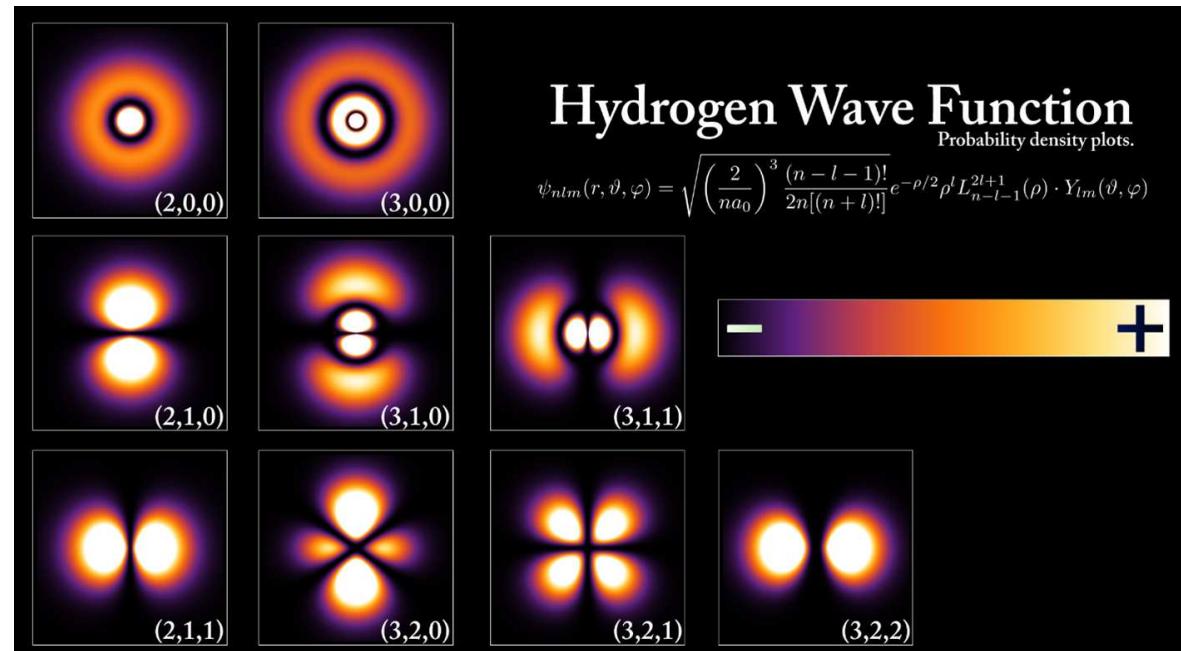




Las Matemáticas de la Mecánica Cuántica



Bert Janssen

Dpto. de Física Teórica y del Cosmos &
Centro Andaluz de Física de Partículas Elementales

Indice de la charla

1. Introducción
2. Contexto histórico

Indice de la charla

1. Introducción
2. Contexto histórico
3. Experimento de Stern-Gerlach

Indice de la charla

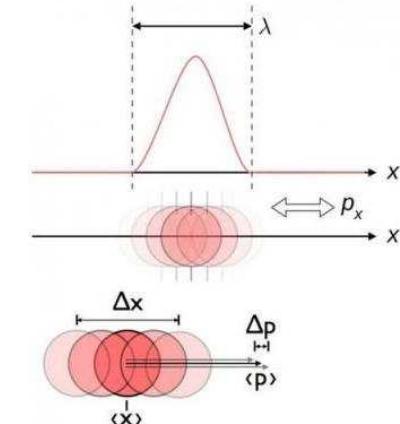
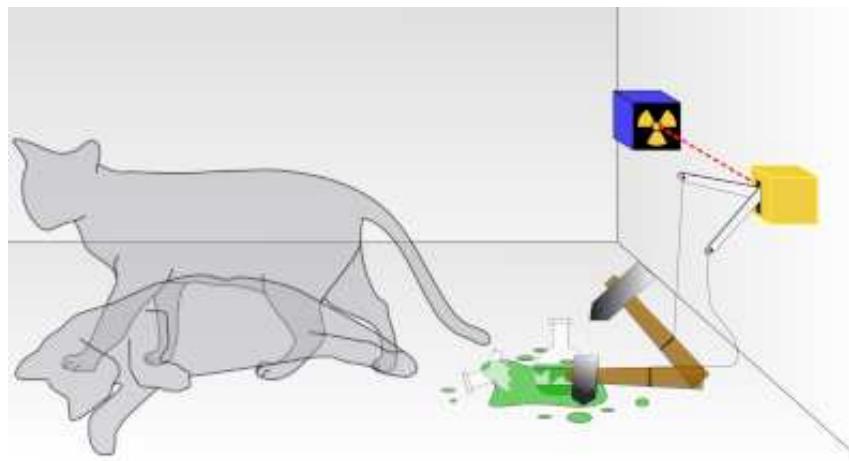
1. Introducción
2. Contexto histórico
3. Experimento de Stern-Gerlach
4. Postulados de la Mecánica Cuántica
5. Sistemas de dimensión finita: Stern-Gerlach
6. Sistemas de dimensión infinita: Sturm-Liouville

Indice de la charla

1. Introducción
2. Contexto histórico
3. Experimento de Stern-Gerlach
4. Postulados de la Mecánica Cuántica
5. Sistemas de dimensión finita: Stern-Gerlach
6. Sistemas de dimensión infinita: Sturm-Liouville
7. Curiosidades cuánticas
8. Conclusiones

1. Introducción

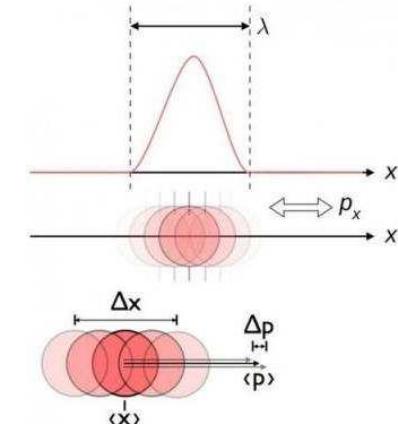
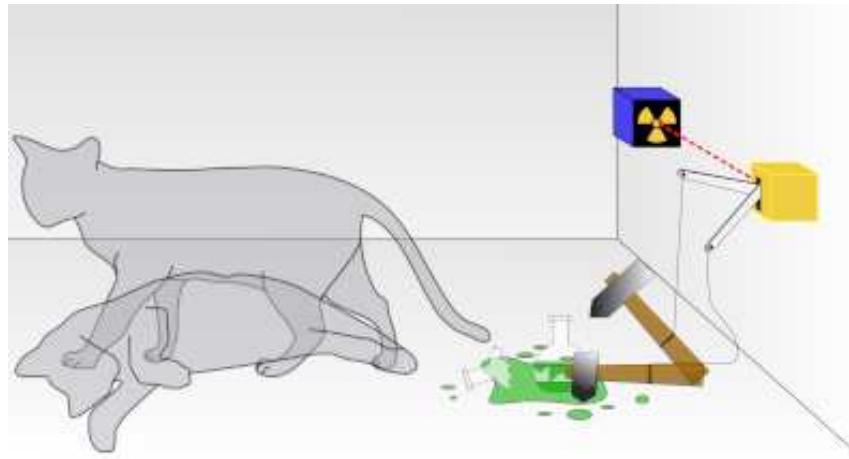
Mecánica Cuántica = Teoría que describe física a escala (sub)atómica



→ mundo cuántico es muy distinto al mundo clásico

1. Introducción

Mecánica Cuántica = Teoría que describe física a escala (sub)atómica



→ mundo cuántico es muy distinto al mundo clásico

Niels Bohr:

"Si no te choca la Mecánica Cuántica, no la estás entendiendo."

