<u>Relación de problemas: Tema 4</u>

1.-Un oscilador armónico del tipo bloque-muelle con k=23 N/m y m=0.47 kg tiene una energía mecánica de 25 mJ.
a) ¿Cuál es la amplitud del movimiento?
b) ¿Cuál es la velocidad máxima del bloque?
c) ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando x=11 mm?
d) ¿Cúal es la distancia del bloque al centro cuando el módulo de su velocidad es de 0.25 m/s?

a)

Datos:

$$k = 23\,N/m$$

$$m = 0.47\,kg$$

$$E = 25\,mJ = 0.025\,J$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0.025}{23}} = 0.04662\,m$$

$$\boxed{A = 0.04662\,m}$$

b)

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{c\max} = \frac{1}{2}m{v_{\max}}^2 = E \rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0.025}{0.47}} = 0.326\,m/s$$

$$\boxed{v_{\max} = 0.326\,m/s}$$

c)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0.025 - 23\cdot 0.011}{0.47}}$$

$$\boxed{v = 0.31695\,m/s}$$

d)

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$$
$$x=\sqrt{\frac{2E-mv^2}{k}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0.025-0.47\cdot 0.25^2}{23}}$$
$$\boxed{x=0.02994\,m}$$

2.-Un reloj de péndulo que ha sido cuidadosamente ajustado para marcar el tiempo correcto en un lugar donde g= 9.823 m/s^2 retrasa 40 s por día cuando se lleva a otro lugar geográfico. ¿Cuánto vale g en ese lugar?

En un día retrasa 40 s. Luego el reloj con la nueva g tarda 3600·24·T+40 segundos en marcar un día, donde T es su periodo (en segundos). Luego:

$$T=\frac{3600\cdot 24+40}{3600\cdot 24}$$

Sabemos que para un péndulo:

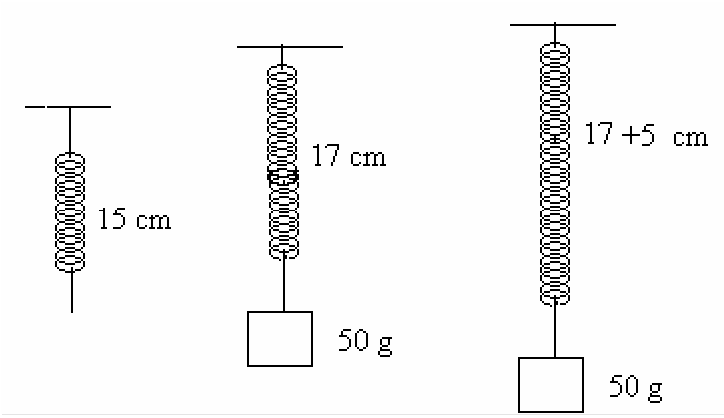
$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Si con g_1, T=1s $\rightarrow l=g_1$

Entonces: $\frac{1}{g}=\frac{T^2}{l}=\frac{T^2}{g_1}=\frac{1}{g_1}\left(\frac{3600\cdot 24+40}{3600\cdot 24}\right)$

$$\boxed{g_2=9.814\,m/s}$$

3.-Un muelle tiene una longitud natural de 15 cm. Cuando le colgamos una masa de 50 g, queda en reposo con una longitud de 17 cm. Si ahora lo estiramos 5 cm, calcular:
a) La ecuación del movimiento (en la forma cosenoidal) si ponemos en marcha el cronómetro cuando la masa pasa por primera vez por la posición de equilibrio.
b) Los valores de la elongación para los cuales la aceleración valga $a_{max}/2$.
c) El trabajo realizado por el resorte para elevar la masa desde su posición más baja hasta la primera de las posiciones anteriores.



$$k = \frac{mg}{\Delta x_0} = \frac{50 \cdot 9.8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-2}} = 24.5\,kg/s^2$$

a)

$x = Asen(\omega t + \phi)$ con $\omega^2 = \frac{k}{m}$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 22.14\,rad/s$

$\phi = 0$ ya que en $t = 0$ pasa por la posición de equilibrio.

A= Amplitud o elongación máxima = 5 cm

$x = 5sen(\omega t + 0)$

$\boxed{x = 5sen\omega t}$

b)

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 Asen(\omega t + \phi) = -\omega^2 Asen(\omega t + 0) \rightarrow a_{\max} = -\omega^2 a$$

$$a = \frac{a_{\max}}{2} = -\omega^2 \frac{A}{2} \rightarrow sen\omega t = \frac{1}{2} \rightarrow x = 5sen\omega t = 5\frac{1}{2}$$

$\boxed{x = 2.5\,cm}$

x (elongación correspondiente a $\frac{a_{\max}}{2}$)$= \pm 2.5\,cm = \pm\frac{A}{2}$

c)

$$W=\int_{-A}^{-\frac{A}{2}}Fdx=\int_{-A}^{-\frac{A}{2}}-kxdx=-\frac{1}{2}kx^2\Big]_{-A}^{-\frac{A}{2}}=-\frac{1}{2}k\left(-\frac{A}{2}\right)^2+\frac{1}{2}kA=$$

$$=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}k\frac{A^2}{4}=\frac{3}{8}kA^2\approx 0.023J$$

$$\boxed{W=0.023J}$$

4.-Con un muelle, colgado de uno de sus extremos, se observa lo siguiente:
(1) Al colgar de su extremo libre un cuerpo de 500 g, su longitud inicial aumenta 15 cm.
(2) Al colgar de dicho extremo un peso de 2 kg y separarlo 20 cm de su posición de equilibrio, el sistema efectúa un m.a.s.
Calcular para la situación (2):
a) El periodo de oscilación.
b) La velocidad máxima alcanzada por el cuerpo.
c) La aceleración máxima.
d) La aceleración y la velocidad del cuerpo cuando se encuentra a la mitad del camino entre la posición de equilibrio y una de sus posiciones extremas.
e) El tiempo necesario para alcanzar el citado punto, partiendo de la posición de equilibrio.

