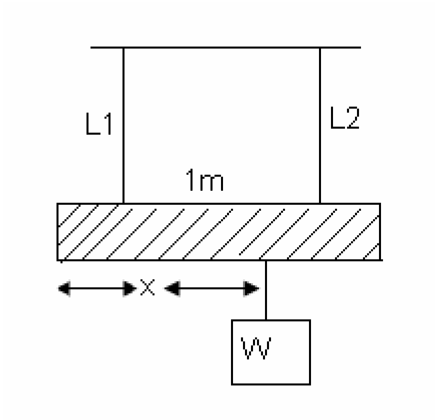
Relación de problemas: Tema 3

1.- Una barra rígida de 1 m de longitud, cuyo peso es despreciable, está sostenida horizontalmente en sus extremos por dos hilos verticales de la misma longitud; uno de ellos es de acero y el otro de cobre, siendo sus secciones rectas de 1 mm^2 y 2 mm^2 respectivamente. ¿En qué punto de la barra ha de suspenderse un peso W para producir:

a) igual esfuerzo en ambos hilos?
b) igual deformación unitaria en ambos hilos?



$$1 = acero$$
$$2 = cobre$$

$$E_1 = E_{acero} = 20.0\cdot 10^{10}\,Nm^{-2}$$
$$E_2 = E_{cobre} = 12.8\cdot 10^{10}\,Nm^{-2}$$
$$\ell_1 = \ell_2$$
$$s_1 = 1mm^2$$
$$s_2 = 2mm^2$$

$$x = ?/ \quad \begin{array}{l} a)\sigma_{l1} = \sigma_{l2} \\ b)\varepsilon_{l1} = \varepsilon_{l2} \end{array}$$

a) $\sigma_l = E\cdot\varepsilon_l = E\dfrac{\Delta\ell}{\ell} = \dfrac{F_l}{s}$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \dfrac{F_1}{s_1} = \dfrac{F_2}{s_2} \Rightarrow \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{s_1}{s_2} = \dfrac{1}{2} \\ F_1 x = F_2\left(D-x\right) \Rightarrow \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{D-x}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{D-x}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow D = x\left(\frac{1}{2}+1\right) = 1.5x \Rightarrow x = \frac{D}{1.5}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{1.5} = 66.7cm}$$

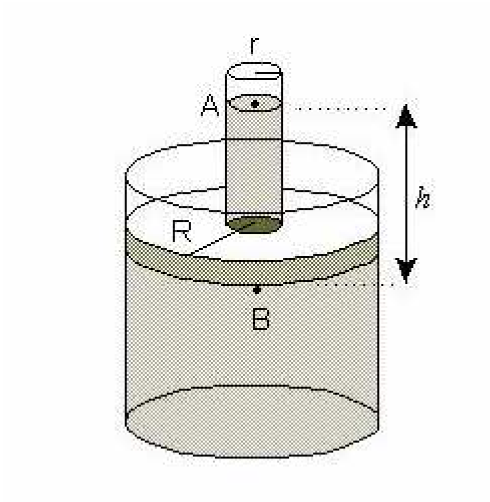
b)

$$\varepsilon_{l1} = \varepsilon_{l2} \Rightarrow \frac{\Delta\ell_1}{\ell_1} = \frac{\Delta\ell_2}{\ell_2} \Rightarrow \Delta\ell_1 = \Delta\ell_2$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F/s}{E} \Rightarrow \frac{F_1/s_1}{E_1} = \frac{F_2/s_2}{E_2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{E_1 s_1}{E_2 s_2} \Rightarrow \frac{E_1 s_1}{E_2 s_2} = \frac{D-x}{x} \Rightarrow x\left(\frac{E_1 s_1}{E_2 s_2}+1\right) = D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{20\cdot 1}{12.8\cdot 2}+1\right) = 1 \Rightarrow \boxed{x = 56.1cm}$$

2.-Un cilindro vertical, de 30 cm de diámetro, contiene agua, sobre cuya superficie descansa un émbolo perfectamente ajustado al cilindro y atravesado por un tubo abierto por sus dos extremos, de 1 cm de diámetro. El peso del émbolo, con el tubo, es de 10 kg. ¿Hasta que altura h por encima de la base inferior del émbolo subirá el agua por el interior del tubo?



$$\left.\begin{array}{l} M = 10\,kg \\ R = 15\,cm \\ r = 0.5\,cm \end{array}\right\}$$

$$P_B = P_{atm} + \frac{Mg}{S} = P_{atm} + \frac{Mg}{\pi\left(R^2 - r^2\right)}$$

$$P_A - P_B = -\rho g\left(Z_A - Z_B\right)$$

$$\rightarrow \frac{Mg}{\pi\left(R^2 - r^2\right)} = \rho g h$$

$$h = \frac{\pi}{\rho\pi\left(R^2 - r^2\right)} = 14.163\,cm$$

$$\boxed{h = 14.163\,cm}$$

3.-Una bola de acero de radio R=1 mm se deja caer en un depósito de glicerina.
a) ¿Con qué velocidad se mueve cuando su aceleración es la mitad de la de un cuerpo que cae libremente?
b) ¿Cuál es la velocidad límite que adquiere en la caída?
Datos:
Densidad del acero ρ_o=8.5 g/cm^3
Densidad de la glicerina ρ_g=1.32 g/cm^3
Viscosidad de la glicerina η=8.27 P

a)

$$a = g/2$$

$$\sum F = ma$$

$$mg - 6\pi\eta R v - \rho_g V g = ma = m\frac{g}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{-m\dfrac{g}{2} + mg - \rho_g V g}{6\pi\eta R} = \dfrac{m\dfrac{g}{2} - \rho_g V g}{6\pi\eta R} \\ V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 4.18\cdot 10^{-3}\,cm^3 \\ m = 35.53\cdot 10^{-3}\,g \end{array}\right\} \boxed{v = 0.77\cdot 10^{-2}\,cm/s}$$