Richard Feynmann:

"Se puede decir con bastante seguridad que nadie entiende la Mecánica Cuántica."

Erwin Schrödinger:

"No me gusta y me desagrada profundamente que haya tenido que ver con ello."

Es **teoría muy exitosa** desde punta de vista científico:

Importante en

- Física molecular & atómica & nuclear
- Física de estado sólido & Física de la materia condensada
- Física fundamental: teoría cuántica de campos & gravedad cuántica
- Química cuántica

Es **teoría muy exitosa** desde punta de vista científico:

Importante en

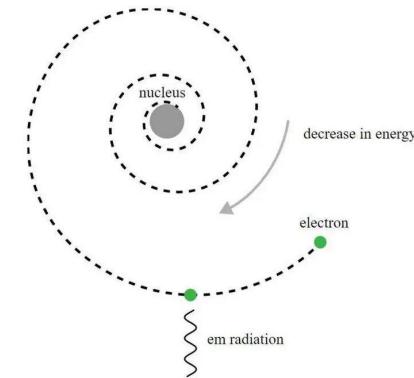
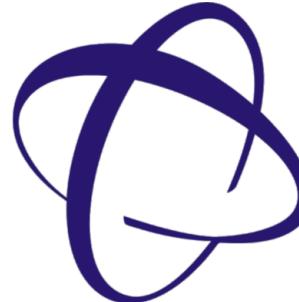
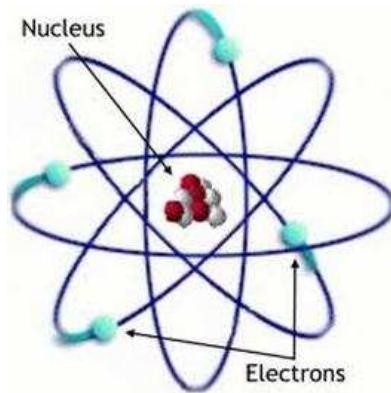
- Física molecular & atómica & nuclear
- Física de estado sólido & Física de la materia condensada
- Física fundamental: teoría cuántica de campos & gravedad cuántica
- Química cuántica

Tiene numerosas aplicaciones en

- electrónica: transistores y microchips
- óptica: láseres, diodos, sensores fotoeléctricos
- industria: paneles solares, desarrollo materiales
- medicina: resonancia magnéticas
- energía nuclear
- futuro: ¿ordenadores cuánticos?

2. Contexto histórico

- 1912: Átomo de Rutherford: mini sistema solar

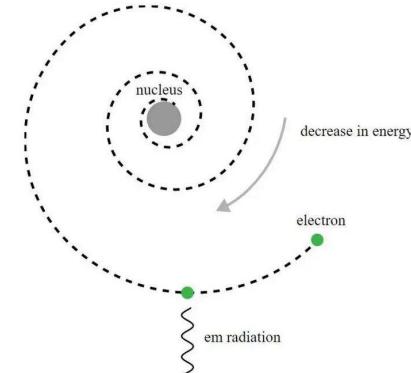
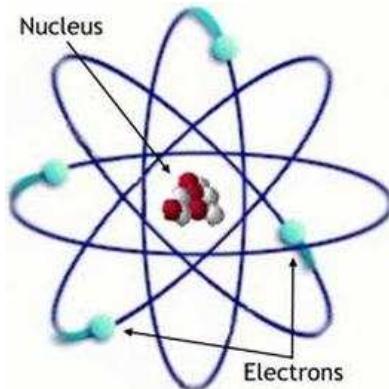


Facultad de Ciencias

Crisis del átomo: inestabilidad del átomo a escalas $t \sim 10^{-8} s$

2. Contexto histórico

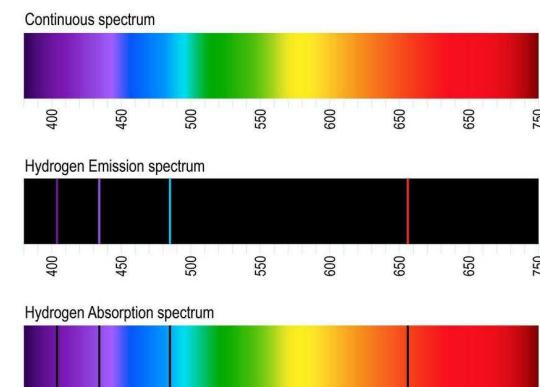
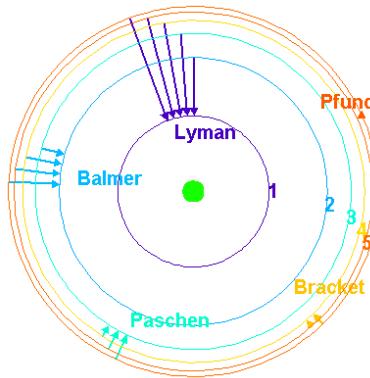
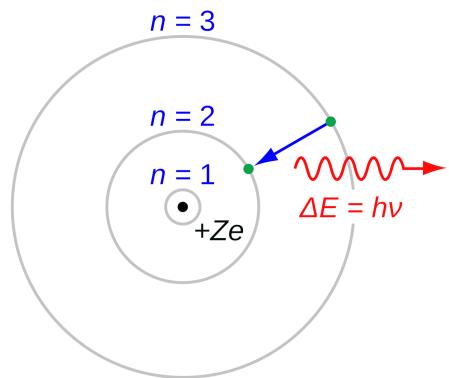
- 1912: Átomo de Rutherford: mini sistema solar



Facultad de Ciencias

Crisis del átomo: inestabilidad del átomo a escalas $t \sim 10^{-8} s$

- 1913: Átomo de Bohr: órbitas con energía cuantizada: $E_n = E_0/n^2 < 0$



Ad hoc: ¿Por qué cuantizada?