(1)

$$F=-kx$$

$$k=\frac{m_1g}{x}=\frac{0.5\cdot 9.81}{0.15}=32.7\,N/m$$

(2)

(a)

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m_2}};\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}=1.55\,s$$

$$\boxed{T=1.55\,s}$$

$b)$

$$x=A\sin(\omega t+\phi);\quad v=\frac{dx}{dt}=\omega A\cos(\omega t+\phi);\quad a=\frac{dv}{dt}=-\omega^2 Asen(\omega t+\phi)$$

$$v_{\max}=\omega A=\sqrt{\frac{k}{m_2}}A\qquad \boxed{v_{\max}=0.81\,m/s}$$

$c)$

$a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m_2} A$ $\quad \boxed{a_{max} = 3.27\, m/s^2}$

$d)$

$\frac{A}{2} = A sen\omega t \quad (\phi = 0) \quad sen\omega t = \frac{1}{2} \rightarrow \omega t = 30^o$

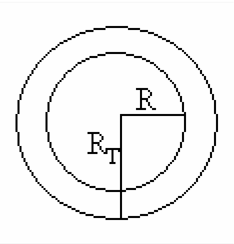
$v\left(\frac{A}{2}\right) = \omega A \cos \omega t = \omega A \cdot 0.866 \quad \boxed{v\left(\frac{A}{2}\right) = 0.699\, m/s}$

$a\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{A\omega^2}{2} \quad \boxed{a\left(\frac{A}{2}\right) = 1.635\, m/s^2}$

$e)$

$sen\omega t = \frac{1}{2} \rightarrow \omega t = \frac{\pi}{6} \rightarrow t = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{m_2}{k}} \quad \boxed{t = 0.13\, s}$

5.- Si la Tierra fuese una esfera homogénea y se hiciese un pequeño conducto recto de polo a polo, al dejar caer por él un cuerpo, éste adquiriría un m.a.s.. ¿Por qué? Calcule el periodo de ese movimiento.



Si se aplica la ley de Gauss para un punto en el interior de la Tierra: $R<R_T$

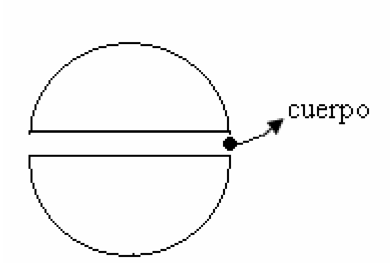
$$g 4\pi R^2 = -4\pi G \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T{}^3}$$

Simplificando queda:

$$\vec{g} = -\frac{GM_T}{R_T{}^3} R\hat{R}$$

Siendo **g** el campo gravitatorio a una distancia R del centro de la Tierra.

Si se deja caer un cuerpo de masa m :



$\sum \vec{F} = m\vec{a}$, es decir:

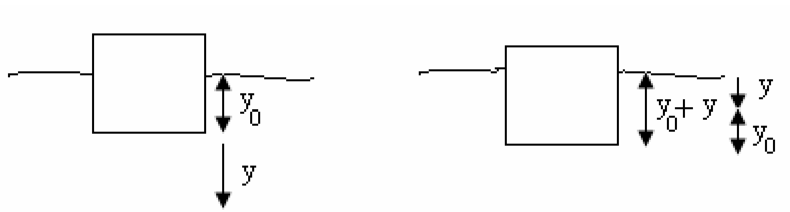
$$-\frac{GM_T}{R_T^{\,2}} mR = ma = m\frac{d^2R}{dt^2}$$

Luego $\dfrac{d^2R}{dt^2} = -\dfrac{GM_T}{R_T^{\,3}} R \Rightarrow$ es un m.a.s.

con una $\omega = \sqrt{\dfrac{\mathrm{GM_T}}{\mathrm{R_T}^3}}$ y $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\mathrm{R_T}^3}{\mathrm{GM_T}}}$

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}}$$

6.-Un bloque cúbico de madera, de arista a =5 cm y masa m= 100 g, está flotando en un estanque. Lo empujamos ligeramente hacia abajo y después lo soltamos; ¿Cuál será el periodo de sus oscilaciones?



Bloque flotando en equilibrio.

