^2\omega_1^2)=0.5\left(0.05^2\cdot 36^2-0.15^2\cdot 4^2\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\boxed{W=1.44J}$$

7.-Un cilindro homogéneo rodando horizontalmente alcanza la base de un plano inclinado de 30º, y comienza a subirlo con una velocidad de 2 m/s.
a) ¿Qué longitud recorrerá rodando sin deslizar sobre el plano, hasta pararse?
b) ¿Con qué velocidad volverá a la base del plano si desciende ahora deslizando sin rodar, despreciando el rozamiento?

a)

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh \;\Rightarrow\; v^2 + \frac{1}{2}v^2 = g\ell\sin 30º \;\Rightarrow\; \ell = \frac{3v^2}{2g\frac{1}{2}} = 1{,}22 \text{ m}$$

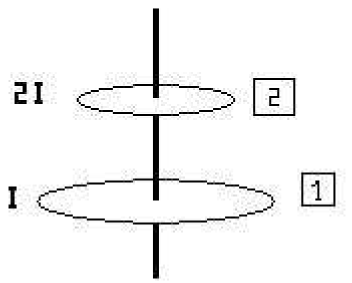
$$\Rightarrow \boxed{l = 1.22\,m}$$

b)

$$v = \sqrt{2g\ell\sin 30} = \sqrt{12} \text{ m s}^{-1}$$

$$\boxed{v = \sqrt{12}\,m/s}$$

8.- Un disco está girando libremente a 1800 rpm alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Un segundo disco montado en el mismo eje encima del primero está inicialmente en reposo. El momento de inercia del 2º disco es doble que el del 1º. Se deja caer el 2º disco sobre el 1º y finalmente los dos discos giran juntos. Calcular:
a) La nueva velocidad angular.
b) Demostrar que se pierde energía cinética durante el choque de los discos y qué porcentaje se pierde.



$$\omega_1 = 1800rpm = 60\pi rad/s$$
$$\omega_2 = 0$$
$$\omega' = ?$$
$$I_1 = I$$
$$I_2 = 2I$$

Aplicamos el principio de conservación del momento angular:

a)

$$L_i = L_f$$

$$I\omega_1 + 0 = I\omega' + 2I\omega' \Rightarrow I\omega_1 = 3I\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{1}{3}\omega_1 = 20\pi\, rad/s$$

$$\boxed{\omega' = 20\pi \;\; rad/s}$$

b)

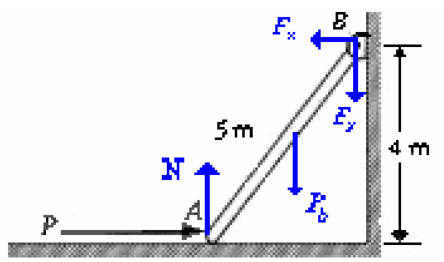
Antes $\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} I\omega_1^2 = \frac{1}{2} I \cdot 3600\pi^2 = 1800\pi^2 I\,(J)$

Después $\Rightarrow E_c' = \frac{1}{2} I 400\pi^2 + \frac{1}{2} 2I 400\pi^2 = 600\pi^2 I\,(J)$

$\Rightarrow \Delta E_c = E_c' - E_c = -1200\pi^2 I\,(J)$ $\boxed{\Delta E_c < 0}$ Se pierde energía cinética

$\frac{E_{cf}}{E_{ci}} = \frac{600\pi^2 I}{1800\pi^2 I} = \frac{1}{3} \Rightarrow E_{cf} = \frac{1}{3} E_{ci} \Rightarrow E_{cf} = 33\% E_{ci} \Rightarrow$ $\boxed{\text{Se pierde un 67\%}}$

9.- El extremo A de la barra AB de la figura descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento, mientras que el extremo B está articulado. Se ejerce una fuerza horizontal P de 60 N sobre el extremo A. El peso de la barra es 10 N. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la barra sobre el gozne B?