- 1925: Mecánica matricial de Heisenberg
- 2025: Año Internacional de la Ciencia y la Tecnología Cuánticas
- Cantidades físicas representadas por objetos tales que $XP \neq PX$

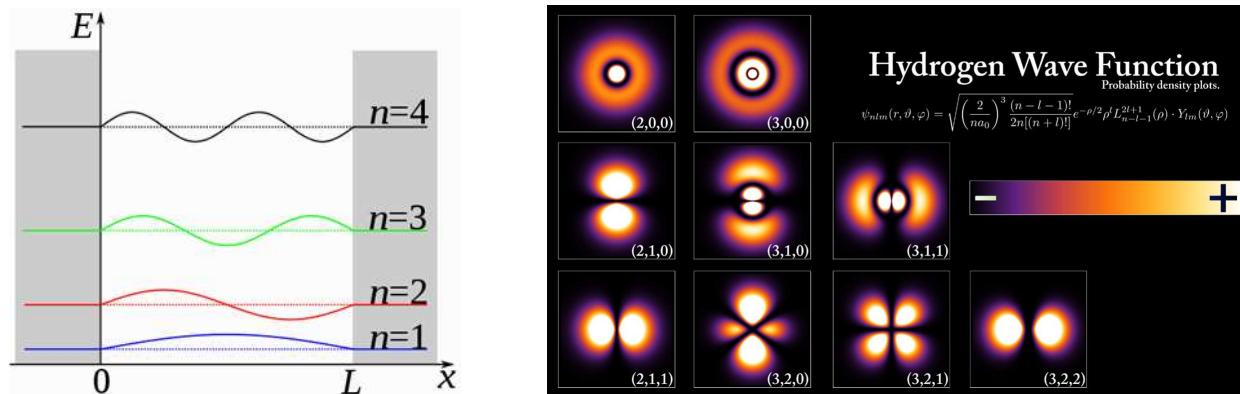
$$\sqrt{2}X(0) = \sqrt{\hbar} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \sqrt{2}P(0) = \sqrt{\hbar} \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ i\sqrt{1} & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 & -i\sqrt{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

- 1925: Mecánica matricial de Heisenberg
2025: Año Internacional de la Ciencia y la Tecnología Cuánticas
Cantidades físicas representadas por objetos tales que $XP \neq PX$

$$\sqrt{2}X(0) = \sqrt{\hbar} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \sqrt{2}P(0) = \sqrt{\hbar} \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ i\sqrt{1} & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 & -i\sqrt{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

- 1926: Mecánica ondulatoria de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t\Psi(t, \vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(t, \vec{x}) + V(x)\Psi(t, \vec{x})$$

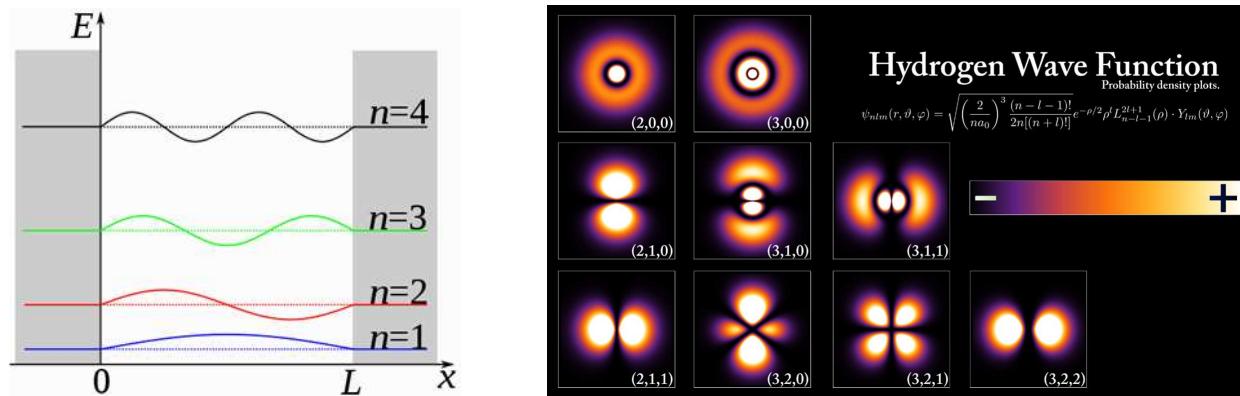


- 1925: Mecánica matricial de Heisenberg
2025: Año Internacional de la Ciencia y la Tecnología Cuánticas
Cantidades físicas representadas por objetos tales que $XP \neq PX$

$$\sqrt{2}X(0) = \sqrt{\hbar} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \sqrt{2}P(0) = \sqrt{\hbar} \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ i\sqrt{1} & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 & -i\sqrt{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

- 1926: Mecánica ondulatoria de Schrödinger

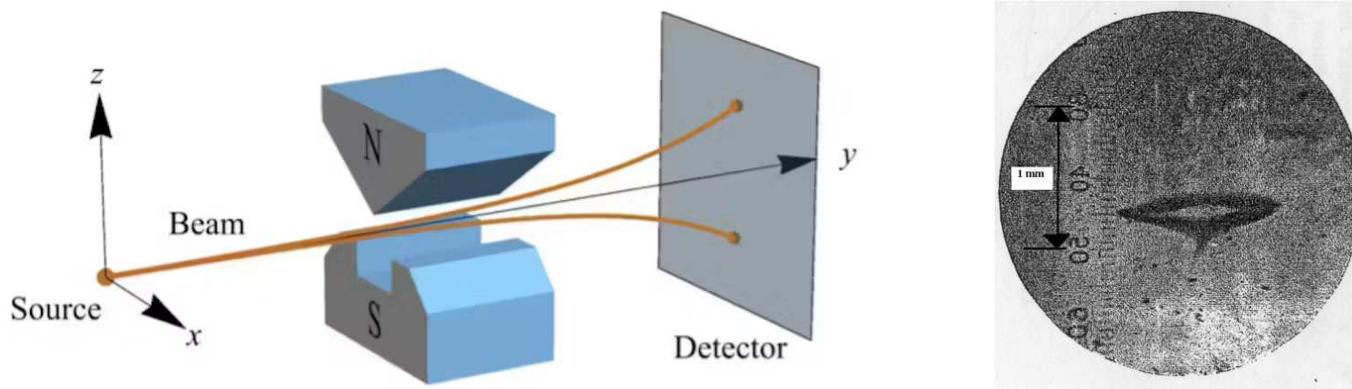
$$i\hbar\partial_t\Psi(t, \vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(t, \vec{x}) + V(x)\Psi(t, \vec{x})$$