Densidad agua: ρ_a

Volumen del cubo sumergido: V_{cs}

$$\sum \mathrm{F} = \rho_a V_{cs} g - \rho_c V_c g = 0$$

$$\rho_a V_{cs} = \rho_c V_c$$

$$\rho_a y_0 a^2 = \rho_c a^3$$

Bloque oscilando.

$$\sum \mathrm{F} = \rho_a V_{cs}{}' g - \rho_c V_c g \neq 0$$

$$F_{resul} = \rho_a a^2 \left(y_0 + y\right) g - \rho_c V_c g$$

$$F_{resul} = \cancel{\rho_a a^2 y_0 g} - \cancel{\rho_c V_c g} + \rho_a a^2 y g$$

$F_{recup} = -\rho_a a^2 y g$ El signo se debe a que el sentido es contrario a y.

$$-\rho_a a^2 y g = m \frac{d^2 y}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\rho_a a^2 g}{m} y$$

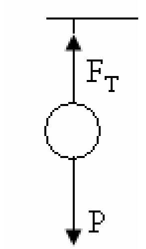
$$mas \text{ con } \omega = \sqrt{\frac{\rho_a a^2 g}{m}}$$

$$\upsilon = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho_a a^2 g}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1 \cdot 5^2 \cdot 980}{100}} = 2.49\, Hz$$

$$\boxed{T = 0.4\, s}$$

7.-Un reloj regulado por un péndulo simple de periodo 0.11 s se coloca en un ascensor.
a) ¿Cuál es el periodo cuando el ascensor es acelerado hacia arriba con una aceleración de módulo 0.5 g?
b) ¿Cuál es el periodo cuando el ascensor baja con una aceleración de módulo 0.5 g?
c) ¿Cuál es el periodo cuando el ascensor sube a una velocidad constante de 5.1 m/s?
d) Al empezar el día, el reloj de péndulo se encuentra dentro del ascensor en el piso correspondiente al vestíbulo, y se ajusta a la misma hora del reloj del vestíbulo. El reloj del péndulo y el del vestíbulo están calibrados de tal forma que marcan la misma hora si permanecen inmóviles. Después de muchos viajes de subida y bajada del ascensor durante el día, el reloj pendular vuelve a estar en el vestíbulo. ¿Marcan lo mismo los relojes?

a)



Ascensor hacia arriba: $\uparrow a = \frac{g}{2}$

$$F_T - mg = ma \rightarrow F_T = m\left(g + a\right) = m\left(g + \frac{g}{2}\right) = \frac{3}{2} mg$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{3}{2}g}}$$

$$\frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow T_1 = T\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.11\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{T_1 = 0.08981 s}$$

b)

Ascensor baja: $\downarrow a = \frac{g}{2}$

$$mg - F_T = ma \rightarrow F_T = m(g-a) = m\left(g - \frac{g}{2}\right) = \frac{1}{2}mg$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{g}{2}}}$$

$$\frac{T_2}{T} = \sqrt{2} \rightarrow T_2 = T\sqrt{2} = 0.11\sqrt{2}$$

$$\boxed{T_2 = 0.1556 s}$$

c) A velocidad constante la aceleración es nula y el periodo no varía:

$$a = 0 \rightarrow \boxed{T = 0.11 s}$$

d)

T= 0.11 s
- Reloj cuando el ascensor sube: $T_1 = 0.08981$ s
- Reloj cuando el ascensor baja: $T_2 = 0.1556$ s

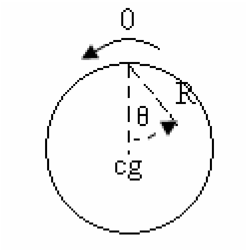
Al bajar $T_2 > T$ y no compensa cuando sube ($T_1 < T$)

$$\left.\begin{array}{l} T_2 - T = 0.0456 s \\ T - T_1 = 0.02019 s \end{array}\right\} \text{el reloj se retrasa en total } 0.0456 - 0.02019 = 0.02541\, s$$

Al acabar el día, el reloj habrá retrasado respecto al del vestíbulo.

8.-Un aro delgado de 1 m de radio y densidad lineal uniforme oscila libremente en torno a un eje perpendicular a su plano que pasa por un punto de su borde.
a) ¿Cuál es el periodo para oscilaciones pequeñas?
b) Un pegote de cera cuya masa es igual al 12 por ciento de la masa del aro se coloca en el punto de borde diametralmente opuesto al de suspensión, ¿cuál es ahora el periodo de las pequeñas oscilaciones?

a)



$R = 1m$

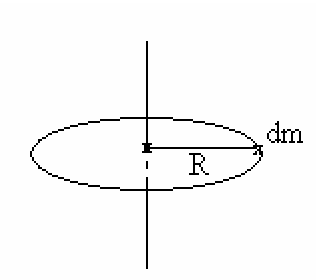
Plano de giro = plano del anillo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\sum M = -mgR\sin\theta \simeq -mgR\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgR}{I}\right)\theta \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgR}}$$



R = distancia del cm al centro de oscilación O.

I = momento de inercia del aro respecto a O.

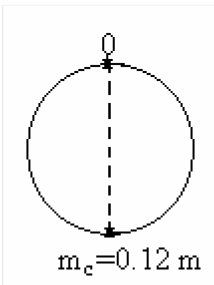
$$I_{cm} = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$$

Por Steiner: $I = I_{cm} + mR^2 = 2mR^2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\cdot 1}{9.8}} \rightarrow \boxed{T = 2.83845\,s}$$

b)



$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{m'gR'}}$$

$$m' = m + m_c = m + 0.12m = 1.12m$$

$$I' = I + (0.12m)(2R)^2 = 2mR^2 + 0.48mR^2 = 2.48mR^2$$

$$R' = y_{cm}{}' = \frac{mR + 0.12m2R}{m + 0.12m} = \frac{1.24}{1.12}R$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{2.48mR^2}{1.12mg\frac{1.24}{1.12}R}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} \rightarrow \boxed{T' = T}$$

9.- Una regla uniforme de longitud L=1 m, está suspendida de un extremo.
a) Determine el periodo de oscilación T_e para pequeños desplazamientos angulares; compare el resultado obtenido con el periodo de oscilación que se tendría si toda la masa se localizara:

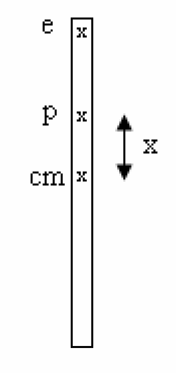
i) En el centro de masas (T_{cm}).
ii) En el extremo inferior (T_L).
iii) ¿Cuál de los tres periodos es mayor?, ¿por qué?

b) Determine el periodo de oscilación (T_P) si está suspendida de un punto P a una distancia x del centro de masas.

