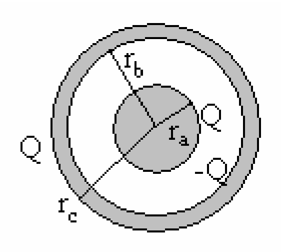
Relación de problemas: Tema 8

1.- El faradio es una unidad de capacidad enorme. Para ilustrar este hecho, considérese la Tierra como una esfera conductora de radio $6{,}37 \cdot 10^6$ m y encuéntrese su capacidad.

$$\left.\begin{array}{l} C = \dfrac{Q}{V} \\ V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R} \end{array}\right\} C = 4\pi\varepsilon_0 R \text{ como } \varepsilon_0 = 8.854\cdot 10^{-12} \Rightarrow \text{C}=7.09\cdot 10^{-4}\text{ F}$$

$$\boxed{\text{C}=7.09\cdot 10^{-4}\text{ F}}$$

2.- Un conductor esférico macizo, de radio r_a, está rodeado por una carcasa conductora esférica de radio interior r_b y radio exterior r_c. Inicialmente ambos conductores están descargados. Si al conductor interior se le suministra una carga Q, encuéntrese la distribución final de carga estática. Calcúlese el potencial para todos los puntos y represéntese gráficamente en función del radio.



La carga en la superficie interior del conductor exterior (r_b) es –Q, ya que esta superficie envuelve la carga del conductor interior.
La superficie exterior del conductor exterior tiene una carga Q, ya que el conductor en su conjunto debe ser neutro (inicialmente era neutro).
Debido a la simetría esférica del problema, la carga se distribuirá uniformemente en las superficies.

En la superficie de radio $r_a \Rightarrow \rho_a = \dfrac{Q}{4\pi r_a^2}$

En la superficie de radio $r_b \Rightarrow \rho_b = -\dfrac{Q}{4\pi r_b^2}$

En la superficie de radio $r_c \Rightarrow \rho_c = \dfrac{Q}{4\pi r_c^2}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho_a = \dfrac{Q}{4\pi r_a^2} \\ \rho_b = -\dfrac{Q}{4\pi r_b^2} \\ \rho_c = \dfrac{Q}{4\pi r_c^2} \end{array}}$$

Debido a la simetría esférica, el potencial en la región $r_a \le r \le r_b$ es:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Como los conductores son superficies equipotenciales:

$$\boxed{V=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r_a} & r\le r_a\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} & r_a\le r\le r_b\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r_b} & r_b\le r\le r_c\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} & r_c\le r\end{cases}}$$

3.- Una bobina toroidal de radio medio 20 cm y 630 vueltas se llena con un material cuya susceptibilidad magnética χ es 100. Si la corriente es de 3 A, encuentre el valor del campo magnético $\vec{B}$ (supuesto uniforme).

$$B=\frac{\mu_0\chi NI}{2\pi r}$$

con:

$N=630$

$\chi=100$ $\boxed{\text{B=0.189T}}$

$r=0.2\,m$

$\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\,N/A^2$

$I=3\,A$

4.- Una esfera conductora de 90 cm de radio se carga a un potencial de 1000 V. Calcular:

a) La cantidad de carga que ha adquirido.

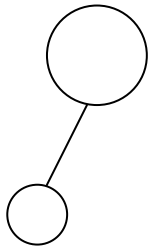
b) A continuación se conecta con otra esfera descargada de 45 cm de radio, ¿cuál será el potencial de esta esfera y cuánta carga habrá adquirido? ($\varepsilon o = 8.85\cdot 10^{-12}\ C^2N^{-1}m^{-2}$).

a)

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\rightarrow Q=V4\pi\varepsilon_0 R=10^{-7}\,C$$

$$\boxed{Q=10^{-7}\,C}$$

b)



Al conectar las esferas pasa carga desde la esfera que está a mayor potencial a la de menor potencial, hasta que se igualan los potenciales. Además se cumple la conservación de la carga.

$$Q = q_1 + q_2$$

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = V_2 \rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{como } R_1 = 2R_2 \rightarrow q_1 = 2q_2 \\ Q = q_1 + q_2\end{array}\right\} \boxed{q_2 = \frac{10^{-7}}{3} C} \qquad \boxed{q_1 = \frac{2}{3} 10^{-7} C}$$

El potencial final será:

$$V_1 = V_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = 666.6 \ V$$

5.- Se tiene una esfera metálica de 20 cm de radio que se ha cargado a 10^4 V. Con otra esfera metálica de 4 cm de radio, inicialmente descargada, se toca la grande y después de separarlas, se descarga la pequeña. Este proceso se repite así 7 veces en total. ¿Cuál es el voltaje final de la esfera grande?