- 1926: Dirac demostró la equivalencia de ambas formulaciones

3. Experimento de Stern-Gerlach

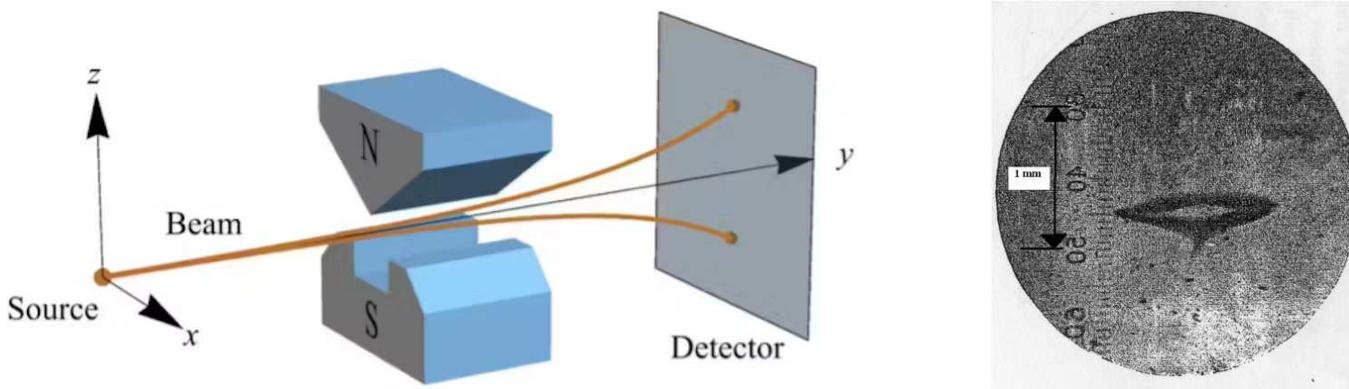
1922: Experimento con átomos de Ag neutros en campo magnético



Resultados sorprendentes:

3. Experimento de Stern-Gerlach

1922: Experimento con átomos de Ag neutros en campo magnético

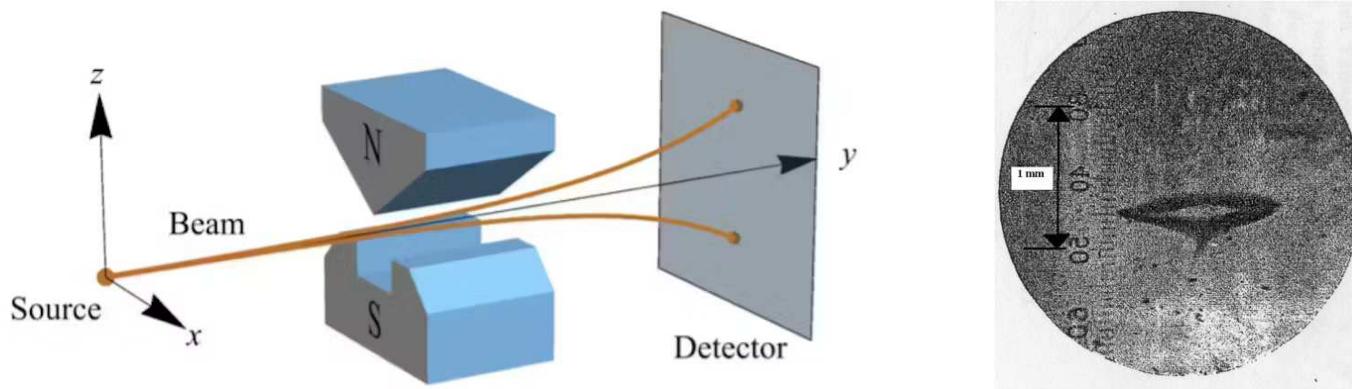


Resultados sorprendentes:

- Partículas neutras interaccionan con \vec{B} : **espín intrínseco**

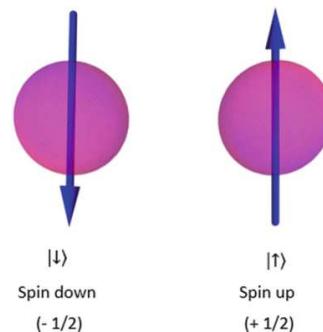
3. Experimento de Stern-Gerlach

1922: Experimento con átomos de Ag neutros en campo magnético

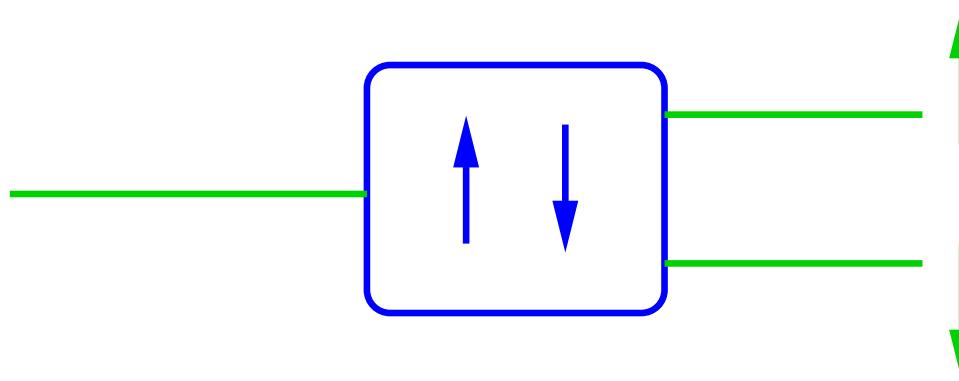


Resultados sorprendentes:

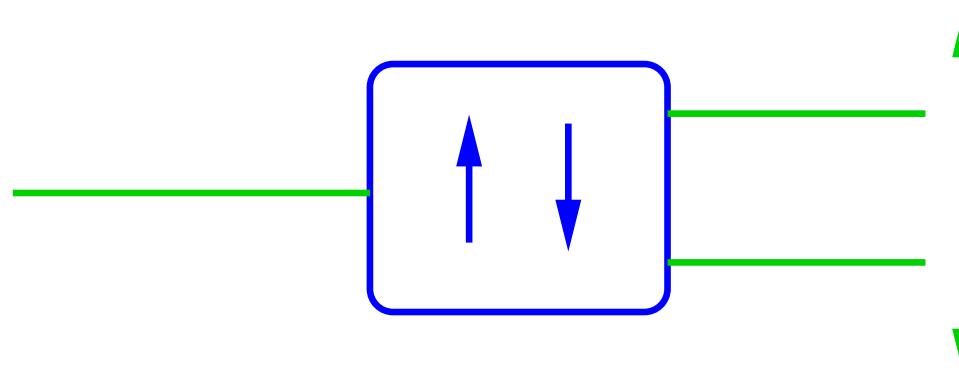
- Partículas neutras interaccionan con \vec{B} : **espín intrínseco**
- Dos haces discretas: **espín cuantizado**: \uparrow o \downarrow