Calcule el periodo de oscilación para x=L/6 ($T_{L/6}$) y para x=L/2 ($T_{L/2}$).
Comente los resultados obtenidos.

c) Determine el valor de x para que el periodo sea mínimo.

a)



$$L = 1m$$

Péndulo físico: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgd}}$

con d=distancia del cm al punto de suspensión.

Colgada del extremo e:

$$\left.\begin{array}{l} T_e = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_e}{mg\left(\dfrac{L}{2}\right)}} \\ I_e = \dfrac{1}{3}mL^2 \end{array}\right\} T_e = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\left(\dfrac{L}{2}\right)}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2L}{3g}}$$

$$\boxed{T_e = 1.638\,s}$$

a.i)

m localizada en el cm $\longrightarrow T_{cm} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_{cm}}{mg\left(\dfrac{L}{2}\right)}}$

$$I_{cm} = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}mL^2$$

$$T_{cm} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}mL^2}{mg\left(\dfrac{L}{2}\right)}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L/2}{g}} \rightarrow \boxed{T_{cm} = 1.419\,s}$$

T_{cm} = periodo del péndulo simple de longitud L/2 a.ii)

m localizada en el extremo L $\longrightarrow T_L = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_L}{mgL}}$

$I_L = mL^2$

$T_L = 2\pi\sqrt{\dfrac{mL^2}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}} \longrightarrow \boxed{T_{cm} = 2.007\,s}$

$T_L =$ periodo del péndulo simple de longitud L

a.iii)

$T_{cm} < T_e < T_L$ debido a que $I_{cm} < I_e < I_L$

b)

$$\left.\begin{aligned} T_P &= 2\pi\sqrt{\frac{I_P}{mgx}} \\ I_P &= I_{cm} + mx^2 = \frac{1}{12}mL^2 + mx^2 \end{aligned}\right\} \boxed{T_P = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{L^2}{12}+x^2}{gx}}}$$

$$x = \frac{L}{6} \longrightarrow T_{L/6} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{L^2}{12}+\frac{L^2}{36}}{g\frac{L}{6}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\left(\frac{6}{12}+\frac{6}{36}\right)}{g}} \longrightarrow \boxed{T_{L/6} = 2\pi\sqrt{\frac{4L}{6g}}}$$

$$x = \frac{L}{2} \longrightarrow T_{L/2} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{L^2}{12}+\frac{L^2}{4}}{g\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\left(\frac{2}{12}+\frac{2}{4}\right)}{g}} \longrightarrow \boxed{T_{L/2} = 2\pi\sqrt{\frac{4L}{6g}}}$$

$\boxed{T_{L/6} = T_{L/2} = 1.639\,s}$

c)

$$T_P = mínimo \longrightarrow \frac{\partial T_P}{\partial x} = 0$$

$$2\pi\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{L^2}{12}+x^2}{gx}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{2xgx - g\left(\frac{L^2}{12}+x^2\right)}{g^2x^2} = 0$$

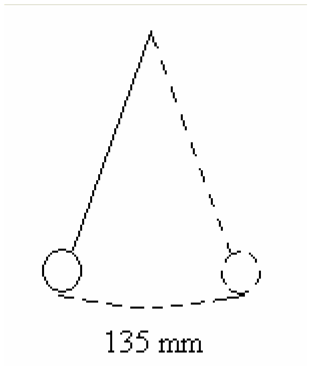
$$2x^2 - \left(\frac{L^2}{12}+x^2\right) = 0$$

$$x^2 = \frac{L^2}{12} \longrightarrow \boxed{x = \frac{L}{\sqrt{12}} = 0.299\,m}$$

10.-El péndulo de un reloj normalmente oscila describiendo un arco de longitud 135 mm. El mecanismo funciona gracias a una pesa que cae hacia abajo. Una vez que la pesa ha llegado a la base del reloj a las 9:17 horas, la longitud del arco disminuye hasta 95 mm a las 9:22 horas. Teniendo en cuenta que el reloj se para si la longitud del arco es inferior a 50 mm. Determinar:

a) La constante γ para este movimiento.

b) La hora a la que se para el reloj.



a)

$A' = Ae^{-\gamma t}$

$9:17 \rightarrow$ arco normal: $135\,mm$

$9:22 \rightarrow$ arco menor: $95\,mm$

En 9:17 tomamos $t = 0$ y $A = 135\,mm$

Pasados 5 minutos: $95 = 135e^{-\gamma 5} \rightarrow \boxed{\gamma = 0.07028\,\text{min}^{-1}}$

b)