Inicialmente:

- Para la esfera grande (R=20 cm):

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0}{R} \rightarrow Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R V_0$$

- Para la esfera pequeña: $q_0=0$

Al tocar por primera vez la esfera grande con la pequeña descargada, Q_0 se repartirá entre ambas de modo que ambas quedan al mismo potencial V_1:

$$Q_0 = Q_1 + q_1 = \left(4\pi\varepsilon_0 R V_1\right) + \left(4\pi\varepsilon_0 r V_1\right) = 4\pi\varepsilon_0 \left(R + r\right) V_1$$

$$V_1 = \frac{R}{R+r} V_0$$

Análogamente, después del segundo contacto:

$$V_2 = \frac{R}{R+r} V_1 = \left(\frac{R}{R+r} \right)^2 V_0$$

Y después de siete contactos:

$$V_7 = \left(\frac{R}{R+r} \right)^7 V_0 \rightarrow V_7 = \left(\frac{20}{20+4} \right)^7 10^4$$

$$\boxed{V_7 = 2790\, v}$$

6.- Un condensador plano de 2 μF de capacidad se conecta a una diferencia de potencial de 100 V.
a) ¿Cuánto vale la carga adquirida?
b) Si la distancia entre las placas se redujese a la mitad, ¿aumentaría o disminuiría la capacidad? ¿Y la carga? Razone las respuestas.

a)

$$Q = CV = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2$$

$$\boxed{Q = 0.2\, mC}$$

b)

$$C = \varepsilon \frac{S}{d} \text{ si } d \text{ se reduce a la mitad } d' = \frac{d}{2}$$
$$C' = \varepsilon \frac{S}{d'} = 2C \rightarrow C' \text{ se hace el doble de } C$$
$$Q' = C'V = 0.4\, mC$$

$$\boxed{Q' = 0.4\, mC}$$

7.-Se desea construir un condensador de placas plano-paralelas, usando vidrio como dieléctrico. El vidrio tiene una permitividad dieléctrica $\varepsilon = 8\varepsilon_o$ y el campo eléctrico máximo que es capaz de soportar es de $2\cdot 10^7$ V/m. El condensador debe tener un capacidad de 0.20 μF y debe soportar una diferencia de potencial máxima de 10^4 V. ¿Cuál es el área mínima que pueden tener las placas del condensador para cumplir las especificaciones anteriores? ($\varepsilon o = 8.85\cdot 10^{-12}$ $C^2N^{-1}m^{-2}$).

$$\text{Datos} \begin{cases} \varepsilon = 8\varepsilon_0 \\ E_{\max} = 2\cdot 10^7 \, V/m \\ C = 0.20\cdot 10^{-6}\, F \\ V_{\max} = 10^4\, V \end{cases}$$

$$E_{\max} = \frac{V_{\max}}{d} \rightarrow d = \frac{10^4}{2\cdot 10^7} = 0.5\cdot 10^{-3}\, m$$

$$S = \frac{Cd}{\varepsilon} = 1.41\, m^2$$

$$\boxed{S = 1.41 m^2}$$

8.-Un condensador de placas plano paralelas cuadradas, de lado 14 cm y separadas 2 mm, se conecta a una batería de 12 V. Posteriormente se desconecta la batería y se aumenta la separación entre placas a 3,5 mm.

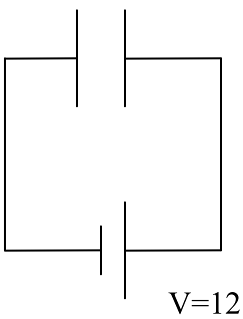
a) ¿Cuánto valen la carga y la energía iniciales del condensador?

b) ¿Cuánto vale el incremento de la carga y de la energía almacenada en el condensador tras el aumento de la separación entre las placas?

c) Explicar cualitativamente de dónde proviene el incremento de energía del apartado anterior.