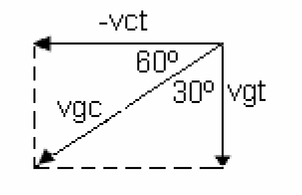
b)

$$\sum F = 0$$
$$mg - 6\pi\eta R v - \rho_g V g = 0$$
$$v = \frac{mg - \rho_g V g}{6\pi\eta R}$$

$$\boxed{v = 1.89 \cdot 10^{-2}\, cm/s}$$

4.-La lluvia deja trazas en la ventana lateral del automóvil de 60º de inclinación respecto a la horizontal.
a) Si el automóvil tiene una velocidad de 60 km/h y no hay viento, ¿cuál es la velocidad de las gotas de lluvia?
b) Supuestas esféricas y que han alcanzado la velocidad límite, ¿cuál es su radio?
c) ¿Cuánto vale la sobrepresión debida a la tensión superficial?
Datos:
Viscosidad del aire: η = 0.001 Ns/m^2
Tensión superficial del agua: σ =7·10^{-2} N/m

a)



$$v_{ct} = v_{gc}\cos 60 \rightarrow v_{gc} = \frac{v_{ct}}{\cos 60}$$
$$v_{gt} = v_{gc}\sin 60 = v_{ct} tg 60 = 103.8\, km/h$$
$$\boxed{v_{gt} = 28.83\, m/s}$$

b)

Si despreciamos la densidad del aire ρ_o frente a la del agua ρ:

$$v_L = \frac{2}{9} R^2 \frac{(\rho - \rho_0)}{\eta} g \underbrace{=}_{\rho_0 = 0} \frac{2}{9} R^2 \frac{\rho}{\eta} g$$

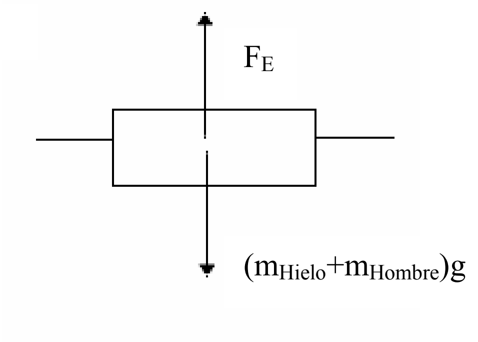
$$R^2 = \frac{9}{2}\frac{\eta v_L}{\rho g} \rightarrow R = \sqrt{\frac{9}{2}\frac{\eta v_L}{\rho g}}$$
$$\boxed{R = 0.32\, cm}$$

c)

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R} \text{ (Ley de Laplace)}$$

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{0.32 \cdot 10^{-2}} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{-2}}{0.32 \cdot 10^{-2}} = 43.75\, Pa$$

5.-¿Cuál deberá ser la superficie de un bloque de hielo (ρ_{hielo} =0.922 g/cm^3), de 25cm de espesor, que flota en agua (ρ_{agua} =1 g/cm^3), para que pueda soportar como máximo el peso de una persona de 80 kg sin hundirse?



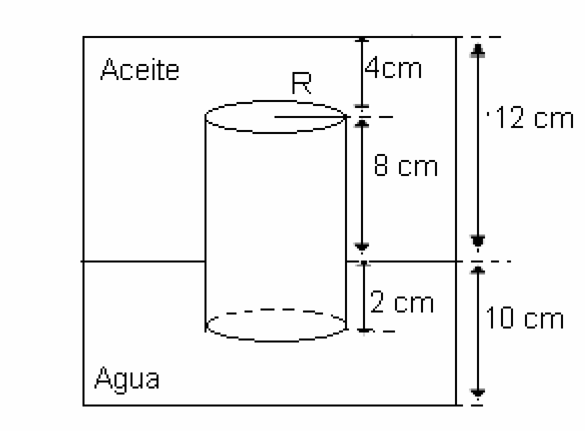
$$\vec{P}_{hielo} + \vec{P}_{\text{hom}bre} - \vec{F}_E = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{hielo} g + m_{\text{hom}bre} g - hS\rho_{agua} g = 0 \\ m_{hielo} = \rho_{hielo} V_{hielo} = \rho_{hielo} hS \end{array}\right\} \rightarrow hS\left(\rho_{hielo} - \rho_{agua}\right) = -m_{\text{hom}bre}$$

$$\rightarrow S = \frac{m_{\text{hom}bre}}{h\left(\rho_{agua} - \rho_{hielo}\right)}$$

$$\boxed{S = 4.1 m^2}$$

6.-Un bloque cilíndrico de madera de radio 2cm y altura 10 cm, flota verticalmente entre dos capas, una de aceite y otra de agua, estando su cara inferior 2 cm por debajo de la superficie de separación. La densidad del aceite es 0.6 g/cm^3.
a) ¿Cuál es la masa del bloque?
b) ¿Cuál es la presión manométrica en la cara inferior del bloque?



$R = 2cm$
$h = 10cm$
$\rho_{aceite} = \rho_{ac} = 0.6\, g/cm^3$

a) $m_b = ?$ $\qquad m_b = \rho_b \cdot V_b$

Peso = Empuje hidrostático

$$\Rightarrow m_b \cancel{g} = \rho_{H_2O} \cdot V_{H_2O} \cancel{g} + \rho_{ac} V_{ac} \cancel{g}$$

$$\Rightarrow m_b = 1\left(\text{g}/\text{cm}^3\right) \cdot \left(\pi \cdot 2^2 \cdot 2\right)\left(\text{cm}^3\right) + 0.6\left(\text{g}/\text{cm}^3\right) \cdot \left(\pi \cdot 2^2 \cdot 8\right)\left(\text{cm}^3\right)$$

$$\boxed{m_b = 85.5g}$$

b)
$$P_m(\text{cara inferior}) = \rho_{ac} g h_{ac} + \rho_{H_2O} g h_{H_2O} =$$
$$= 0.6 \cdot 980 \cdot 12 + 1 \cdot 980 \cdot 2 = 9016\, Din/cm^2$$