$P = 60N$ $\quad F_x = ?$

$P_b = 10N$ $\quad F_y = ?$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow P - F_x = 0 \Rightarrow F_x = P = 60N$

$\boxed{F_x = 60N(izq)}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - F_y - P_b = 0$

$\sum M_A = 0 \Rightarrow P_b \cdot 1.5 + F_y \cdot 3 - F_x \cdot 4 = 0$

$\Rightarrow F_y = \frac{4F_x - 1.5P_b}{3} = \frac{4 \cdot 60 - 1.5 \cdot 10}{3} \Rightarrow \boxed{F_y = 75N(abajo)}$

Las fuerzas (F_x, F_y) calculadas son las ejercidas por B sobre la barra, las ejercidas por la barra sobre B son:

$F_x^* = -F_x = 60N(derecha) \rightarrow$

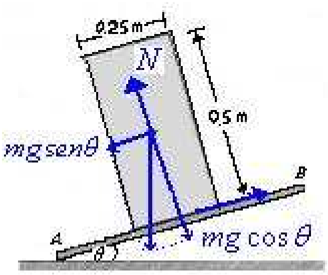
$F_y^* = -F_y = 75N(arriba) \uparrow$

10.- Un bloque rectangular homogéneo de 0.5 m de alto y 0.25 m de ancho descansa sobre una tabla AB, como muestra la figura. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la tabla es 0.4.

a) Si se eleva lentamente el extremo B de la tabla, ¿comenzará el bloque a deslizar hacia abajo antes de volcar? Calcúlese el ángulo para el que comienza a deslizar o volcar.

b) ¿Cuál sería la respuesta si el coeficiente de rozamiento estático fuera 0.6?

c) ¿y si fuera 0.5?



$h = 0.5m$ $\mu_e = 0.4$

$a = 0.25m$

$\theta = 0 \longrightarrow \theta \uparrow$ lentamente

¿desliza antes de volcar?

Para que deslice $\theta > \theta_d$, siendo $\Bigg\} \longrightarrow \begin{rcases} N = mg\cos\theta_d \\ Fr_{emáx} = \mu_e N = mg \cdot sen\theta_d \end{rcases}$ $tg\theta_d = \mu_e$

$$\theta_d = arctg\mu_e = arctg0.4 = 21.8^o$$

(para $\theta > \theta_d$ el bloque deslizará, θ_d es el ángulo límite de las condiciones estáticas)

Para que vuelque $\theta > \theta_v$, siendo $\Bigg\} \longrightarrow$ $\sum M_C = 0 \Rightarrow Nx - mg\cos\theta_v \cdot 0.125 + mgsen\theta_v 0.25 \Rightarrow$

($Nx = 0$ ya que justo en el momento en que empieza a volcar el único punto de contacto es C y la normal se desplaza hasta C $\Rightarrow x = 0$)

$\Rightarrow -mg\cos\theta_v \cdot 0.125 + mgsen\theta_v \cdot 0.25 = 0 \Rightarrow \cos\theta_v \cdot 0.125 = sen\theta_v \cdot 0.25$

$\Rightarrow tg\theta_v = \dfrac{0.125}{0.25} = 0.5$

$\boxed{\theta_v = arctg0.5 = 26.6^o}$

$\boxed{\theta_v > \theta_d \Rightarrow \text{deslizará antes de volcar}}$

b)

Si $\mu_e = 0.6 \Rightarrow \begin{rcases} \theta_d = arctg0.6 \\ \theta_v = arctg0.5 \end{rcases}$ $(\theta_v = 26.56^o) < (\theta_d = 30.96^o) \Rightarrow$ volcará antes

c)

Si $\mu_e = 0.5 \Rightarrow \theta_d = \theta_v = arctg0.5 \Rightarrow$ igual probabilidad

11.-Calcular el momento de inercia de la lámina plana de la figura respecto a los ejes mostrados en la figura y al perpendicular a ambos que pasa por la intersección. La lámina tiene una densidad superficial de 50 g/cm2.