Datos: Constante dieléctrica del vacío, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ $C^2N^{-1}m^{-2}$.

a)



$$S = 196\, cm^2 = 0.0196\, m^2$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 86.7\, pF$$

$$Q_i = VC = 1.04\, nC$$

$$U_i = \frac{1}{2} Q_i V = 6.24\, nJ$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Q_i = 1.04\, nC \\ U_i = 6.24\, nJ \end{array}}$$

b)

Como se desconecta la batería para aumentar la distancia entre las placas, el proceso que se realiza es a carga constante.

$$Q_i = Q_f = 1.04\,nC \rightarrow \boxed{\Delta Q = 0}$$

$$C_f = \varepsilon_0 \frac{S}{d_f} = \varepsilon_0 \frac{S}{d_f}\frac{d_i}{d_i} = \varepsilon_0 \frac{S}{d_i}\frac{d_i}{d_f} = C\frac{d_i}{d_f} = 0.57\,C = 49.5\,pF$$

$$V_f = \frac{Q_f}{C_f} = 21\,v$$

$$U_f = \frac{1}{2} Q_f V_f = 10.9\,nJ \rightarrow \Delta U = U_f - U_i = 4.66\,nJ$$

$$\boxed{\Delta U = 4.66\,nJ}$$

c)

Separar las placas implica realizar un trabajo mecánico, trabajo que se comunica al condensador en forma de energía almacenada en el mismo.

9.- Dos planos conductores cuadrados, de lado *L*, están inicialmente separados una distancia *d* y conectados a una diferencia de potencial constante ΔV_0. A continuación se comienza a introducir un dieléctrico de constante ε hasta una altura *h*. En ese instante se desconecta la diferencia de potencial y se sigue introduciendo el dieléctrico hasta que llena completamente el espacio entre los planos. Calcule la carga final en los planos y la diferencia de potencial.

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d} \text{ y } Q_0 = C_0 \Delta V_0 = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d}\Delta V_0$$

Se comienza a introducir un dieléctrico ε hasta una altura h.

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 L(L-h)}{d} + \frac{\varepsilon L h}{d} = \frac{L}{d}\left[\varepsilon_0 (L-h) + \varepsilon h\right]$$

Como la diferencia de potencial sigue siendo la misma:

$$Q = C\Delta V_0 = \frac{\Delta V_0}{d} L\left[\varepsilon_0 (L-h) + \varepsilon h\right]$$

Ahora se desconecta, luego esta será la carga final.

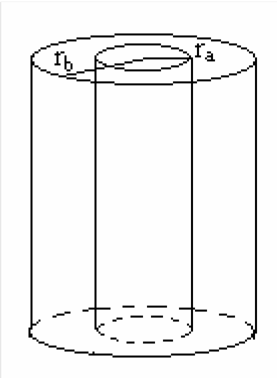
$$\boxed{Q = \frac{\Delta V_0}{d} L\left[\varepsilon_0 (L-h) + \varepsilon h\right]}$$

Al final:

$$C=\frac{\varepsilon L^2}{d} \quad \text{luego} \quad \Delta V_f=\frac{Q}{C}=\frac{\Delta V_0 L d\left[\varepsilon_0\left(L-h\right)+\varepsilon h\right]}{d\varepsilon L^2}$$

$$\boxed{\Delta V_f=\frac{\Delta V_0\left[\varepsilon_0\left(L-h\right)+\varepsilon h\right]}{\varepsilon L}}$$

10.- Dos conductores cilíndricos coaxiales e infinitamente largos, de radios r_b y r_a, tienen el espacio entre ellos lleno de un dieléctrico de constante dieléctrica variable $\varepsilon=\alpha\rho^n$, con α y n constantes y ρ la distancia al eje de los cilindros. Cuando se encuentran conectados a una diferencia de potencial ΔV, calcúlese **D** y **E** en todos los puntos de la región comprendida entre los conductores. ¿En qué circunstancia el módulo del campo eléctrico será constante en toda la región?



$$\varepsilon=\alpha\rho^n$$

Para el campo $\vec{D}$: $\oint\vec{D}\cdot\vec{ds}=Q_v$

Debido a su simetría:

$$\vec{D}=\begin{cases}0 & r<r_a\\ \dfrac{\rho_s r_a}{\rho}\hat{\rho} & r_a\le r\le r_b\\ 0 & r>r_b\end{cases}\Rightarrow \vec{E}=\begin{cases}0 & r<r_a\\ \dfrac{\rho_s r_a}{\alpha\,\rho^{n+1}}\hat{\rho} & r_a\le r\le r_b\\ 0 & r>r_b\end{cases}$$