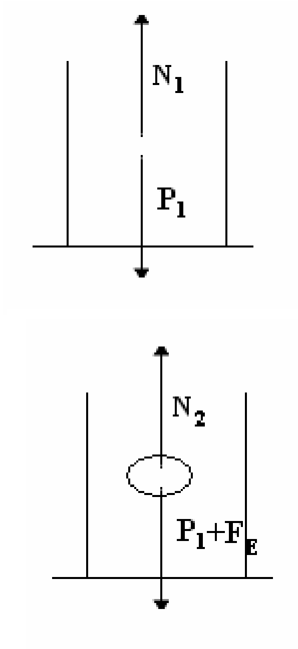
o bien:

$$P_m(\text{cara inferior}) = \rho_{ac} g h'_{ac} + \rho_b g h_b$$
$$= 0.6 \cdot 980 \cdot 4 + \frac{85.5}{\pi \cdot 2^2 \cdot 10} 980 \cdot 10 = 9016\, Din/cm^2$$

$$\boxed{P_m(\text{cara inferior}) = 9016\, {}^{Din}\!/_{cm^2}}$$

7.- Para determinar la densidad de un material insoluble en agua, se toma una muestra del mismo cuya masa es de 150 g. Sobre el plato de una balanza de resorte se coloca un vaso de laboratorio que contiene agua; en estas circunstancias la balanza registra 720 g. A continuación, se introduce la muestra de mineral en el agua, colgada de un hilo ligero, de modo que no toque ni con las paredes ni con el fondo del vaso y que quede totalmente sumergido; en estas condiciones la balanza registra 775 g.
a) Calcular la densidad del material.
b) Calcular la tensión del hilo.

a)

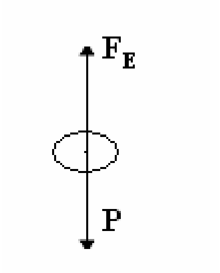


$$m = 150\, g$$
$$N_1 = 0.720 \cdot g = 7.056\, N$$
$$N_2 = 0.775 \cdot g = 7.595\, N$$
$$P_1 - N_1 = 0 \rightarrow P_1 = N_1 = 7.056\, N$$

$$N_2 - P_1 - F_E = 0$$
$$\left.\begin{array}{l} F_E = N_2 - N_1 \\ F_E = \rho_{agua} V_{mineral}\, g \end{array}\right\} V_{mineral} = \frac{N_2 - N_1}{\rho_{agua}\, g}$$
$$\rho_{mineral} = \frac{m_{mineral}}{V_{mineral}} = \frac{m \rho_{agua}\, g}{N_2 - N_1} = 2.73\, g/cm^3$$

$$\boxed{\rho_{mineral} = 2.73\, g/cm^3}$$

b)



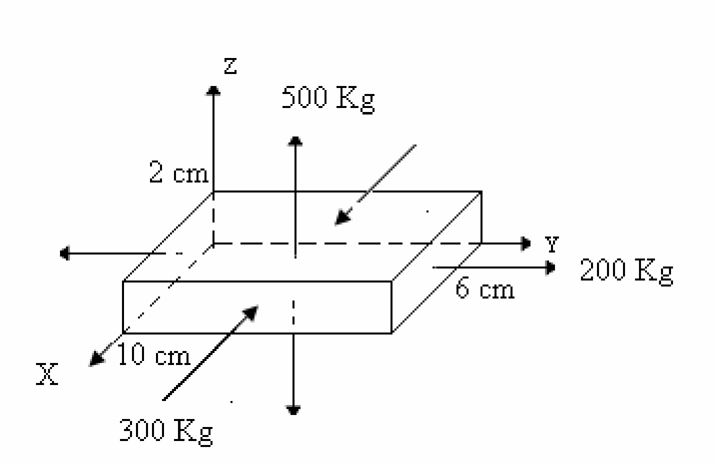
$$mg - T - F_E = 0$$
$$T = mg - F_E$$

$$\boxed{T = 0.931\ N}$$

8.-Un paralelepípedo rectangular de aluminio, cuyas dimensiones son 10 cm x 6 cm x 2 cm, está sometido a fuerzas normales tensoras de 500 kg y 200 kg sobre sus caras de 10x6 cm^2 y 10x2 cm^2, respectivamente, y compresoras de 300 kg sobre las caras de 6x2 cm^2.

a) Calcule las deformaciones unitarias que experimentan sus aristas, así como el cambio en el volumen del cuerpo.

b) ¿Cuál es la densidad de energía elástica almacenada en el cuerpo?



$$V = (10 \times 6 \times 2)\,cm^3$$

$$E_{Aluminio} = 7.1 \cdot 10^{10}\, Nm^{-2}$$

$$\mu_{Aluminio} = 0.34$$

a) $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz} = ?$, $\Delta V = ?$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \mu \cdot \sigma_{yy} - \mu \cdot \sigma_{zz}\right)$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{300 \cdot 9.8N}{6.2 \cdot 10^{-4} m^2} = -24.5 \cdot 10^5\, N/m^2$$

$$\sigma_{yy} = +\frac{200 \cdot 9.8N}{10 \cdot 2 \cdot 10^{-4} m^2} = 9.8 \cdot 10^5\, N/m^2$$

$$\sigma_{zz} = +\frac{500 \cdot 9.8N}{10 \cdot 6 \cdot 10^{-4} m^2} = 8.167 \cdot 10^5\, N/m^2$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{10^5}{7.1 \cdot 10^{10}}\left(-24.5 - 0.34 \cdot 9.8 - 0.34 \cdot 8.167\right) = -4.31 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{10^5}{7.1 \cdot 10^{10}}\left(+0.34 \cdot 24.5 + 9.8 - 0.34 \cdot 8.167\right) = 2.16 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{10^5}{7.1 \cdot 10^{10}}\left(+0.34 \cdot 24.5 - 0.34 \cdot 9.8 + 8.167\right) = 1.85 \cdot 10^{-5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -4.31 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_{yy} &= 2.16 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_{zz} &= 1.85 \cdot 10^{-5} \end{aligned}}$$

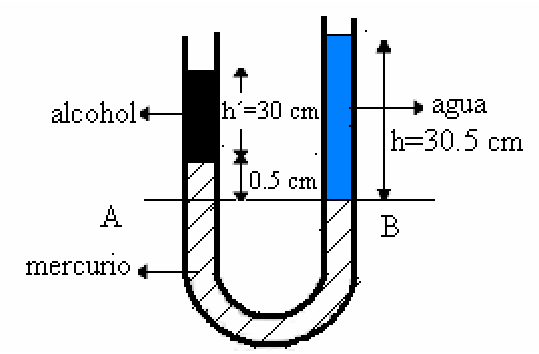
$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = -0.3 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \Delta V = -0.3 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2cm^3 \Rightarrow \boxed{\Delta V = 3.6 \cdot 10^{-4} cm^3}$$

b)

$$u=\frac{E_{el}}{V}=\frac{1}{2}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\frac{1}{2}\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\frac{1}{2}\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}=\frac{1}{2}(24.5\cdot 4.31+9.8\cdot 2.16+8.167\cdot 1.85)10^{5}\cdot 10^{-5}\Rightarrow$$

$$\boxed{u=70.94\,J/m^{3}}$$

9.- Un tubo en U contiene mercurio. Se vierte agua en una de las ramas y en la otra alcohol hasta que sus superficies están al mismo nivel. La longitud de la columna de agua es 30.5 cm y la del alcohol 30 cm.
a) Hállese la densidad del alcohol.
b) Añadiendo o quitando alcohol se consigue que las dos superficies de mercurio estén al mismo nivel; ¿cuánto vale entonces la altura de la columna de alcohol?
Dato: ρ(Hg)=13.6 g/cm³