El reloj se para a los 50 mm:

$$50 = 135e^{-\gamma t} \rightarrow t = -\frac{\ln\frac{50}{135}}{\gamma} = 14.1328\,\text{min}$$

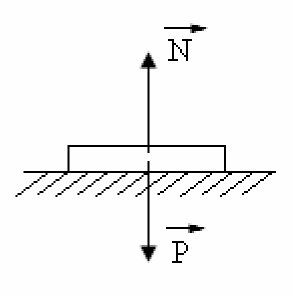
El reloj se para a las: $9:17 + 14.1328\,\text{min} \simeq \boxed{9:31\,horas}$

11.-Una moneda permanece en reposo sobre una plataforma horizontal que realiza un movimiento armónico simple de amplitud A y frecuencia ν.

a) Si la plataforma oscila verticalmente, ¿cuál es el valor máximo de A que permite a la moneda permanecer en contacto permanente con la plataforma?

b) Supongamos ahora que la plataforma oscila horizontalmente y que μ es el coeficiente de rozamiento estático entre la moneda y la plataforma. ¿Cuál es el valor máximo de A que permite a la moneda permanecer en reposo respecto a la plataforma?

a)



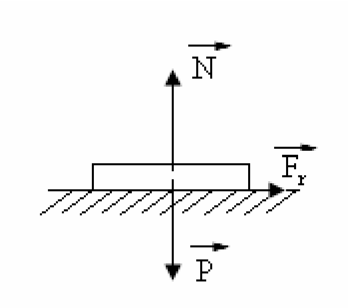
$P - N = ma$

La aceleración máxima corresponderá a $N = 0 \rightarrow a_{max} = g$

En el oscilador armónico $a_{max} = A\omega^2$ luego:

$$\boxed{A_{max} = \frac{a_{max}}{\omega^2} = \frac{g}{4\pi^2\upsilon^2}}$$

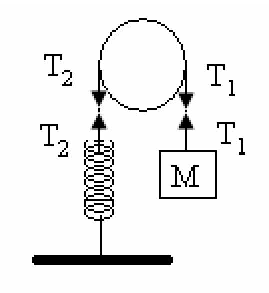
b)



$$\left.\begin{array}{l} F_r = N\mu = mg\mu \\ F_r = ma \end{array}\right\} a_{max} = \mu g$$

En el oscilador armónico implicará: $\boxed{A_{max} = \frac{\mu g}{4\pi^2\upsilon^2}}$

12.-Por la garganta de una polea, cuya masa m = 800 g puede considerarse concentrada en su periferia, pasa un hilo inextensible y sin masa. De uno de los extremos del hilo cuelga una masa M = 200 g y el otro extremo del hilo está atado a un resorte vertical de constante elástica K = $16 \cdot 10^5$ *dinas cm*, que a su vez está fijo al suelo por su otro extremo. Calcule el periodo de las pequeñas oscilaciones de M.



(Página 223 del Tebar-Flores)

Debe ser un movimiento armónico simple.
Cuando el sistema está en reposo la fuerza que actúa sobre el resorte es Mg y debe cumplirse:

$$Mg = kx_0 \quad (1)$$

Donde hemos llamado x_0 al alargamiento del resorte en esta posición de equilibrio.

Si desplazamos ligeramente la masa M y tiramos de ella hacia abajo:

$$T_2 = k\left(x_0 + x\right) \quad (2)$$

Y en la masa M:

$$Mg - T_1 = Ma \quad (3)$$

Aplicando a la polea la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación:

$$T_1 R - T_2 R = I\alpha = \underbrace{mR^2}_{I} \underbrace{\frac{a}{R}}_{\alpha} = mRa$$

Dividiendo todo por R queda:

$$T_1 - T_2 = ma \quad (4)$$

De las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) se deduce:

$$a = -\frac{k}{m+M}x \underbrace{\rightarrow}_{a=-\omega^2 x} \omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

y el periodo:

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{M+m}}{\mathrm{k}}} = 2\pi\sqrt{\frac{10^3}{16\cdot 10}}$$

$$\boxed{T = 0.157\,s}$$

13.-Un péndulo está constituido por dos esferas pequeñas e iguales de 1 kg de masa, unidas a los extremos de una varilla rígida de 1 m de longitud y masa despreciable. Determinar el periodo de las pequeñas oscilaciones de este péndulo si se suspende:
a) De un extremo.
b) Del otro extremo.
c) De un punto situado a un tercio de distancia entre uno y otro extremo.
d) Del punto medio.

a) y b)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\boxed{T = 2\,s}$$

c)

$$d = d_1 + d_2$$

$$I = m\left(\frac{2d}{3}\right)^2 + m\left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{5md^2}{9}$$

$$I\alpha_z = -mgd_1 sen\theta + mgd_2 sen\theta \simeq -mg\left(d_1 - d_2\right)\theta$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\left(d_1 - d_2\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{5d}{3g}} = 2.6s$$

$$\boxed{T = 2.6s}$$

d)

$$d_1 - d_2 = 0 \rightarrow T = \infty$$

Modo 2:

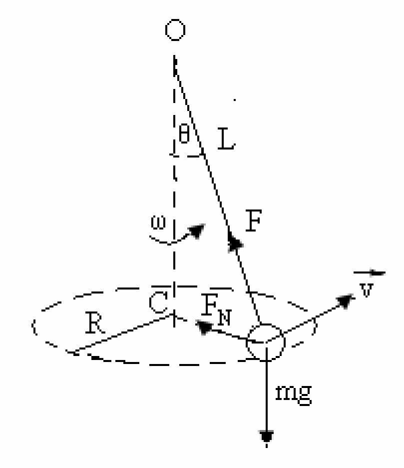
$$L = \frac{d}{2} - \frac{d}{3};\quad I = m\left(\frac{2d}{3}\right)^2 + m\left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{5md^2}{9}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{5d}{3g}} = 2.6s$$