La diferencia de potencial sería:

$$\Delta V=-\int_{r_a}^{r_b}\vec{E}\cdot\vec{d\rho}=\frac{\rho_s r_a}{\alpha}\frac{r_b^{-n}-r_a^{-n}}{n}=\frac{\rho_s r_a}{\alpha\, n}\left(\frac{1}{r_b^n}-\frac{1}{r_a^n}\right)$$

luego

$$\rho_s=\frac{\Delta V\alpha\, n r_b^n r_a^n}{r_a\left(r_a^n-r_b^n\right)} \quad \text{y sustituyendo:}$$

$$\vec{D}=\begin{cases}0 & r<r_a \text{ y } r>r_b\\ \dfrac{\Delta V\alpha\, n r_b^n r_a^n}{\left(r_a^n-r_b^n\right)\rho}\hat{\rho} & r_a\le r\le r_b\end{cases}$$

$$\vec{E}=\begin{cases}0 & r<r_a \text{ y } r>r_b\\ \dfrac{\Delta V\alpha\, n r_b^n r_a^n}{\left(r_a^n-r_b^n\right)\rho^{n+1}}\hat{\rho} & r_a\le r\le r_b\end{cases}$$

$$\boxed{\vec{\mathrm{D}}=\begin{cases}0 \quad r<r_a \ \text{ y } \ r>r_b \\ \dfrac{\Delta V \alpha n r_b{}^n r_a{}^n}{\left(r_a{}^n-r_b{}^n\right)\rho}\hat{\rho} \quad r_a \leq r \leq r_b\end{cases} \Rightarrow \vec{E}=\begin{cases}0 \quad r<r_a \ \text{ y } \ r>r_b \\ \dfrac{\Delta V \alpha n r_b{}^n r_a{}^n}{\left(r_a{}^n-r_b{}^n\right)\rho^{n+1}}\hat{\rho} \quad r_a \leq r \leq r_b\end{cases}}$$

Luego en el caso $n = -1$, es decir, $\varepsilon=\dfrac{\alpha}{\rho}$, el campo $\vec{\mathrm{E}}$ es constante en toda la región.

11.- Una esfera dieléctrica de radio r_a posee carga libre de densidad constante ρ_o. Calcúlese **D** y **E** para todos los puntos dentro de la esfera. Calcúlese el potencial en todos los puntos.

Debido a la simetría esférica:

$$\oint \vec{D}\cdot\vec{dS}=4\pi R^2 D=\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$$

Luego:

$$\vec{D}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 R}{3}\hat{R} \quad R\leq r_a \\ \dfrac{\rho_0 r_a{}^3}{3R^2}\hat{R} \quad R>r_a\end{cases} \Rightarrow \vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 R}{3\varepsilon}\hat{R} \\ \dfrac{\rho_0 r_a{}^3}{3\varepsilon_0 R^2}\hat{R}\end{cases}$$

$$\boxed{\vec{D}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 R}{3}\hat{R} \quad R\leq r_a \\ \dfrac{\rho_0 r_a{}^3}{3R^2}\hat{R} \quad R>r_a\end{cases} \Rightarrow \vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 R}{3\varepsilon}\hat{R} \quad R\leq r_a \\ \dfrac{\rho_0 r_a{}^3}{3\varepsilon_0 R^2}\hat{R} \quad R>r_a\end{cases}}$$

$$V=-\int_\infty^R \vec{E}\cdot\vec{dR} \Rightarrow V=\begin{cases}-\displaystyle\int_\infty^R \frac{\rho_0 r_a{}^3}{3\varepsilon_0 \rho^2}dR \quad R>r_a \\ -\displaystyle\int_\infty^{r_a} \frac{\rho_0 r_a{}^3}{3\varepsilon_0 R^2}dR-\int_{r_a}^R \frac{\rho_0 R}{3\varepsilon} \quad R\leq r_a\end{cases}$$

$$\boxed{V=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 r_a{}^2}{3\varepsilon_0 R} \quad R\geq r_a \\ \dfrac{\rho_0 r_a{}^2}{3\varepsilon_0}-\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon}\left(\dfrac{R^2-r_a{}^2}{2}\right) \quad R<r_a\end{cases}}$$

12.- Una partícula cargada se encuentra moviéndose con una velocidad v_0 siguiendo una trayectoria circular de radio R_0 en un recipiente vacío, en el cual actúa un campo magnético **B** constante. A continuación se añade cuidadosamente un fluido de permeabilidad magnética μ. Sabiendo que el momento angular de la partícula no ha variado en el proceso, calcular el radio y la velocidad final de la partícula.