$P_A = P_B$

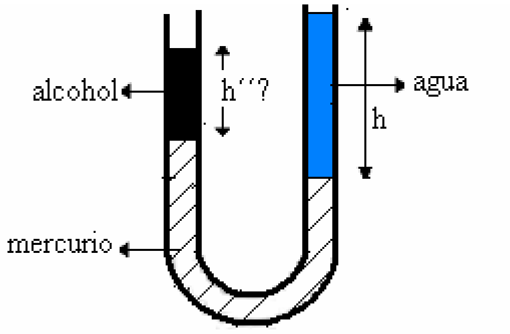
$$P_B = P_{atm} + \rho_{agua} g h$$
$$P_A = P_{atm} + \rho_{alc} g h' + \rho_{Hg} g (0.5)$$

Al igualar las dos expresiones podemos despejar la densidad del alcohol:

$$\rho_{alc} = \frac{30.5\rho_{agua} - 0.5\rho_{Hg}}{30}$$

$$\boxed{\rho_{alc} = 0.79\, g/cm^{3}}$$

b)

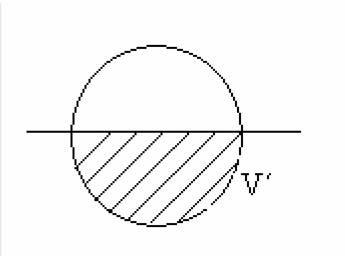


$$\rho_{alc} g h'' = \rho_{agua} g h \Rightarrow h'' = \frac{\rho_{agua}}{\rho_{alc}} h$$

$\boxed{h´´=38.6 \text{ cm}}$

10.-Si la densidad del acero es de 7.9 g/cm^3 y la tensión superficial del agua a 20ºC es de 75.6 dyn/cm, ¿ cuál será el diámetro que debe de poseer una esfera de acero para flotar en el agua con exactamente la mitad de su volumen sumergido?

En equilibrio: P=E+F$_{tensión}$



$$\rho_{ac} V g = \rho_{agua} \frac{V}{2} g + \sigma l = \rho_{agua} \frac{V}{2} g + \sigma 2\pi r = \rho_{agua} \frac{V}{2} g + \sigma \pi d$$

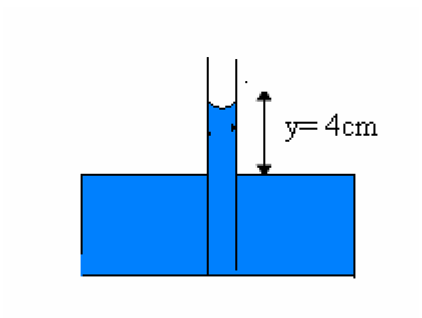
$$\rho_{acero} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 g = \rho_{agua} \frac{4}{6} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 g + \sigma \pi d$$

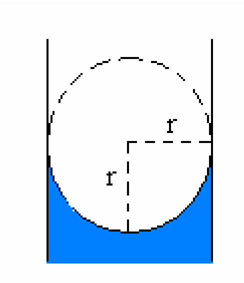
$$\frac{1}{6} g d^2 \left(\rho_{acero} - \frac{1}{2} \rho_{agua}\right) = \sigma$$

$$d = \sqrt{\frac{12\sigma}{g\left(2\rho_{acero} - \rho_{agua}\right)}}$$

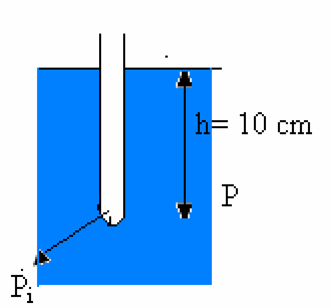
$$\boxed{d = 2.5mm}$$

11.- Un tubo capilar está sumergido en agua, con su extremo inferior a 10 cm por debajo de la superficie de la misma. El agua se eleva en el tubo hasta una altura de 4 cm por encima de la superficie, y el ángulo de contacto es cero. ¿Qué presión manométrica se requiere para formar una burbuja semiesférica en el extremo inferior del tubo?





Superficie circular con el mismo radio r que el tubo capilar.
θ=0 (ángulo de contacto=0)
cos θ =1



$$y = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g R} \Rightarrow R = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g y}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{\text{int}} - P_{ext} = \dfrac{2\gamma}{R} \\ P_{ext} = P_{atm} + \rho g h \end{array}\right\} \Rightarrow P_{\text{int}} - P_{atm} - \rho g h = \frac{2\gamma}{R}$$

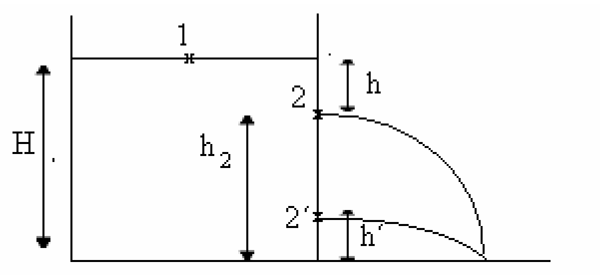
$$P_{\text{int}} - P_{atm} = P_{mf} = \frac{2\gamma}{R} + \rho g h = \frac{2\gamma}{2\gamma\cos\theta / \rho g y} + \rho g h$$

$$P_{mf} = \frac{\rho g y}{\cos\theta} + \rho g h = \rho g (y + h)$$

$$P_{mf} = 1\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 980\,\mathrm{cm/s^2} \cdot (4+10)\,\mathrm{cm} = 13720\,din/cm^2$$

$$\boxed{P_{mf} = 1372\,N/m^2}$$

12.-Un depósito abierto, de grandes dimensiones y paredes verticales, contiene agua hasta una altura H por encima de su fondo. Se practica un orificio en la pared del depósito, a una profundidad h por debajo de la superficie libre del agua. El chorro de agua sale horizontalmente y, tras describir una trayectoria parabólica llega al suelo a una distancia x del pie del depósito.
a) ¿Cuál será el valor de x?
b) ¿Será posible abrir un segundo orificio, a distinta profundidad, de modo que el chorro que salga de él tenga el mismo alcance que antes? En caso afirmativo, ¿a qué profundidad?
c) ¿A qué profundidad se debe perforar un tercer orificio para que el alcance del chorro sea máximo? ¿Cuál será el alcance máximo?