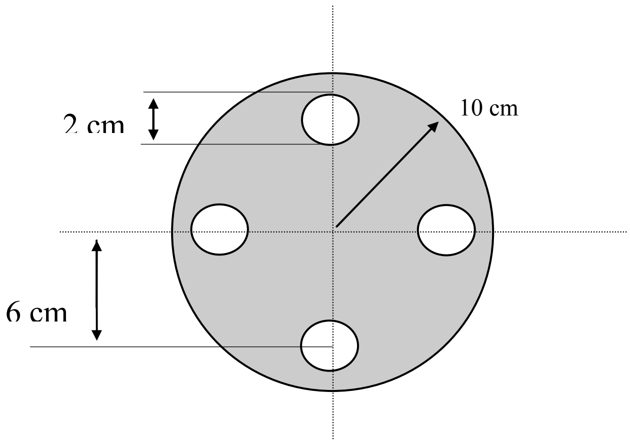


Figura maciza: $I_0 = \frac{1}{4}MR^2 = \frac{1}{4}\sigma(\pi R^2)R^2$

De un orificio respecto a su diámetro: $I_1 = \frac{1}{4}\sigma(\pi r^2)r^2$

$$\underline{I_x = I_y} = I_0 - 2I_1 - 2\left(I_1 + \sigma(\pi r^2)d^2\right) = \frac{\sigma\pi}{4}(R^4 - 4r^4 - 8r^2d^2) = \underline{3{,}92 \text{ kg m}^2}$$

$$\boxed{I_z = 2I_x = 7.84 \text{ kgm}^2}$$

12.-Un ventilador tiene tres aspas iguales en forma de sector circular de 10 cm de radio y 30º de ángulo en el vértice. Se suponen de sección constante y están unidas por el vértice al eje de rotación. La masa de cada una es de 50 g.

a) Calcular su momento de inercia en torno al eje de rotación (normal al plano de las aspas).

b) Si el ventilador tiene una energía cinética de 5 J, hallar su momento angular.

c) Si al desconectar el motor se detiene en 15 s, calcular el par de fuerzas de rozamiento.

a) $\underline{I} = 3\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{30}{360} = \frac{1}{8}0{,}05 \cdot 0{,}1^2 = \underline{6{,}25 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2}$

b) $\underline{L} = I\omega = I\sqrt{\frac{2E}{I}} = \sqrt{2EI} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot \frac{5}{8}10^{-4}} = \underline{2{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}}$

c) $\underline{\tau} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-2}}{15} = \underline{\frac{5}{3}10^{-3} \text{ Nm}}$

13.-Un automóvil toma una curva de 30 m de radio a la velocidad de 90 km/hora. Calcular el par giroscópico al que ha de estar sometida cada una de sus ruedas, si su radio es r = 25 cm y su momento de inercia es I = 1 kgm^2.

$$L = I\omega = I\frac{v}{r}; \qquad \tau = L\Omega = I\frac{v}{r}\frac{v}{R} = I\frac{v^2}{rR} = \frac{(90/3,6)^2}{30\cdot 0,25} = 83,3 \text{ Nm}$$

$$\boxed{\text{L =83.3 Nm}}$$

14.-Un carrete está formado por un cilindro macizo (m_1=1kg, R_1=3 cm, l=15 cm) y dos discos (m_2 = 0,5 kg, R_2 = 5 cm) unidos concéntricamente a las bases del cilindro. El carrete rueda por un plano inclinado 30º. Hallar:
a) Los momentos de inercia principales del carrete.
b) Su aceleración angular si no desliza.
c) El coeficiente de fricción estática μ_e mínimo para que no deslice.

a) $I_z = \frac{1}{2}m_1R_1^2 + 2\frac{1}{2}m_2R_2^2 = 0,5\cdot 0,03^2 + 0,5\cdot 0,05^2 = 18\cdot 10^{-4}$ kg m^2