Inicialmente la partícula gira debido a una fuerza

$F_0 = qv_0B$, como gira: $F_0 = m\dfrac{v_0^2}{R_0}$

$$B = \frac{m}{q}\frac{v_0}{R_0}$$

Al añadir el líquido:

$$B_f = \frac{\mu_0}{\mu}B$$

y la fuerza: $F_f = qv_fB_f$

Como el momento lineal no ha cambiado: $L_0 = L_f$

$$mv_0R_0 = mv_fR_f \Rightarrow v_0R_0 = v_fR_f$$

como gira: $F_f = m\dfrac{v_f^2}{R_f} = qv_fB_f \Rightarrow \dfrac{v_f}{R_f} = \dfrac{q}{m}B_f = \dfrac{q}{m}\dfrac{\mu_0}{\mu}B$

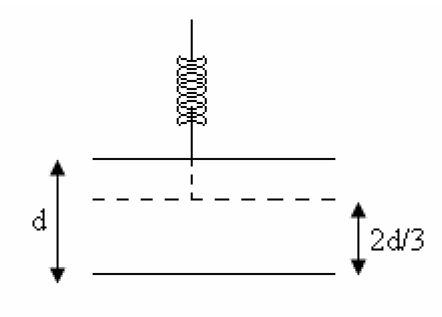
luego:

$$\frac{v_f}{R_f} = \frac{\mu_0}{\mu}\frac{v_0}{R_0} \Rightarrow \frac{R_f}{R_0} = \frac{\mu}{\mu_0}\frac{v_f}{v_0} = \frac{\mu}{\mu_0}\frac{R_0}{R_f}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{aligned} R_f &= \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}}R_0 \\ v_f &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu}}v_0 \end{aligned}}$$

13.- Dos planos conductores iguales, de superficie A, se colocan horizontalmente, inicialmente descargados. El plano inferior se encuentra fijo, mientras que el superior cuelga a una distancia d del plano inferior de un muelle de constante k, cuyo extremo superior está fijo. En esta situación, los planos se conectan a una diferencia de potencial desconocida y se observa que la distancia entre los planos disminuye a un tercio de la original. Calcule la diferencia de potencial entre los planos.



Las fuerzas que sufre la placa de arriba cuando no está cargada son:

$$-mg + k\left(l - l_0\right) = 0$$

Cuando las placas se cargan, la fuerza que la placa de abajo realiza sobre la de arriba es:

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

La placa se mueve hacia abajo una distancia d/3, luego esta será la distancia que el muelle se estira respecto de la anterior posición.
El equilibrio queda:

$$-mg + k\left(l - l_0 + \frac{d}{3}\right) - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = 0$$

luego:

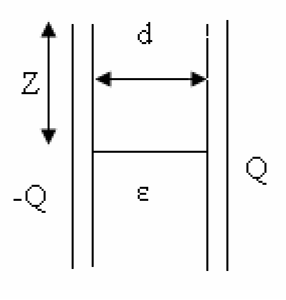
$$\frac{kd}{3} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

como $\Delta V = \frac{Q\frac{2}{3}d}{\varepsilon S}$ y $Q = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_0 Skd}$

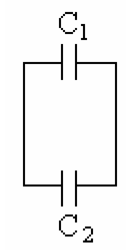
obtenemos:

$$\boxed{\Delta V = \frac{2d}{3}\sqrt{\frac{2kd}{3\varepsilon_0 S}}}$$

14.- Dos conductores planos cuadrados, cargados con cargas Q y -Q, de lado L y separados una distancia d se colocan verticalmente y el espacio entre ellos se llena con un dieléctrico de constante dieléctrica ε, densidad de masa ρ_m y que encaja perfectamente, de forma que el dieléctrico puede desplazarse verticalmente. Se suelta el dieléctrico y éste baja debido a la acción del peso. Calcule hasta qué altura bajará.



Este sistema puede verse como dos condensadores en paralelo con :



$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 L z}{d} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{\varepsilon L(L-z)}{d}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{L}{d}\left(\varepsilon_0 z + \varepsilon(L-z)\right)$$

La energía potencial del condensador es:

$$E_p = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{L\left(\varepsilon_0 z + \varepsilon(L-z)\right)}$$

La fuerza que se genera es:

$$F_z = -\frac{dE_p}{dz}$$

$$F_z = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{L}\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\left[\varepsilon_0 z + \varepsilon(L-z)\right]^2}$$

Esta fuerza debe contrarrestar el peso:

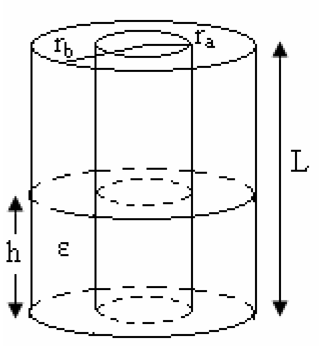
$$P = \rho_m L^2 d g$$

$$F_z = P \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{L}\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\left[\varepsilon_0 z + \varepsilon(L-z)\right]^2} = \rho_m L^2 d g$$