$v_2 = \sqrt{2gh}$ (Ec. de Torricelli)

Tiro parabólico $\begin{cases} x = v_{2x} t \\ y = h_2 - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$ $\begin{cases} v_{2x} = v_2 = \sqrt{2gh} \\ v_{2y} = -gt \end{cases}$

Si $y = 0 \Rightarrow h_2 = \dfrac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2h_2}{g}} = \sqrt{\dfrac{2(H-h)}{g}}$

$x = \sqrt{2gh}\sqrt{\dfrac{2(H-h)}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)}$

$\boxed{x = 2\sqrt{h(H-h)}}$

Análogamente para el punto 2´:

$$v_2' = \sqrt{2g(H-h')}$$
$$x' = 2\sqrt{h'(H-h')}$$

Si $x = x' \rightarrow 2\sqrt{h(H-h)} = 2\sqrt{h'(H-h')} \rightarrow h'^2 - h'H + \left(hH - h^2\right) = 0$

$$h' = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4\left(hH - h^2\right)}}{2} = \frac{H \pm \sqrt{(H-2h)^2}}{2}$$

Solución válida: $\boxed{h' = h}$

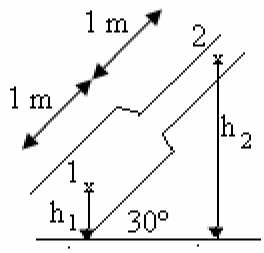
La otra solución coincide con la situación del apartado a).

c)

$$x = 2\sqrt{h(H-h)}$$
$$x_{\max} \leftrightarrow \frac{dx}{dh} = 0$$
$$\frac{dx}{dh} = \frac{H-2h}{\sqrt{h(H-h)}} = 0 \leftrightarrow H - 2h = 0 \leftrightarrow \boxed{h = \frac{H}{2}}$$

$$x_{\max} = 2\sqrt{\frac{H}{2}\left(H - \frac{H}{2}\right)}$$
$$\boxed{x_{\max} = H}$$

13.-Una corriente de agua circula por una tubería de sección circular que se une con otra de diámetro mitad, situadas de modo que el conjunto forma un ángulo de 30º con la horizontal. Un manómetro colocado entre dos puntos situados 1 m antes y 1m después de la unión de los dos tubos indica una diferencia de presión entre ambos de 10 cm de Hg. ¿Qué diferencia de velocidad presenta el agua entre dichos puntos?



Puesto que $d_1 = 2d_2 \rightarrow S_1 = 4S_2$, por conservación del caudal: $v_2 = 4v_1$

De la ecuación de Bernuilli deducimos:

$$P_1 - P_2 + \rho g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = 0$$

$$v_1^2 - v_2^2 = -\frac{2}{\rho}(P_1 - P_2) + 2g(h_2 - h_1)$$

$$-15v_1^2 = -\frac{2}{\rho}(P_1 - P_2) + 2g(h_2 - h_1)$$

En esta ecuación todos los datos son conocidos deduciéndose:

$$100\,mm\,Hg = 0.1315\,atm = 13328.94\,Pa$$

$$h_2 - h_1 = D\sin 30 = 2 \cdot 0.5 = 1m$$

$$v_1^2 - v_2^2 = -15v_1^2 = -\frac{2}{10^3}13328.94 + 2 \cdot 9.81 \cdot 1 =$$

$$= -26.6578 + 19.62$$

$$v_1 = 0.68 m/s$$

$$v_2 = 2.73 m/s$$

$$\boxed{v_2 - v_1 = 2.05 m/s}$$

14.-Un líquido que fluye por un agujero practicado en la base de un depósito, produce un chorro vertical con una forma bien definida. Para obtener la ecuación de esta forma, suponga que el líquido está en caída libre una vez que sale del tubo. Considere que al salir, el líquido tiene una velocidad v_o, y el radio del chorro es r_o. En función de la distancia (y) que ha caído el líquido desde su salida del tubo, obtenga una expresión para:

a) La velocidad v del líquido.

b) El radio r del chorro.

Si fluye agua de un tubo vertical con una velocidad de salida v=1.20 m/s,

c) ¿A qué distancia bajo la salida se habrá reducido a la mitad el radio original del chorro?

a)

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h_0 = P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h$$

$$P_0 = P = P_{atm}$$

$$h - h_0 = y$$

$$v^2 = v_0^2 + 2gy \rightarrow \boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2gy}}$$

b)

$$A_0 v_0 = Av \to \pi r_0^2 v_0 = \pi r^2 v$$
$$r = \frac{r_0\sqrt{v_0}}{\left(v_0^2 + 2gy\right)^{\frac{1}{4}}}$$
$$\boxed{r = r_0\left(\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gy}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

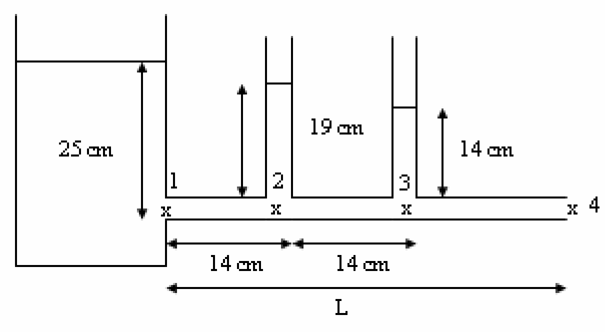
c)

$$\frac{r_0}{2} = r_0\left(\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gy}\right)^{\frac{1}{4}} \to \frac{1}{16} = \frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gy} \to y = \frac{15v_0^2}{2g}$$

$$\boxed{y = 1.10m}$$

15.-Un aparato típico para hacer demostraciones acerca de la pérdida de carga a lo largo de un tubo está constituido por un depósito de grandes dimensiones que desagua a la atmósfera a través de un tubo horizontal de longitud L y sección constante de 8 mm de diámetro interno. La entrada al tubo tiene los bordes redondeados de modo que pueden despreciarse las pérdidas de carga menores. A lo largo del tubo, se han dispuesto dos tubos manométricos verticales. En el instante en el que el nivel del agua está a 25 cm por encima del tubo, los manómetros indican 19 y 14 cm respectivamente.