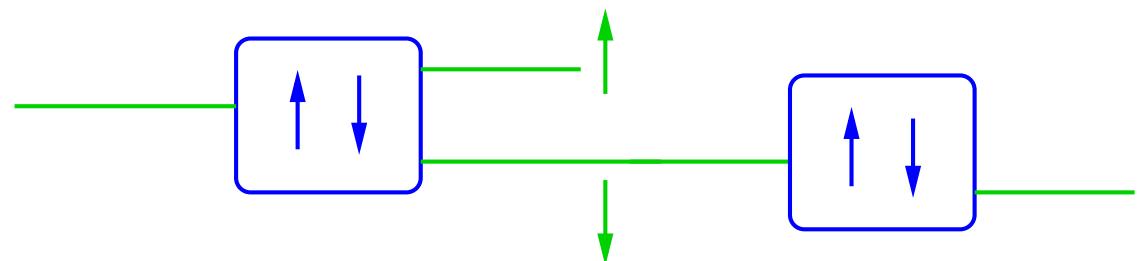
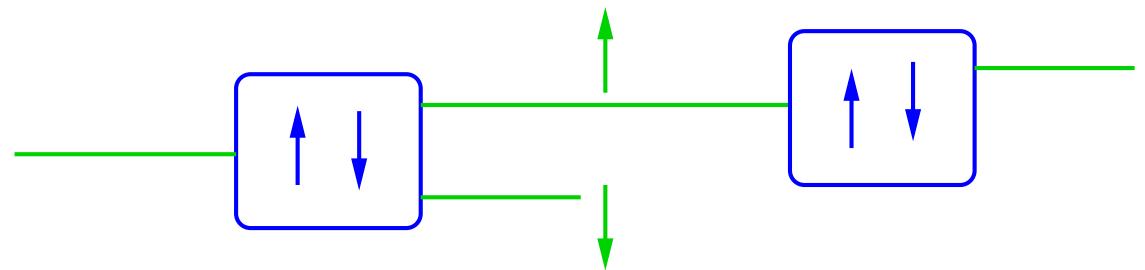
Experimento S-G es seleccionador de espín $\uparrow\downarrow$



Experimento S-G es seleccionador de espín $\uparrow\downarrow$

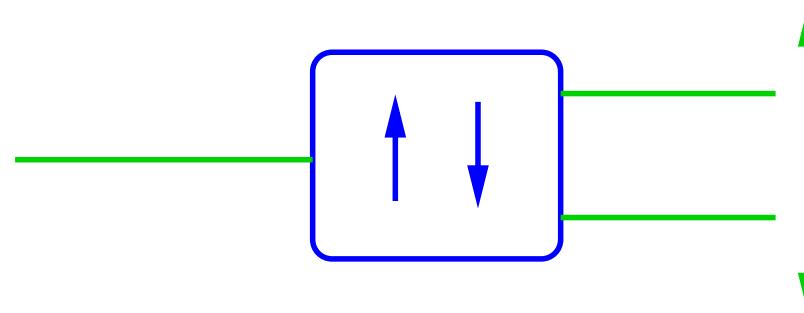
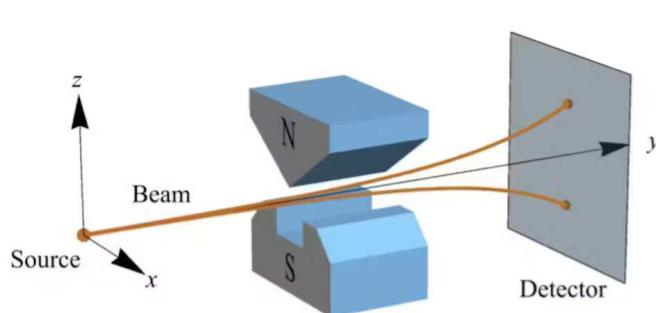


Experimento S-G es seleccionador con eficacia del 100 %

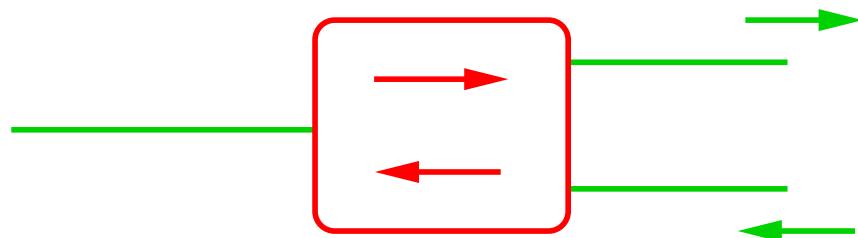
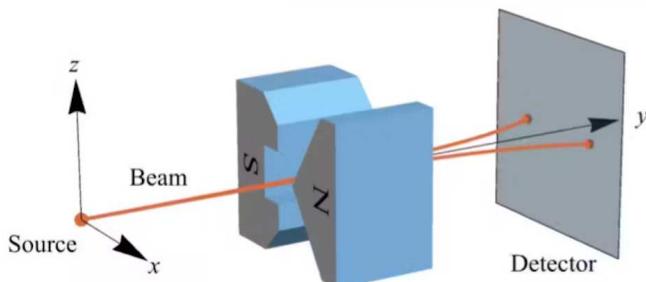


Orientación del experimento es irrelevante:

Campo magnético a lo largo de z : espín cuantizado: \uparrow o \downarrow

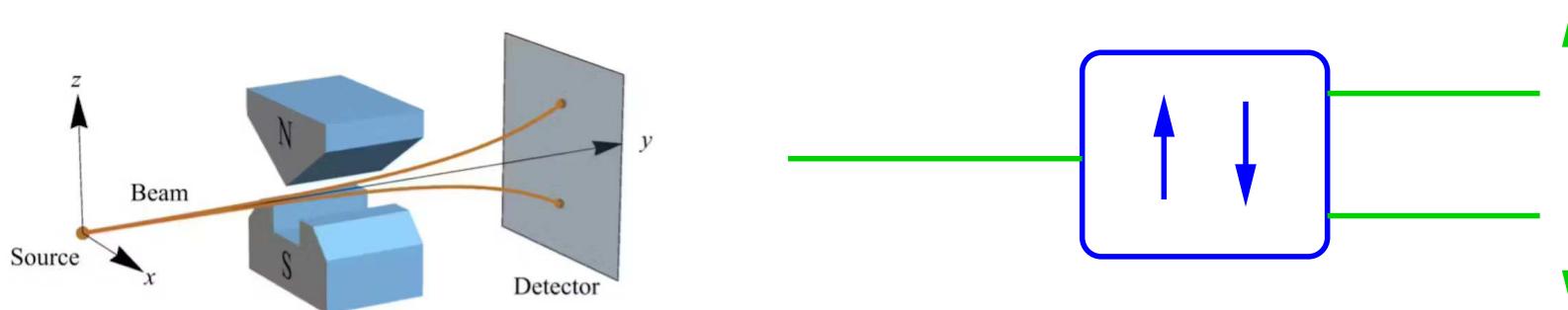


Campo magnético a lo largo de x : espín cuantizado: \rightarrow o \leftarrow



Orientación del experimento es irrelevante:

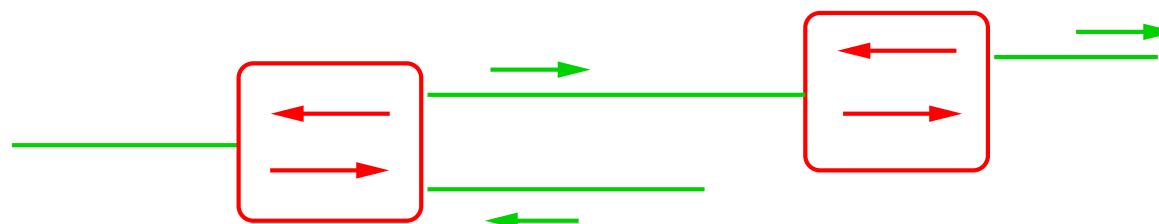
Campo magnético a lo largo de z : espín cuantizado: \uparrow o \downarrow