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon) z + \varepsilon L = \sqrt{\frac{Q^2 d(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2L^3 d}} \Rightarrow$$

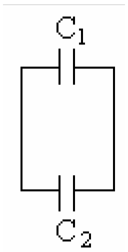
$$\boxed{\Rightarrow z = \frac{Q}{L}\sqrt{\frac{1}{2L(\varepsilon - \varepsilon_0) g \rho_m}} - \frac{\varepsilon L}{\varepsilon - \varepsilon_0}}$$

15.- Una carcasa conductora cilíndrica larga, de radio r_b y longitud L, contiene otra carcasa cilíndrica conductora de radio r_a e igual longitud. Se introduce hasta una altura h un dieléctrico de constante dieléctrica ε, que encaja perfectamente en el espacio entre los dos conductores. Cuando los conductores se cargan con carga Q y $-Q$, calcule la fuerza generada por las cargas en los conductores sobre el dieléctrico en esta situación. ¿La fuerza tiende a introducir el dieléctrico o a expulsarlo?



El sistema se puede ver como una asociación de condensadores en paralelo con:

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0 (L-h)}{\ln \frac{r_b}{r_a}} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{2\pi h\varepsilon}{\ln \frac{r_b}{r_a}}$$



$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi}{\ln \frac{r_b}{r_a}} \left(\varepsilon_0 (L-h) + \varepsilon h \right)$$

La energía potencial es:

$$E_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{\ln \frac{r_b}{r_a}}{4\pi} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 (L-h) + \varepsilon h}$$

$$F_p = -\frac{dE_p}{dh} = \frac{\ln \frac{r_b}{r_a}}{4\pi} \frac{Q^2 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\left[\varepsilon_0 (L-h) + \varepsilon h \right]^2}$$

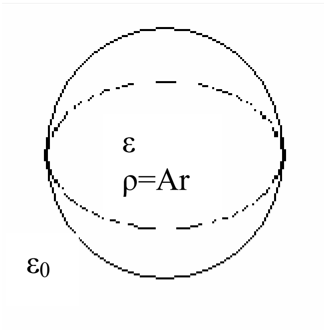
$$\boxed{F = \frac{\ln \frac{r_b}{r_a}}{4\pi} \frac{Q^2 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\left[\varepsilon_0 (L-h) + \varepsilon h \right]^2}}$$

Hacia arriba.

16.- Una esfera dieléctrica de radio a y constante dieléctrica ε, posee en su interior una densidad de carga ρ =Ar, donde A es una constante y r la distancia desde su centro a un punto interior de la esfera. Fuera de la esfera hay vacío. Determinar:
a) El campo eléctrico en cualquier punto del espacio.
b) El potencial en el centro de la esfera.

a)

Aplicando el teorema de Gauss a un punto interior de la esfera contenido en otra esfera de radio r concéntrica con ella:



$$D4\pi r^2 = \int_0^r \rho dv = \int_0^r Ar4\pi r^2 dr$$

$$\vec{D} = \frac{Ar^2}{4}\hat{r} \rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Ar^2}{4\varepsilon}\hat{r}}$$

Para un punto exterior: r>a

$$D4\pi r^2 = \int_0^a A4\pi r^3 dr = A\pi a^4$$

$$\vec{D} = \frac{Aa^4}{4r^2}\hat{r} \rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Aa^4}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

b)

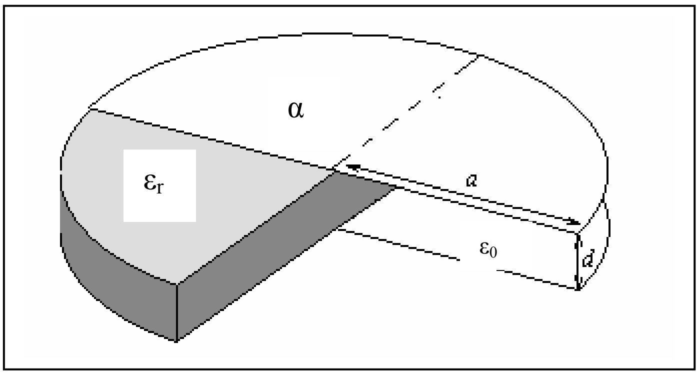
El potencial en el centro de la esfera será:

$$V_{r=0} = -\int_\infty^0 \vec{E}(r)\,d\vec{r} = \int_0^a E_{\text{int}}(r)\,dr + \int_a^\infty E_{ext}(r)\,dr =$$

$$= \int_0^a \frac{A}{4\varepsilon} r^2 dr + \int_a^\infty \frac{Aa^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} dr = \frac{Aa^3}{12\varepsilon\varepsilon_0}(3\varepsilon + \varepsilon_0)$$

$$\boxed{V_{r=0} = \frac{Aa^3}{12\varepsilon\varepsilon_0}(3\varepsilon + \varepsilon_0)}$$