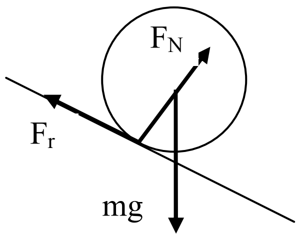
Despreciando ahora el radio del eje;

$$I_x = I_y = \frac{1}{12}m_1\ell^2 + 2\left(\frac{1}{4}m_2R_2^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right) = 8,125\cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} mg\sin\varphi - F_r = ma \\ F_rR = I\alpha = \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R} \end{array}\right\} mg\sin\varphi = \frac{3}{2}ma \;\Rightarrow\; \boxed{a} = \frac{2}{3}g\sin\varphi = \boxed{\frac{g}{3}}$$

c)



$$F_r = mg\sin\varphi - ma = m\left(g\sin\varphi - g/3\right) = \frac{mg}{6}$$

$$F_r \le \mu_eF_N = \mu_emg\cos\varphi; \quad \boxed{\mu_{e,\min}} = \frac{mg/6}{mg\cos\varphi} = \boxed{\frac{1}{3\sqrt{3}}}$$

15.-Un carrete está formado por dos ruedas unidas por su centro mediante un eje de masa despreciable. Cada rueda está formada por una llanta de M = 1 kg, R = 10 cm y espesor despreciable y cuatro barras radiales muy delgadas de m = 250 g cada una. Hallar:
a) El momento de inercia del carrete alrededor de su eje.
b) La condición de rodadura sin deslizamiento al situarlo en un plano inclinado de ángulo φ.

a) $I = 2\left(MR^2 + 4\left(\frac{1}{3}mR^2\right)\right) = 2\left(M + \frac{4}{3}m\right)R^2 = \frac{0,08}{3}\ \text{kg m}^2$

$$\boxed{I = 0.08/3\ \text{kgm}^2}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l}(\Sigma m)\,g\sin\varphi - F_r = (\Sigma m)\,a \\ F_r R = I\alpha = I\dfrac{a}{R}\end{array}\right\}\ (\Sigma m)\,g\sin\varphi = \left(\frac{I}{R^2} + (\Sigma m)\right)a$$

Haciendo $I = k(\Sigma m)R^2,\ k = \dfrac{I}{(\Sigma m)R^2} = \dfrac{0,08/3}{4\cdot 0,1^2} = \dfrac{2}{3}$,

$$a = \frac{(\Sigma m)\,g\sin\varphi}{\left(\dfrac{k(\Sigma m)R^2}{R^2} + (\Sigma m)\right)} = \frac{g\sin\varphi}{1+k} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{2}{3}}g = 0,3g$$

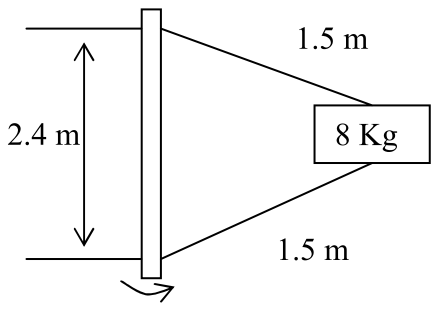
$$F_r = \frac{I}{R^2}a = \frac{k(\Sigma m)R^2}{R^2}\frac{g\sin\varphi}{1+k} = \frac{k}{1+k}(\Sigma m)\,g\sin\varphi \le \mu_e(\Sigma m)\,g\cos\varphi \ \Rightarrow$$

$$\boxed{\mu_e \ge \frac{\frac{k}{1+k}(\Sigma m)\,g\sin\varphi}{(\Sigma m)\,g\cos\varphi} = \frac{k}{1+k}\tan\varphi = \frac{2}{5}\tan\varphi}$$

16.-El bloque de 8 kg de la figura está sujeto a una barra vertical mediante dos cuerdas de 1.5 m de longitud. Cuando el sistema gira alrededor del eje de la barra, las cuerdas están tensas, según indica la figura.

a) ¿Cuántas vueltas por minuto ha de dar el sistema para que la tensión en la cuerda superior sea de 150 N?

b) ¿Cuál es entonces la tensión de la cuerda inferior?



a)

$$\alpha = \arcsin\frac{1,2}{1,5} = \arcsin 0,8$$

Vertical: $(T_1 - T_2)\sin\alpha = mg \quad \Rightarrow \quad T_1 - T_2 = mg/0,8$