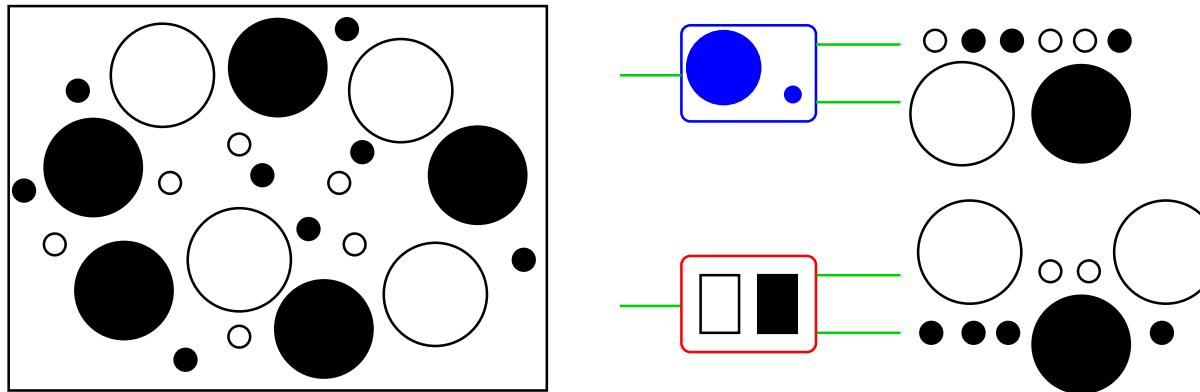
Campo magnético a lo largo de x : espín cuantizado: \rightarrow o \leftarrow



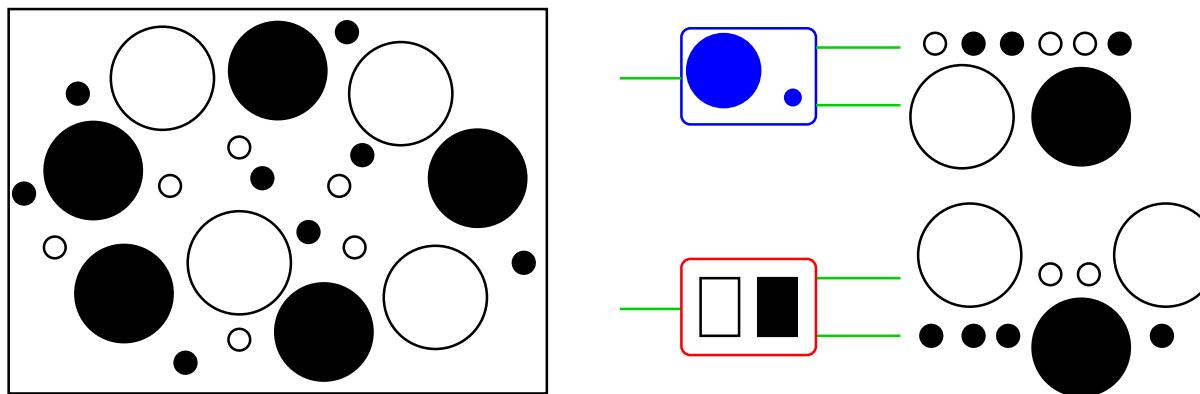
Seleccionador \Leftrightarrow con eficacia del 100 %



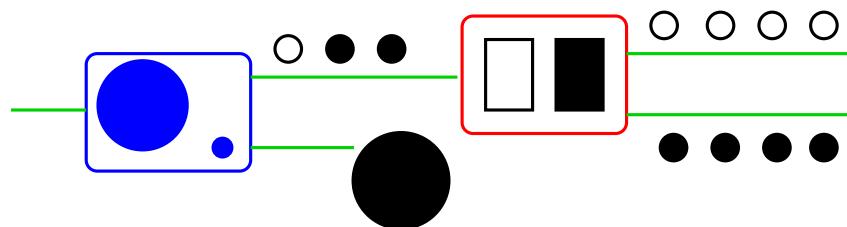
Analogía clásica: caja de bolas



Analogía clásica: caja de bolas

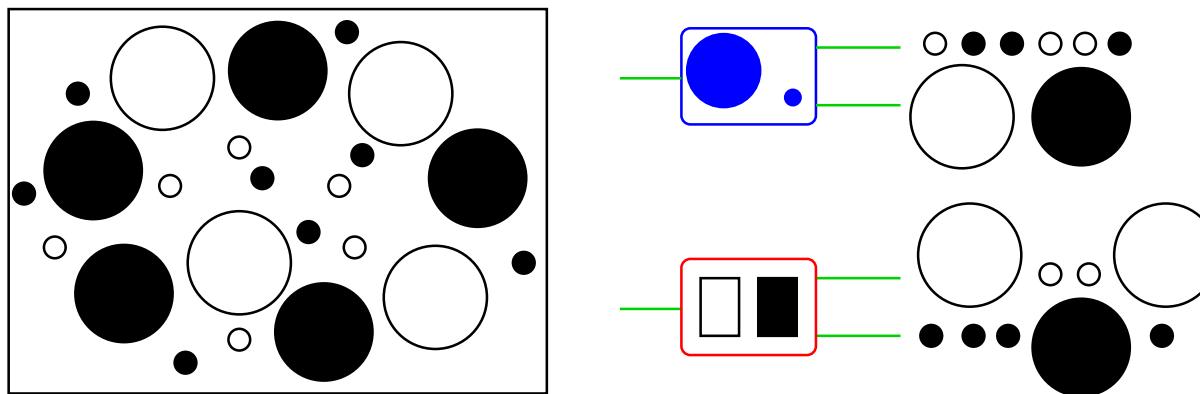


Combinando los distintos seleccionadores clásicos:

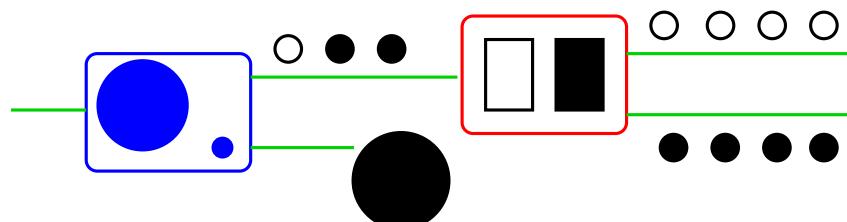


→ seleccionando bolas pequeñas y negras, obtengo las negras pequeñas

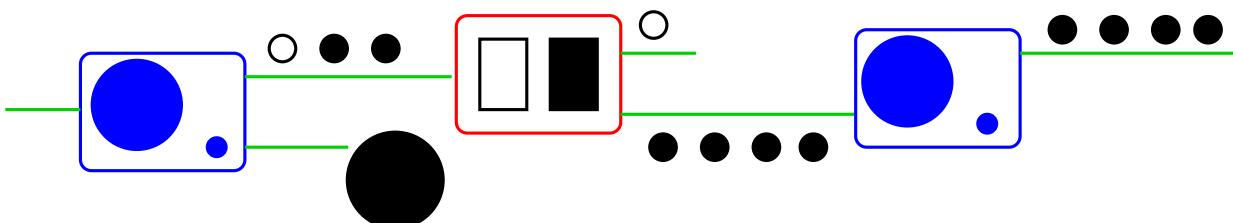
Analogía clásica: caja de bolas



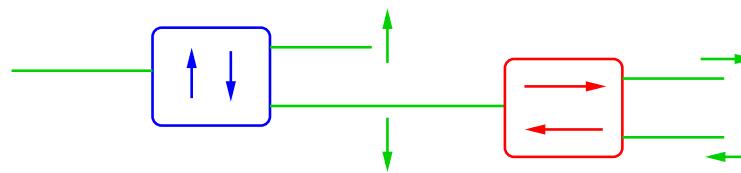
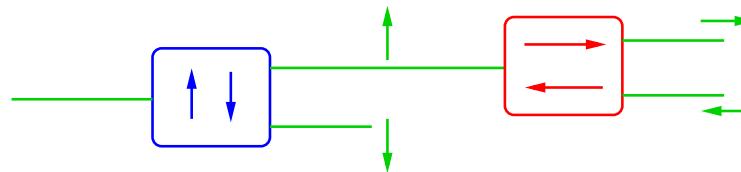
Combinando los distintos seleccionadores clásicos:



→ seleccionando bolas pequeñas y negras, obtengo las negras pequeñas



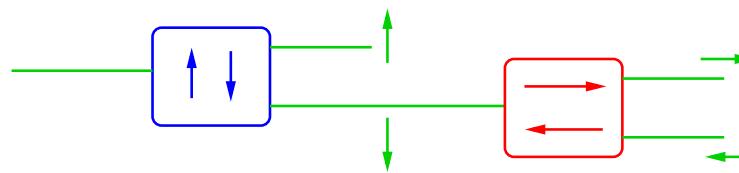
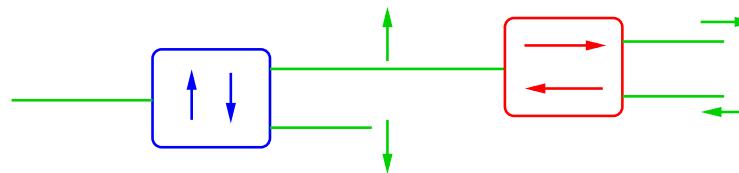
Combinando seleccionadores cuánticos:



\uparrow "contiene" 50 % de \rightarrow y 50 % de \leftarrow

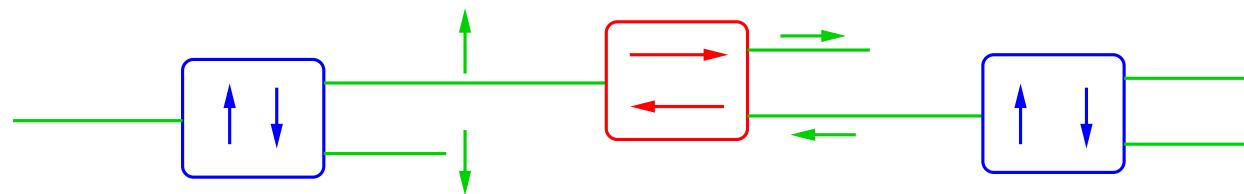
\downarrow "contiene" 50 % de \rightarrow y 50 % de \leftarrow

Combinando seleccionadores cuánticos:



↑ “contiene” 50 % de → y 50 % de ←

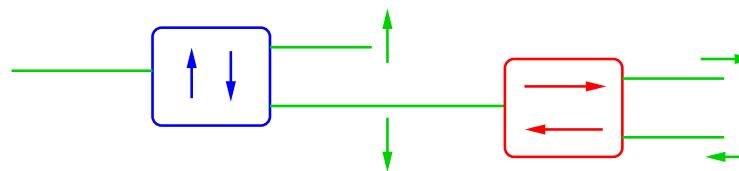
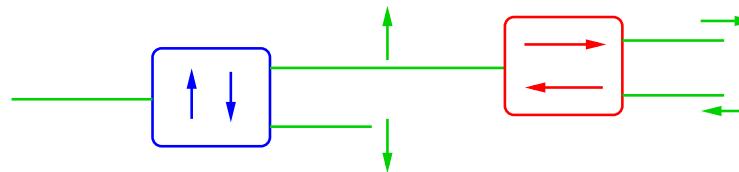
↓ “contiene” 50 % de → y 50 % de ←



→ “contiene” 50 % de ↑ y 50 % de ↓

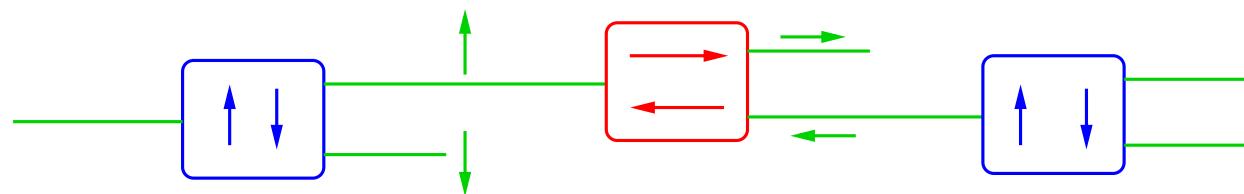
← “contiene” 50 % de ↑ y 50 % de ↓

Combinando seleccionadores cuánticos:



\uparrow "contiene" 50 % de \rightarrow y 50 % de \leftarrow

\downarrow "contiene" 50 % de \rightarrow y 50 % de \leftarrow

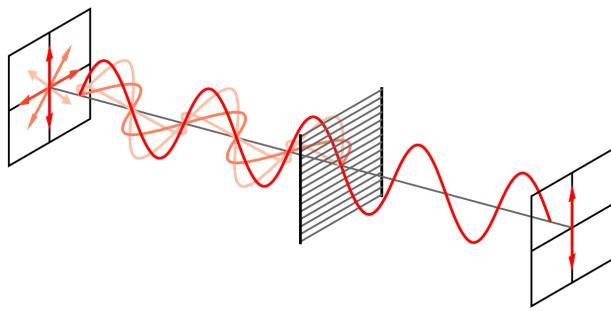


\rightarrow "contiene" 50 % de \uparrow y 50 % de \downarrow

\leftarrow "contiene" 50 % de \uparrow y 50 % de \downarrow

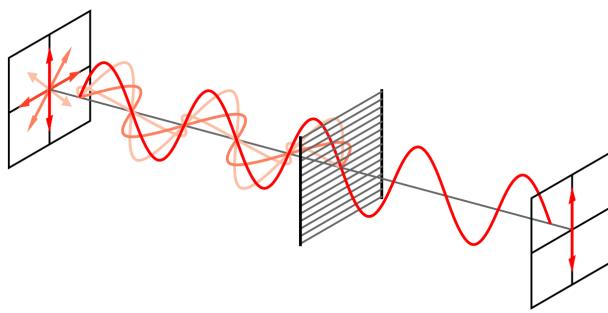
$\uparrow\downarrow$ y \Leftrightarrow no tienen existencias simultáneas