17.-Muchos aparatos de radio utilizan un condensador plano variable de placas semicirculares como parte de un circuito resonante que permite la sintonización de las diferentes emisoras. Suponiendo que las placas tienen un radio a = 1 cm, y están separadas una distancia d = 1 mm, calcular la capacidad de dicho condensador, cuando entre ambas placas existe aire. Para variar la capacidad de dicho condensador se introduce entre sus placas un dieléctrico semicircular del mismo radio a y espesor d que se gira cuando se mueve el dial del aparato de radio para sintonizar una emisora. Calcular la capacidad del condensador cuando:
a) Todo el espacio entre las placas del condensador esta lleno de dieléctrico.
b) El dieléctrico sólo ocupa un ángulo α = 30º del espacio entre las placas, quedando el resto lleno de aire. ¿A que asociación de condensadores equivale esta nueva situación?
Datos: εaire ≈ $\varepsilon_0 = 8.85\cdot10^{-12} C^2N^{-1}m^{-2}$. $\varepsilon_{dieléctrico} = 3\varepsilon_0$.



a)

$$C = \varepsilon\frac{S}{d} = \varepsilon\frac{\pi\frac{a^2}{2}}{d} = 4.17\,pF$$

$$\boxed{C = 4.17\,pF}$$

b)

Se forman dos condensadores en paralelo: C_1 (aire) y C_2 (dieléctrico).

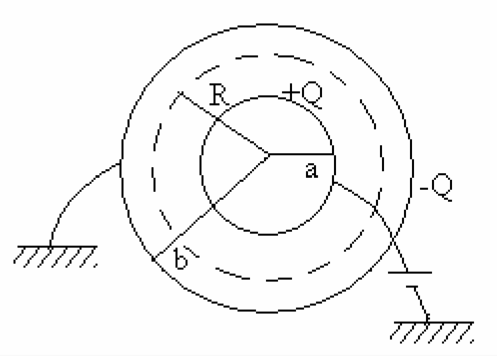
$$\alpha = 30^{\circ} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}\,rad$$

$$\alpha' = 150^{\circ} \rightarrow \alpha' = \frac{5}{6}\pi\,rad$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \varepsilon_0\dfrac{\alpha'\frac{a^2}{2}}{d} = \varepsilon_0\dfrac{5\pi a^2}{12d} \\ C_2 = \varepsilon\dfrac{\alpha\frac{a^2}{2}}{d} = \varepsilon_0\dfrac{3\pi a^2}{12d} \end{array}\right\} C_p = C_1 + C_2 = \frac{2}{3}\varepsilon_0\frac{\pi a^2}{d} \rightarrow \boxed{C_p = 1.85\ pF}$$

18.- Considere un condensador formado por dos chapas esféricas conductoras concéntricas de radios a = 2 cm y b = 4 cm. Entre ambas esferas hay un material dieléctrico de constante dieléctrica relativa igual a 3. Si se establece una diferencia de potencial V= 10 V conectando una pila entre ambas esferas, calcular:
a) La expresión del campo eléctrico en las regiones: r<a y a<r<b.
b) La capacidad del condensador.
c) El valor de la carga que adquiere el condensador.
d) ¿Qué le ocurriría a la capacidad si los radios de las dos chapas esféricas se redujeran a la mitad?
Dato: $\varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2N^{-1}m^{-2}$.

a)



Notación en esféricas: $r \equiv R$

$R < a \rightarrow \boxed{\vec{E} = 0}$

$a < R < b$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\hat{R}$$

b)

Para calcular la capacidad antes hay que calcular V:

$$\int_a^b dV = V_b - V_a = V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_a^b \frac{1}{R^2}dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{b-a}{ab}$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon\frac{ab}{b-a}} \quad \text{y} \quad Q = V\,4\pi\varepsilon\frac{ab}{b-a}$$

Por lo que $\vec{E}$ en el apartado anterior se puede expresar:

$$\boxed{\vec{E} = V\frac{\frac{ab}{b-a}}{R^2}\hat{R}}$$

$$\boxed{C = 13.3\ pF}$$

c)