a) ¿Cuál es la longitud del tubo?
b) En ese instante, ¿cuál es su caudal?



a)

$$\frac{\Delta P}{L} = cte$$
$$\frac{P_2 - P_3}{L_{23}} = \frac{P_3 - P_4}{L_{34}}$$
$$P_2 = P_{atm} + \rho g h_2$$
$$P_3 = P_{atm} + \rho g h_3$$
$$P_4 = P_a$$

$$y = \frac{P_3 - P_4}{P_2 - P_3} L_{23} = \frac{\rho g h_3}{\rho g h_2 - \rho g h_3} L_{23} = \frac{h_3}{h_2 - h_3} L_{23}$$
$$y = \frac{h_3}{h_2 - h_3} L_{23} = \frac{14}{19 - 14} 14 = 39.2 cm$$

$$L = 14cm + 14cm + 39.2cm = 67.2cm$$

$$\boxed{L = 67.2cm}$$

b)

$$\left(P_1 - P_2\right) + \left(\frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2\right) + \left(\rho g h_1 - \rho g h_2\right) = \rho H_{12}$$
$$\left(P_1 - P_2\right) + \left(-\frac{1}{2}\rho v_2^2\right) = \rho H_{12}$$
$$\left(P_2 - P_3\right) = \rho H_{23}$$
$$\left(P_3 - P_4\right) = \rho H_{34}$$

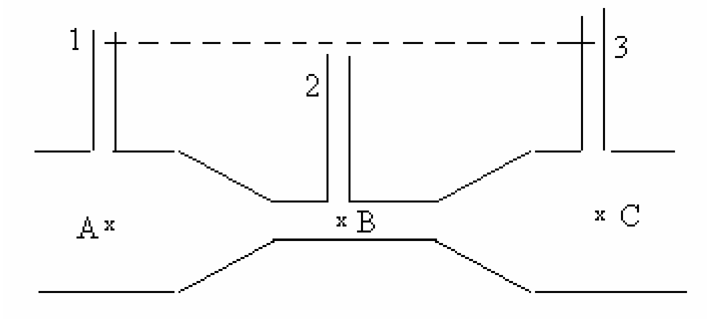
$$H_{12} = H_{23} \neq H_{34}$$
$$\left(P_1 - P_2\right) = \rho H_{12} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \rho H_{23} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \left(P_2 - P_3\right) + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$
$$v_2 = \sqrt{2g\left(h_1 + h_3 - 2h_2\right)} = \sqrt{2 \cdot 9'8\left(0.25 + 0.14 - 2 \cdot 0.19\right)} = 0.44\, m/s$$

$$C = v_2 \cdot S_2 = 0.44 \cdot \pi \cdot \left(\frac{0.002}{2}\right)^2 = 1.4 \cdot 10^{-6}\, m^3/s = 0.0014\, l/s$$

$$\boxed{v_2 = 0.44\, m/s}$$

$$\boxed{C = 0.0014\, l/s}$$

16.-Para medir el caudal de agua que circula por una tubería, se intercala en ésta un venturímetro cuyos diámetros en el tramo principal y en el estrechamiento son 5 cm y 1 cm, respectivamente. La diferencia de presión entre el tramo principal y el estrechamiento resulta ser de 0.35 atm. ¿Cuál es el caudal?



$$D_A = D_C = 5\,cm \rightarrow S_A = S_C = \pi \frac{D_A^2}{4} = 19.6\,cm^2$$

$$D_B = 1\,cm \rightarrow S_B = \pi \frac{D_B^2}{4} = 0.79\,cm^2$$

$$P_A - P_B = 0.35\,atm = 35452.48\,N/m^2$$

$$P_A + \rho g h_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

$$\left.\begin{array}{l} P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho\left(v_B^2 - v_A^2\right) \\ v_A \cdot S_A = v_B \cdot S_B \rightarrow v_B = \frac{S_A}{S_B} v_A \end{array}\right\} \Rightarrow P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1\right) v_A^2 = \frac{1}{2}\rho v_A^2 \left(\frac{S_A^2 - S_B^2}{S_B^2}\right)$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2\left(P_A - P_B\right) S_B^2}{\rho\left(S_A^2 - S_B^2\right)}} = 0.34\,m/s$$

$$Q = v_A \cdot S_A = 0.34 \cdot 19.6 \cdot 10^{-4} = 6.67 \cdot 10^{-4}\,m^3/s = 0.67\,l$$

$$\boxed{Q = 0.67\,l}$$

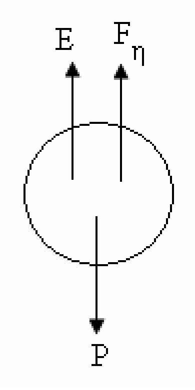
17.- Suponiendo que parten del reposo, calcule la aceleración inicial y la velocidad límite de:

a) Una burbuja de aire en agua.

b) Una gota de agua en aire.

c) Una pompa de agua jabonosa, con el 0.1% de su volumen ocupado por el líquido, en aire.