14.-Cuando la plomada de un péndulo cónico describe una trayectoria circular, el hilo, de longitud L, barre un cono de semiángulo θ.

a) Calcular el periodo del movimiento circular de la plomada en función de L, g y θ. Si la circunferencia anterior está en el plano xy con el centro en el origen:

b) demuestre que cada coordenada, x e y, sigue un m.a.s. y compare su periodo con el que tendría el mismo sistema oscilando en un plano vertical.



$R = Lsen\theta$

Sobre la masa A actúa su peso y la tensión de la cuerda F.

Su resultante debe ser F_N, es decir, justamente la fuerza centrípeta necesaria para describir el círculo.

$$F_N = m\omega^2 R = m\omega^2 Lsen\theta$$

$$F_N = \frac{mv^2}{R} \underbrace{=}_{v=\omega R} m\frac{\omega^2 R^2}{R} = m\omega^2 R$$

$$tg\theta = \frac{F_N}{mg} = \frac{m\omega^2 Lsen\theta}{mg} = \frac{\omega^2 Lsen\theta}{g}$$

$$tg\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta} \to \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 L} \to \omega^2 = \frac{g}{\cos\theta L} \to \omega = \sqrt{\frac{g}{\cos\theta L}}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\cos\theta L}}$$

$$f = \frac{1}{T} \to \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\cos\theta L}{g}}}$$

b)

P. cónico: $R\omega^2 = g\tan\theta \quad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g\tan\theta}{lsen\theta} \quad T_c = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$

P. Plano:

$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$;

Relación: $\frac{T_c}{T_p} = \sqrt{\cos\theta} \underbrace{\to}_{\theta\to 0} 1$

En coordenadas rectangulares, (x, y) horizontales:

P. cónico:

$x^2 + y^2 = R^2, \quad v = \omega R = Cte.$

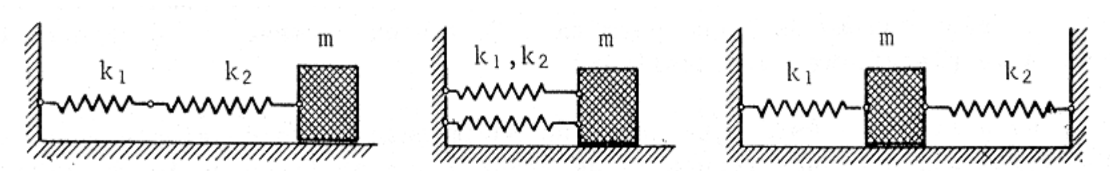
P. planos:

$x, y = R\sin(\omega t + \phi_0)$

Composición:

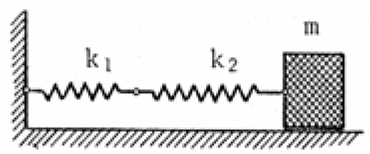
$$\begin{cases} \boxed{x^2 + y^2 = R^2\sin^2\omega t + R^2\cos^2\omega t = R^2} \\ v^2 = (R\omega)^2\cos^2\omega t + (R\omega)^2\sin^2\omega t = (R\omega)^2, \quad \boxed{v = \omega R} \end{cases}$$

15.-Determine las frecuencias de oscilación correspondientes a cada uno de los sistemas representados en las figuras siguientes, suponiendo que el bloque de masa m está situado sobre una superficie horizontal lisa y que las constantes elásticas son k_1 y k_2 para cada uno de los dos resortes unidos al bloque.

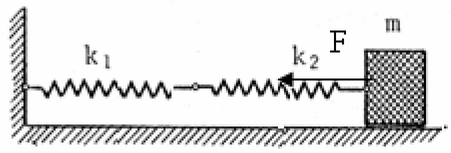


a **b** **c**

a)



$$l = l_1 + l_2$$



$$l + x = l_1 + x_1 + l_2 + x_2$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$F = F_1 = F_2 \begin{cases} F_1 = -k_1 x_1 \\ F_2 = -k_2 x_2 \end{cases}$$

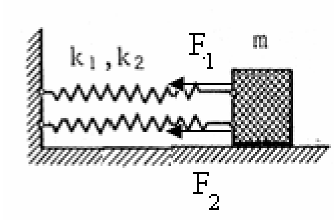
$$F = -kx \rightarrow x = -\frac{F}{k} = x_1 + x_2 = -\frac{F_1}{k_1} - \frac{F_2}{k_2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

$$\rightarrow \boxed{\upsilon_a = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}}$$

b)



$$x_1 = x_2 = x$$

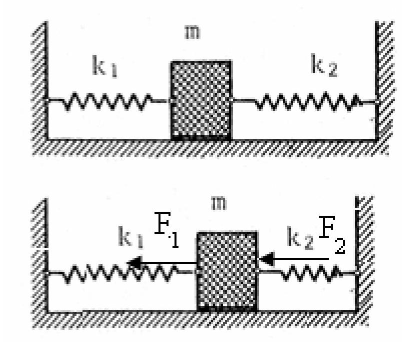
$$\left.\begin{array}{l} F_1 = -k_1 x_1 \\ F_2 = -k_2 x_2 \end{array}\right\} F = F_1 + F_2$$