$Q = CV$

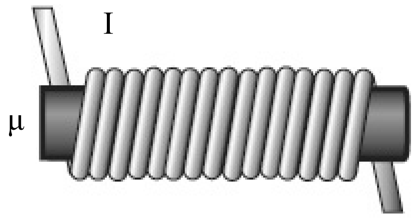
$\boxed{Q = 133\,pF}$

d)

$C' =$ Capacidad del condensador con $\frac{a}{2}$ y $\frac{b}{2}$ de radios.

$$\frac{C'}{C} = \frac{4\pi\varepsilon \dfrac{\left(\frac{a}{2}\frac{b}{2}\right)}{\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)}}{4\pi\varepsilon \dfrac{ab}{b-a}} = \frac{1}{2} \rightarrow C' = \frac{C}{2} \rightarrow \boxed{C' = 6.65\,pF}$$

19.-Considere un solenoide recto indefinido, con n vueltas por unidad de longitud, recorridas por una intensidad I y con un núcleo de material magnético de permeabilidad magnética μ. Calcular los vectores intensidad magnética e inducción magnética en el interior del solenoide.



$\vec{B} = \mu\vec{H}$; $\oint \vec{H}\cdot\vec{dl} = I_{total}$

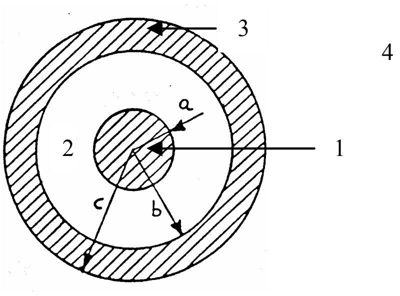
$HL = nLI \rightarrow H = nI$

H está confinado en el interior del solenoide por ser ∞.

Fuera B y H son cero.

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{H} = nI\hat{k} \\ \vec{B} = \mu nI\hat{k}\end{array}}$$

20.-Considere un cable coaxial cuya sección transversal se muestra en la figura. Las zonas rayadas corresponden a los conductores y la región entre a y b es de un material magnético con permeabilidad magnética μ. Suponiendo que por el conductor de radio a circula una intensidad de corriente I y por la cáscara conductora comprendida entre b y c circula la misma intensidad, pero en sentido contrario, calcular:
a) La intensidad magnética en la región comprendida entre a y b.
b) La intensidad magnética en el exterior del cable.



Supondremos que la corriente está uniformemente distribuida y distinguiremos las cuatro zonas especificadas en la figura.

Zona 1: Aplicamos la ley de Ampere a una circunferencia de radio ρ.

$$2\pi\rho B = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2}\pi\rho^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho\hat{\varphi}}$$ (en cilíndricas)

La energía magnética:

$$\left.\begin{array}{l} W = \dfrac{1}{2}\mu_0 \displaystyle\int_V B^2 dv \\ dv = 2\pi\rho d\rho dz \end{array}\right\} W_l = \left\{\begin{array}{l}\text{energía por unidad} \\ \text{de longitud.}\end{array}\right\} = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^a B^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

$$\boxed{W_l = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}}$$

Zona 2: Ley de Ampere.

$$2\pi\rho B = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}}$$

$$W_l = \frac{1}{2\mu_0}\int_a^b \frac{\mu_0^{\,2} I^2}{(2\pi)^2 \rho^2} 2\pi\rho d\rho \Rightarrow \boxed{W_l = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}}$$

Zona 3:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} - \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\frac{\pi\left(\rho^2 - b^2\right)}{\pi\left(c^2 - b^2\right)}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\left[1 - \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right]$$

$$W_l = \frac{1}{2\mu_0}\int_b^c B^2 dv = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[\frac{c^4}{\left(c^2 - b^2\right)^2}\ln\frac{b}{c} - \frac{3c^2 - b^2}{4\left(c^2 - b^2\right)}\right]$$

Zona 4:

Apantallamiento magnético

$$\vec{B} = 0$$
$$\vec{H} = 0$$

Para calcular la autoinducción por unidad de longitud, recordemos que:

$$\sum W_l = \frac{1}{2} L_l I^2$$

L_l $\equiv$ autoinducción por unidad de longitud.

$$L_l = \frac{2\sum W_l}{I^2} = 2\left[\frac{\mu_0}{16\pi} + \frac{\mu_0}{4\pi}\ln\frac{b}{a} + \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{c^4}{\left(c^2 - b^2\right)^2}\right)\ln\frac{b}{c} + \frac{b^2 - 3c^2}{4\left(c^2 - b^2\right)}\right]$$