El radio es R=1 mm en los tres casos. Suponga que las densidades del aire dentro de la pompa y del agua jabonosa son iguales, respectivamente, a las del aire y del agua. Datos: densidad del agua =1 g/cm^3, densidad del aire=1.2g/dm^3, viscosidad del agua=10^{-3} DP, viscosidad del aire=18·10^{-6} DP



$$R = 1mm = 0.1cm$$

$$E = \rho_m V g \quad \rho_m = \text{densidad del medio}$$

$$P = \rho_e V g \quad \rho_e = \text{densidad de la esfera}$$

$$F_\eta = 6\pi r \eta_m v \quad \eta_m = \text{viscosidad del medio}$$

$$v_{\lim} \Rightarrow \sum \vec{F} = 0$$

$$6\pi r \eta_m v_{\lim} = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_e - \rho_m) \rightarrow \boxed{v_{\lim} = \frac{2}{9}\frac{r^2 g(\rho_e - \rho_m)}{\eta_m}}$$

$$v_{\text{inicial}} = 0 \rightarrow P - E = ma$$

$$\rho_e V g - \rho_m V g = \rho_e V a \rightarrow \boxed{a = g\left(1 - \frac{\rho_m}{\rho_e}\right)}$$

a) Burbuja de aire en agua:

$$\left.\begin{array}{l} \eta_m = \eta_{agua} = 10^{-3} DP = 10^{-2} P \\ \rho_e = \rho_{aire} = 1.2 \cdot 10^{-3}\, g/cm^3 \\ \rho_m = \rho_{agua} = 1 g/cm^3 \end{array}\right\}$$

$$a = g\left(1 - \frac{1}{1.2 \cdot 10^{-3}}\right) \rightarrow \boxed{a = -8156.9\, m/s^2}$$

:

$$a < 0 \rightarrow \text{la burbuja de aire sube}$$

$$v_{\lim} = \frac{2}{9}\frac{0.1^2 \cdot 980 \cdot (1.2 \cdot 10^{-3} - 1)}{10^{-2}} = -217.5\, cm/s$$

$$\boxed{v_{\lim} = -2.175\, m/s}$$

b) Gota de agua en aire:

$$\left.\begin{array}{l}\eta_m = \eta_{aire} = 18\cdot 10^{-6}\,DP = 18\cdot 10^{-5}\,P \\ \rho_e = \rho_{agua} = 1\,g/cm^3 \\ \rho_m = \rho_{aire} = 1.2\cdot 10^{-3}\,g/cm^3\end{array}\right\}$$

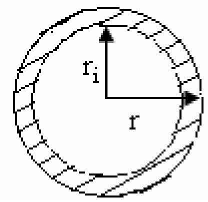
$$a = g\left(1 - \frac{1.2\cdot 10^{-3}}{1}\right) \rightarrow \boxed{a = 9.788\,m/s^2}$$

$a > 0 \rightarrow$ la gota de agua baja

$$v_{\lim} = \frac{2}{9}\frac{0.1^2\cdot 980\cdot\left(1-1.2\cdot 10^{-3}\right)}{18\cdot 10^{-5}} = 12084.2\,cm/s$$

$$\boxed{v_{\lim} = 120.842\,m/s}$$

c) Pompa jabonosa en aire:



$$\left.\begin{array}{l}\eta_m = \eta_{aire} = 18\cdot 10^{-6}\,DP = 18\cdot 10^{-5}\,P \\ \rho_m = \rho_{aire} = 1.2\cdot 10^{-3}\,g/cm^3\end{array}\right\}$$

$$V_{jabón} = 0.1\% V_{pompa}$$

$$\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - r_i^3\right) = 10^{-3}\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r^3 - r_i^3 = 10^{-3} r^3 \rightarrow \left(\frac{r_i^3}{r^3}\right) = 0.999 \rightarrow r_i \simeq 0.9997\,mm$$

$$\overline{\rho_e} = \frac{V_i\rho_{aire} + V_{liq}\rho_{agua}}{V_{pompa}} = \left(\frac{r_i}{r}\right)^3\rho_{aire} + \left[1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^3\right]\rho_{agua}$$

$$\overline{\rho_e} = 0.999\cdot 1.2\cdot 10^{-3} + (1-0.999)\cdot 1 = 2.1988\cdot 10^{-3}\,g/cm^3 \simeq 2.2\cdot 10^{-3}\,g/cm^3$$

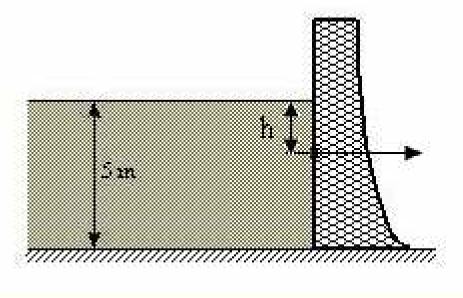
$$a = g\left(1 - \frac{1.2\cdot 10^{-3}}{2.1988\cdot 10^{-3}}\right) \rightarrow \boxed{a = 4.452\,m/s^2}$$

$a > 0 \rightarrow$ la pompa jabonosa baja

$$v_{\lim} = \frac{2}{9}\frac{0.1^2 \cdot 980 \cdot \left(2.1988 \cdot 10^{-3} - 1.2 \cdot 10^{-3}\right)}{18 \cdot 10^{-5}} = 12.084\, cm/s$$

$$\boxed{v_{\lim} = 0.1208\, m/s}$$

18.-Determinar la fuerza total que actúa sobre la presa y la situación de la línea de acción de dicha fuerza respecto de la parte inferior de la misma. La anchura de la presa es de 10 m.



a)

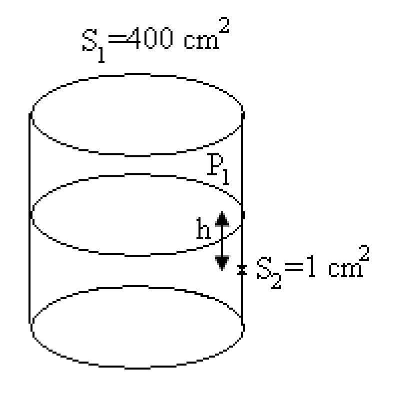
$$P = \rho g h$$
$$dF = L\rho g h\, dh$$
$$F = \int dF = \frac{L\rho g H^2}{2}$$
$$\boxed{F = 1226250\, N}$$

b)

$$dM = (H-h)\, dF$$
$$M = \int_0^H (H-h) L\rho g h\, dh = L\rho g\left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3}\right) = \frac{L\rho g H^2}{2}\left(\frac{H}{3}\right)$$
$$M = \sum F d = \frac{L\rho g H^2}{2}\left(\frac{H}{3}\right) \to d = \frac{H}{3} = 1.67\, m$$
$$\boxed{d = 1.67 m}$$

19.-Un depósito cerrado, cilíndrico y de eje vertical, de 400 cm^2 de base, contiene agua y, por encima de esta, aire a presión manométrica de 3 atm. Se abre un orificio, cuya área es de 1 cm^2, a una profundidad de 1.5 m por debajo de la superficie libre del agua.
a) Calcular la velocidad de salida del agua.
b) Calcular la fuerza de reacción que produce el chorro sobre el resto del sistema.