Horizontal: $(T_1 + T_2)\cos\alpha = m\omega^2 R = m\omega^2\cdot 1,5\cos\alpha \ \Rightarrow\ T_1 + T_2 = 1,5m\omega^2$

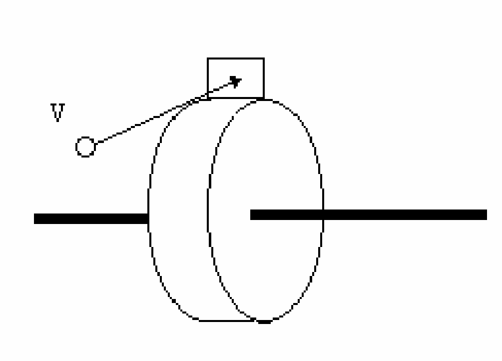
$2T_1 = \dfrac{mg}{0,8} + m\omega^2$; $\qquad \boxed{\omega = \dfrac{60}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2\cdot 150}{8} - \dfrac{g}{0,8}} = 48\ \text{vueltas/min}}$

b) $\boxed{T_2 = 1{,}5m\omega^2 - T_1 = 1{,}5 \cdot 8 \cdot 5{,}025^2 - 150 = 153 \text{ N}}$

17.-Un disco de masa M = 6 kg y radio R = 20 cm tiene en su periferia una plaquita de masa despreciable, Sobre ella incide una pelota de masa m = 0,5 kg, lanzada a una velocidad de 4 m/s, en dirección tangente a la periferia del disco. Despreciando los rozamientos, calcular la velocidad angular adquirida por el disco cuando el choque es:

a) Elástico,

b) Plástico.



a)

$$\left.\begin{array}{l} L_i = L_f \;\Rightarrow\; mv_iR = mv_fR + I\omega \\ E_i = E_f \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \end{array}\right\} v_f = v_i - \frac{I\omega}{mR}$$

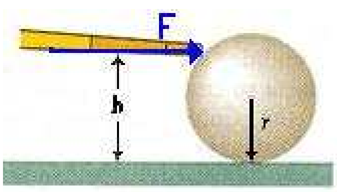
$$v_i^2 = \left(v_i - \frac{I\omega}{mR}\right)^2 + \frac{I}{m}\omega^2 = v_i^2 + \left(\frac{I\omega}{mR}\right)^2 - 2v_i\frac{I\omega}{mR} + \frac{I}{m}\omega^2 \;\Rightarrow$$

$$\omega\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right) = \frac{2v_i}{R}, \qquad \boxed{\omega = \frac{2v_i}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \frac{2v_i}{1 + \frac{M}{2m}} = \frac{8}{7} \text{ rad/s}}$$

b)

$$mv_iR = \left(I + mR^2\right)\omega \;\Rightarrow\; \boxed{\omega = \frac{mv_iR}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2} = \frac{0{,}5 \cdot 4}{3{,}5 \cdot 0{,}2} = \frac{20}{7} \text{ rad/s}}$$

18.- Determine a qué altura h de la superficie de la mesa debe golpearse horizontalmente con el taco a la bola de billar para que ruede sin deslizar, considerando despreciable el rozamiento estático.



Actúa una F impulsora /

$$\left.\begin{array}{l} F = m \cdot a_{cm} \\ F\left(h - r\right) = \left(\frac{2}{5}mr^2\right)\alpha \end{array}\right\}$$

Cumpliéndose la condición de rodadura:

$$\Rightarrow v_{cm} = \omega r \quad \text{ó} \quad a_{cm} = \alpha r \Rightarrow \alpha = \frac{a_{cm}}{r}$$

$$\left.\begin{array}{l} F = m \cdot a_{cm} \\ F\left(h - r\right) = \frac{2}{5}mr^2\frac{a_{cm}}{r} \end{array}\right\} \quad \left(h - r\right) = \frac{2}{5}r \Rightarrow \boxed{h = \frac{7}{5}r}$$

19.- Una varilla de longitud L=1 m y masa M=300 g puede rotar alrededor del pivote A. Una bala de masa m=10 g con una velocidad v=100 m/s golpea la varilla a una distancia a=80 cm de A.