$$-kx = -k_1 x_1 - k_2 x_2 = -\left(k_1 + k_2\right) x$$

$$k = k_1 + k_2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \rightarrow \boxed{\upsilon_b = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}}$$

c)



$$x_1 = x_2$$

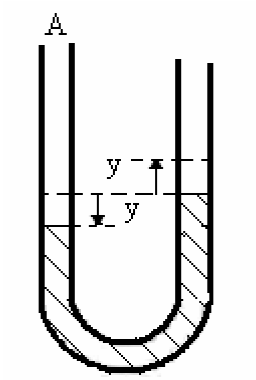
Lo que se estira el muelle 1 es igual a lo que se comprime el muelle 2.

$$F = F_1 + F_2$$

$$-kx = -k_1 x_1 - k_2 x_2 = -\left(k_1 + k_2\right) x \rightarrow k = k_1 + k_2$$

$$\boxed{\upsilon_c = \upsilon_b}$$

16.-Un tubo en forma de U y de sección recta constante A está abierto a la atmósfera. Está lleno hasta un nivel de un líquido incompresible que fluye a través del tubo con rozamiento despreciable. Demostrar que si se hace descender la superficie del líquido en uno de los brazos de la U, y luego se deja libre, el periodo de las oscilaciones de la columna líquida es $T=2\pi(L/2g)^{1/2}$.



Fuerza recuperadora = F_{rec}

$$F_{rec} = -\rho g\left(2y\right) A$$

$$-\rho g 2 y A = m\frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$m = \rho V = \rho A L$$

$$-\cancel{\rho} g 2 y \cancel{A} = \cancel{\rho}\cancel{A} L\frac{d^2 y}{dt^2}$$

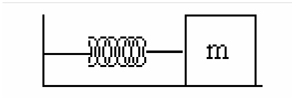
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{2g}{L} y \rightarrow \text{Movimiento armónico simple}$$

$$\text{con } \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}}$$

17.-Un bloque de masa 2.5 kg está conectado a un muelle de constante elástica 1250 N/m, el movimiento del bloque está amortiguado con b=50 kg/s. Está sometido a una fuerza externa sinusoidal de frecuencia angular ω=25 rad/s y módulo máximo 12 N. Determinar:

a) La amplitud y la constante de fase para el movimiento en estado estacionario.

b) La amplitud del sistema cuando está en resonancia de amplitud.



$$\omega_t = 25\, rad/s$$
$$m = 2.5\, kg$$
$$k = 1250\, N/m$$
$$b = 50\, kg/s$$
$$F_o = 12\, N$$

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m} = \frac{1250}{2.5} = 500\, s^{-2}$$

$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{50}{2\cdot 2.5} = 10\, s^{-1}$$

$$\frac{F_o}{m} = \frac{12}{2.5} = 4.8\, m/s^2$$

$$A_o = \frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_t^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_t^2}}$$

$$tg\delta = \frac{2\gamma\omega_e}{\omega_o^2 - \omega_t^2}$$

$$\boxed{A_o = 9.313\cdot 10^{-3}\, m}$$

$$\delta = arctg\frac{2\cdot 10\cdot 25}{500-625} = -75.96^o \rightarrow \boxed{\delta = -1.326\, rad}$$

Resonancia: $\omega = \omega_t \rightarrow A_o = \dfrac{\frac{F_o}{m}}{2\gamma\omega_t} = 9.6\, mm$

$$\boxed{A_o = 9.6\, mm}$$

18.-Un cuerpo de 2 kg descansa sobre un tablero horizontal y está unido al extremo libre de un muelle de constante elástica k= 200 N/m. En un instante dado sus oscilaciones presentan una amplitud de 30 cm, pero debido al rozamiento, dicha amplitud se reduce a la mitad cuando han transcurrido 25 segundos. Determinar:

a) El valor del parámetro de amortiguamiento β y del tiempo de relajación τ.

b) La frecuencia y el periodo de las oscilaciones no amortiguadas.

c) Lo mismo para las oscilaciones amortiguadas.

d) El tiempo que debe transcurrir para que se disipe la mitad de la energía del oscilador.
e) Lo mismo para que se disipe el 99% de la energía del oscilador. ¿Cuál será entonces la amplitud de las oscilaciones?

$$\left.\begin{array}{l} m = 2\,kg \\ k = 200\,N/m \end{array}\right\} F = -kx = ma \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$A_0 = 0.3\,m$$

$$x = A_0 e^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos(\omega t - \delta)$$

$$\tau = \frac{1}{2\beta}$$

a)

$$\left.\begin{array}{l} A_\delta = A_0 e^{-\frac{\beta}{2m}t} \\ \text{En } t = 25\,s \rightarrow A(t+25) = \dfrac{A(t)}{2} \end{array}\right\} \frac{1}{2} = e^{-\frac{\beta}{2m}25}$$

$$\frac{\beta}{2m}25 = \ln 2 \rightarrow \beta = \frac{2m\ln 2}{25}$$

$$\boxed{\beta = 0.11\,kgs^{-1}}$$

$$\tau = \frac{m}{\beta} = 18.03\,s$$

$$\boxed{\tau = 18.03\,s}$$

b)

$$\omega_0 = 10\,rad/s \rightarrow \nu = \frac{10}{2\pi}(Hz) \quad T = \frac{2\pi}{10}(s)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \nu = 1.591549\,Hz \\ T = 0.62831\,s \end{array}}$$

c)

$$\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2} \rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \nu = 1.59\,Hz \\ T = 0.628\,s \end{array}}$$

d)