a)



$$P_1 - P_{atm} = 3\,atm$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \rightarrow v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2$$

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 - P_{atm} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 v_2^2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 - P_{atm} + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2\left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right)$$

$$v_2^2 = 2\frac{P_1 - P_{atm} + \rho g h}{\rho\left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right)} \simeq 2\frac{P_1 - P_{atm} + \rho g h}{\rho}$$

$$\boxed{v = 25.25\,m/s}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} F = \dfrac{dP}{dt} = \dfrac{d(mv)}{dt} \\ \dfrac{dm}{dt} = \dfrac{\rho S_2 v_2\, dt}{dt} \end{array}\right\} \rightarrow F = \rho S_2 v_2^2 = 2\rho S_2 \frac{P_1 - P_{atm} + \rho g h}{\rho}$$

$$\boxed{F = 63.74\,N}$$

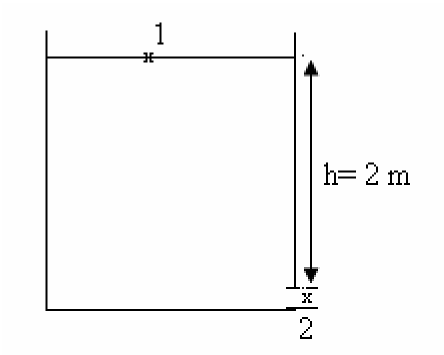
20.-Un depósito derrama líquido (ρ=1200 kg/m) por un orificio muy estrecho practicado en la base de una de sus paredes laterales.

a) Si la altura del líquido es de 2 m, y se desprecia la viscosidad, hallar la velocidad de salida por el orificio.

b) Se conecta un tubo recto y horizontal en el orificio. El líquido derrama ahora por el tubo en régimen laminar y viscoso, por lo que la velocidad de salida es la mitad de la anterior. Hallar la energía disipada en el tubo por kg de líquido que circula, y la diferencia de presión entre los extremos del tubo ("pérdida de carga en el mismo").

c) Si el tubo es recto de 1 m de longitud, y de sección circular de 2 mm de radio, calcular el coeficiente de viscosidad del líquido.

a)



$$P_1 = P_2 = P_{atm}$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$

$$v_1 \simeq 0$$

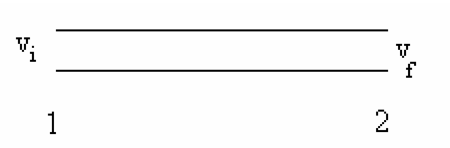
$$\frac{\cancel{P_1}}{\cancel{\rho}} + \frac{v_1^2}{2} + gZ_1 = \frac{\cancel{P_2}}{\cancel{\rho}} + \frac{v_2^2}{2} + gZ_2$$

$$g\underbrace{(Z_1 - Z_2)}_{h} = \frac{1}{2}v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh} = 6.26\, m/s$$

$$\boxed{v_2 = 6.26\, m/s}$$

b)



(Ver nota)

$$v_f = \frac{1}{2}v_i \quad (v_i \text{ es } v_2 \text{ del apartado anterior})$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

La energía disipada por kg será:

$$\frac{\Delta E_c}{m} = \frac{1}{2}v_f^2 - \frac{1}{2}v_i^2 = -\frac{3}{2}v_f^2 = -\frac{3}{8}v_i^2 = -14.69\, J/kg = H_e$$

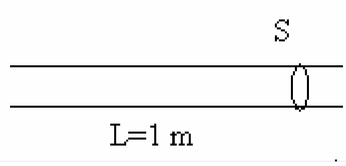
$H_e \equiv$ pérdidas de carga $\equiv$ energía/masa

$$\boxed{H_e = -14.69\, J/kg}$$

$$P_i - P_f = \frac{1}{2}\rho v_f^2 - \frac{1}{2}\rho v_i^2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \rho H_e = -\frac{3}{8}\rho v_i^2$$

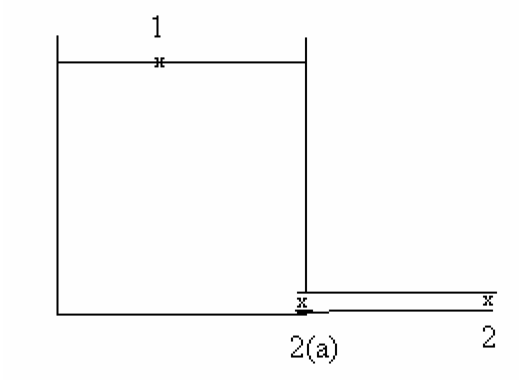
$\boxed{P_i - P_f = -17634.42\, Pa} \rightarrow$ la presión P_f es mayor que P_i

c)



$$r = 2\,mm$$
$$v = 3.13\,m/s$$
$$C = v_m S$$
$$C = \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2)}{8\eta L} \rightarrow \eta = \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2)}{8CL}$$
$$\boxed{\eta = 0.2817 \cdot 10^{-2} \frac{Ns}{m^2} = 0.2817 \cdot 10^{-2}\, DP}$$

Nota apartado b):



$$\cancel{\frac{P_1}{\rho}} + \underbrace{\frac{v_1^2}{2}}_{0} + gZ_1 = \cancel{\frac{P_2}{\rho}} + \frac{v_2^2}{2} + gZ_2 + H_e$$

$$H_e = g(Z_1 - Z_2) - \frac{1}{2} v_2^2$$

Pero del apartado anterior: $g(Z_1 - Z_2) = \frac{1}{2} v_{2a}^2$

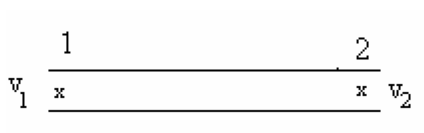
$$H_e = \frac{1}{2} v_{2a}^2 - \frac{1}{2} v_2^2 = -\frac{3}{2} v_2^2 = -\frac{3}{8} v_{2a}^2$$

$$P_{2a} - P_2 = \rho H_e$$

En el tubo horizontal:

$v_1 = v_2$ por continuidad

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} = H_e$$



Al conectar el tubo la presión en 2a ya no es la misma sino que P_{2a} es mayor que la atmosférica.