a) Halle la velocidad angular de la varilla si la bala:

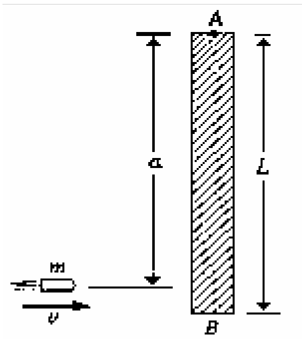
a1) se incrusta en ella;

a.2) rebota elásticamente.

b) Halle la energía cinética de la varilla y la variación de energía cinética del sistema en los dos casos anteriores.

c) ¿Por qué en general (es decir para valores cualesquiera de L y a) no es constante la cantidad de movimiento del sistema?

d) Determine la relación entre a y L para la cual permanece constante la cantidad de movimiento del sistema.



$$L = 1m = 100cm$$
$$M = 300g$$
$$m = 10g$$
$$v = 100\,m/s = 10^4\,cm/s$$
$$a = 80cm$$

a.1) $\omega_1 = ?\quad \vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = cte \Rightarrow L_{iA} = L_{fA}$

$$\left.\begin{array}{l} L_i = mva \\ L_f = (I_b + I_v)\omega_1 \end{array}\right\} mva = (I_b + I_v)\omega_1 \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \frac{mva}{ma^2 + \frac{1}{3}ML^2}} \Rightarrow \omega_1 = \frac{10\cdot 10^4\cdot 80}{10\cdot 80^2 + \frac{1}{3}300\cdot 100^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_1 = 7.52\,rad/s}$$

a.2)

$\omega_2 = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} L_i = mva \\ L_f = -mv'a + I_v\omega_2 \end{array}\right\} mva = -mv'a + I_v\omega_2 \\ E_C = cte \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I_v\omega_2^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} v + v' = \dfrac{I_v\omega_2}{ma} \\ v^2 - v'^2 = \dfrac{I_v\omega_2^2}{m} \Rightarrow \end{array}$$

$$(v+v')(v-v') = \frac{I_v\omega_2}{ma}(v-v') = \frac{I_v\omega_2^2}{m} \Rightarrow v - v' = \omega_2 a \Rightarrow v' = v - \omega_2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v + v' = v + v - \omega_2 a = 2v - \omega_2 a = \frac{I_v\omega_2}{ma} \Rightarrow 2v = \omega_2\left(\frac{I_v}{ma} + a\right) \Rightarrow \boxed{\omega_2 = \frac{2vma}{I_v + ma^2} = 2\omega_1}$$

$\Rightarrow \boxed{\omega_2 = 15.04\,rad/s}$

b.1)

$$E_{CV1} = \frac{1}{2} I_v \omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}300 \cdot 100^2\right)7.52^2 = 28275200\,Ergios \rightarrow \boxed{E_{CV1} = 2.83J}$$

$$\Delta E_{Csist1} = \frac{1}{2}(I_b + I_v)\omega_1^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(ma^2 + \frac{1}{3}ML^2\right)\omega_1^2 - \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \boxed{\Delta E_{Csist1} = -46.99J}$$

b.2)

$$E_{CV2} = \frac{1}{2} I_v \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}300 \cdot 100^2\right)10.54^2 = 1.131 \cdot 10^8\,Ergios \rightarrow \boxed{E_{CV2} = 11.31J}$$

$$\boxed{\Delta E_{Csist2} = 0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega_2^2 + \frac{1}{2}m(v - \omega_2 a)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = 1800\,Ergios = 0.0018J$$

c)

Porque $\sum \vec{F}_{ext} \neq 0$ (∃ fuerzas de reacción en el pivote A) $\Rightarrow \vec{P} \neq cte$

Pero $\sum \vec{M}_{extA} = 0$ (por estar ejercidas en A) $\Rightarrow \vec{L}_A = cte$

d.1)

$$P_i = P_f \Rightarrow mv = m\omega_1 a + M\omega_1 \frac{L}{2} = \left(ma + \frac{1}{2}ML\right)\omega_1 \Rightarrow mv = \left(ma + \frac{1}{2}ML\right)\frac{mva}{ma^2 + \frac{1}{3}ML^2} \Rightarrow$$