La energía se disipa de acuerdo con la expresión $E = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

T_1 es el tiempo necesario para que se disipe la mitad: $E(T_1) = \frac{E_0}{2} = E_0 e^{-\frac{T_1}{\tau}}$

$T_1 = \tau \ln 2 = 12.6\,s$

$\boxed{T_1 = 12.6\,s}$

e)

$E(T_2) = 0.01 E_0 = E_0 e^{-\frac{T_2}{\tau}}$

T_2 es el tiempo necesario para que se disipe el 99%.

$E(T_2) = -\tau \ln 0.01 = 83.8\,s$

$\boxed{T_2 = 83.8\,s}$

La amplitud viene dada por:

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{Bt}{2m}} = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

$$\frac{A(t)}{A_0} = e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

Al transcurrir T_2 tendremos:

$$\frac{A(T_2)}{A_0} = e^{-\frac{T_2}{2\tau}} = e^{\ln \frac{0.01}{2}} = (0.01)^{\frac{1}{2}} = 0.1$$

Ha decaído al 90% de la amplitud inicial.

19.-Los átomos de un sólido ejecutan oscilaciones armónicas independientes alrededor de posiciones fijas de equilibrio dispuestas según una red cúbica de lado a = $1{,}1\cdot10^{-11}$m. Estos átomos tienen una masa de 10^{-22} g y vibran con frecuencia de 10^{13} Hz. Según la mecánica estadística, la energía total de cada oscilador es κT, donde $\kappa = R/N_0$ es la constante de Boltzman.

a) Calcular la constante de recuperación.

b) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones a temperatura ambiente (17ºC)?

c) Imaginando que el sólido fundiese cuando la amplitud de las oscilaciones alcanzase un valor de a/10, ¿a qué temperatura fundiría el sólido?

Datos: R = 8,31 J/Kmol, $N_0 = 6.023{,}10^{23}$ moléculas/mol.

$$f = 10^{13}\,Hz \qquad E = \kappa T \qquad \omega = 2\pi f$$

$$m = 10^{-22}\,g \qquad \kappa = \frac{R}{N_0}$$

a)

$$k = m\omega^2 = 10^{-22}\cdot 10^{-3}\,kg\cdot\left(2\pi\cdot 10^{13}\,Hz\right)^2 = 10^{-25}4\pi\cdot 10^{26}\,kg/s^2$$

$$\boxed{k = 40\pi^2\,N/m}$$

b)

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2\kappa T}{k}} = \sqrt{\frac{2\dfrac{8.31}{6.023\cdot 10^{23}}(273+17)}{40\pi^2}}$$

$$\boxed{A = 1.672\cdot 10^{-12}\,m}$$

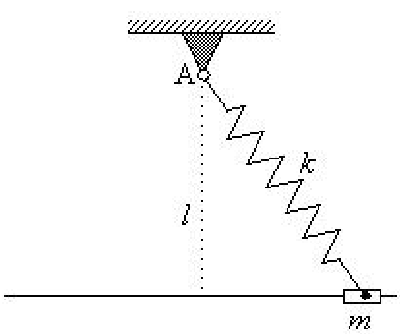
c)

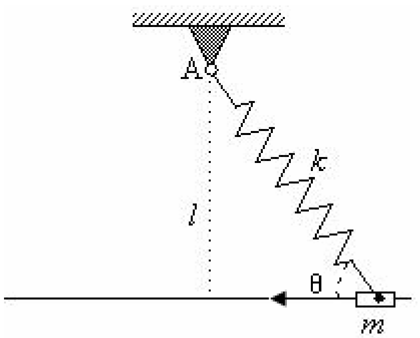
$$A = \frac{a}{10}; \quad E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{10}\right)^2 = \kappa T_{fuión}$$

$$T_{fuión} = \frac{ka^2}{2\kappa 100} = \frac{ka^2}{200\dfrac{R}{N_0}} = \frac{ka^2 N_0}{200R} = \frac{40\pi^2\left(5.1\cdot 10^{-11}\right)6.023\cdot 10^{23}}{200\cdot 8.31}$$

$$\boxed{T_{fuión} = 372.09\,K = 99.09\,^{\circ}C}$$

20.- Consideramos un pequeño objeto, de masa *m*, que tan sólo puede moverse a lo largo de una recta, unido a un extremo de un muelle de constante elástica *k* y de longitud l_0. El otro extremo del muelle está unido a un punto fijo *A* situado a una distancia $l=l_0$ de la recta sobre la que se mueve el pequeño objeto, como se muestra en la figura. Calcular la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del sistema.





k, l_0

$l > l_0$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F\cos\theta = F\frac{x}{L} \\ L &= l + \Delta l \\ F &= -k\left(L - l_0\right) \end{aligned}\right\} F_x = -k\left(L - l_0\right)\frac{x}{L} = -k\left(1 - \frac{l_0}{L}\right)x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{l_0}{L} = \frac{l_0}{l + \Delta l} \approx \frac{l_0}{l} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{l - l_0}{l}\right)}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{l - l_0}{l}\right)}}$$