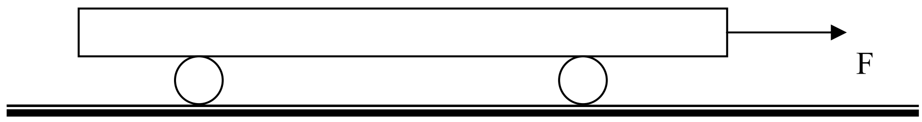
$$\Rightarrow ma^2 + \frac{1}{3}ML^2 = ma^2 + \frac{1}{2}MLa \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}L}$$

d.2)

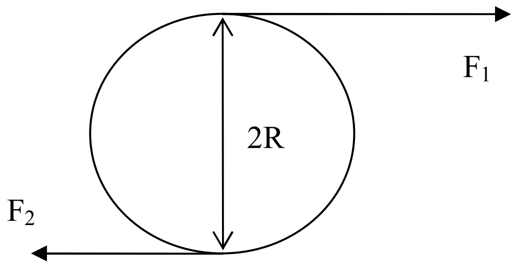
$$P_i = P_f \Rightarrow mv = -mv' + M\omega_2 \frac{L}{2} \Rightarrow m(v + v') = M\omega_2 \frac{L}{2} \Rightarrow m\frac{I_v \omega_2}{ma} = M\omega_2 \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{I_v}{a} = M\frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}ML^2 \frac{1}{a} = M\frac{L}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}L} \Rightarrow \boxed{a = 66.6cm}$$

20.-Un tablero de masa M se apoya sobre el suelo horizontal a través de 2 rodillos cilíndricos homogéneos, iguales y paralelos de radio R y masa m cada uno.
a) Si se remolca el conjunto aplicando una fuerza horizontal F, encontrar las expresiones de la aceleración lineal del tablero y la angular de los cilindros, suponiendo que no hay deslizamiento.
b) Hallar el coeficiente de rozamiento estático mínimo para que no haya deslizamiento, si F = 200 N, M = 50 kg y m = 10 kg.



a)



$$\left.\begin{array}{l}
1)\quad \text{Traslación tabla: } F-2F_1=Ma \\
2)\quad \text{Traslación rodillo: } F_1-F_2=ma'=m\dfrac{a}{2} \\
3)\quad \text{Rotación rodillo: } R\left(F_1+F_2\right)=I\alpha=I\dfrac{a'}{R} \;\Rightarrow\; F_1+F_2=\left(\dfrac{1}{2}mR^2\right)\dfrac{a}{2R^2}=\dfrac{1}{4}ma
\end{array}\right\}$$

Sumando 2+3: $2F_1=\dfrac{3}{4}ma$

Sustituyendo en 1: $F-\dfrac{3}{4}ma=Ma \Rightarrow \boxed{a=\dfrac{F}{M+\dfrac{3}{4}m} \quad , \quad \alpha=\dfrac{F}{2R\left(M+\dfrac{3}{4}m\right)}}$

b)

Fuerzas de rozamiento:

$$F_1=\frac{3}{8}ma=\frac{3}{8}m\frac{F}{M+\dfrac{3}{4}m}=\frac{3F}{6+8(M/m)}$$

$$F_2=F_1-\frac{ma}{2}=\frac{3}{8}ma-\frac{1}{2}ma=-\frac{1}{8}ma=-\frac{F}{6+8(M/m)}$$

El peor caso es el de F_1, ya que esta fuerza tiene módulo triple que F_2, mientras la fuerza normal es menor en el apoyo 1 que en el 2.

$$\mu_{\min}=\frac{F_1}{F_N}=\frac{F_1}{Mg/2}=\frac{3F}{(Mg/2)(6+8(M/m))}=\frac{3F/g}{3M+4\left(M^2/m\right)}=\boxed{1{,}77\cdot 10^{-2}}$$