Experimento casero con gafas polarizadas



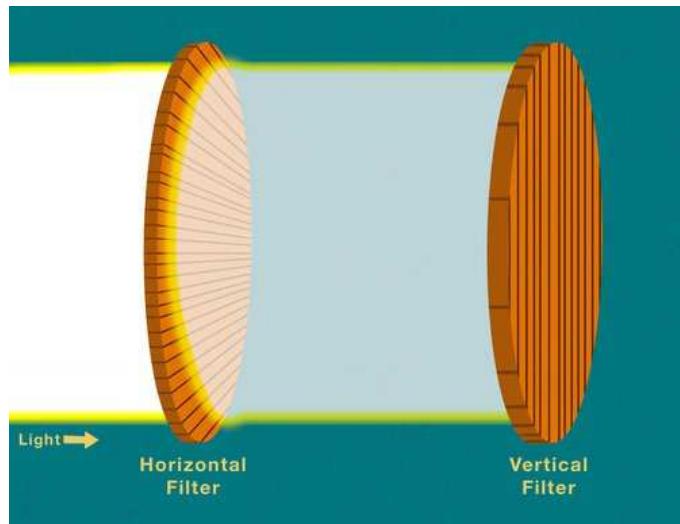
Filtro polarizado solo deja pasar una polarización: 50 % transmitida

Experimento casero con gafas polarizadas

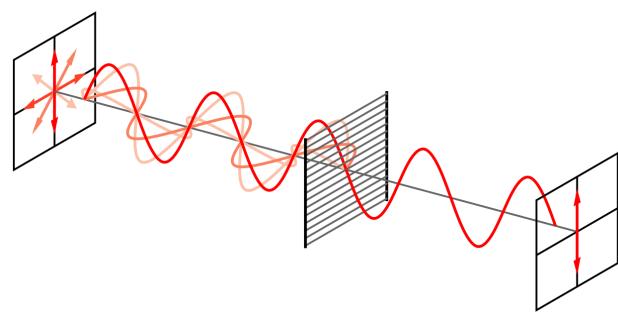


Filtro polarizado solo deja pasar una polarización: 50 % transmitida

Dos filtros ortogonales quitan ambas polarizaciones: 0 % transmitida

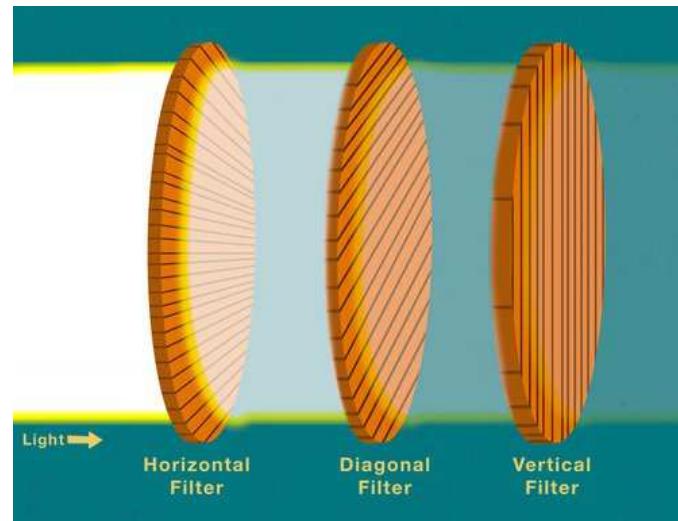
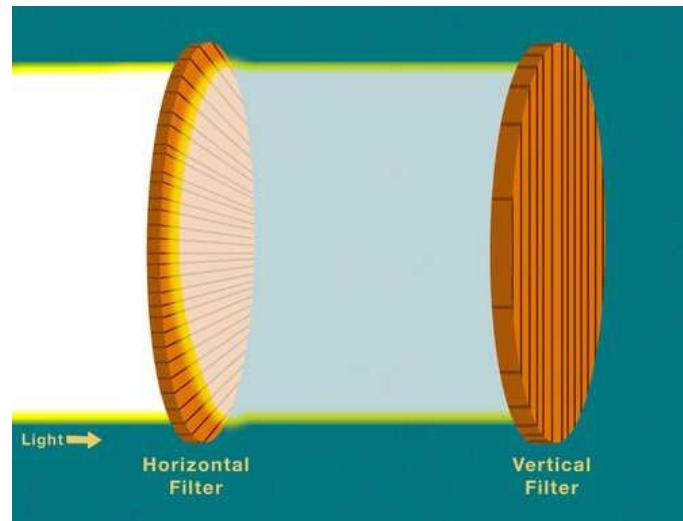


Experimento casero con gafas polarizadas



Filtro polarizado solo deja pasar una polarización: 50 % transmitida

Dos filtros ortogonales quitan ambas polarizaciones: 0 % transmitida



Tercer filtro diagonal intermedio sí deja pasar luz: 12,5 % transmitida

4. Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado I: Un **sistema cuántico** está representado por un **espacio de Hilbert complejo separable** \mathcal{H} . Un **estado cuántico** es un **vector normalizado** $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$.

4. Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado I: Un **sistema cuántico** está representado por un **espacio de Hilbert complejo separable** \mathcal{H} . Un **estado cuántico** es un **vector normalizado** $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Recuerda:

- Espacio de Hilbert = espacio vectorial con producto escalar

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |e_n\rangle, \quad |\Phi\rangle = \sum_n b_n |e_n\rangle, \quad b_n, c_n \in \mathbb{C}$$
$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_n b_n^* c_n \in \mathbb{C}$$

- Separable: admite base ortonormal numerable

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |e_n\rangle, \quad \langle e_m | e_n \rangle = \delta_{mn}$$

4. Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado I: Un sistema cuántico está representado por un espacio de Hilbert complejo separable \mathcal{H} . Un estado cuántico es un vector normalizado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Postulado II: Un observable físico \mathcal{A} está representado por un operador hermítico A in \mathcal{H} . Los posibles valores de \mathcal{A} son los autovalores λ de A .

4. Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado I: Un **sistema cuántico** está representado por un **espacio de Hilbert complejo separable** \mathcal{H} . Un **estado cuántico** es un **vector normalizado** $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Postulado II: Un **observable físico** \mathcal{A} está representado por un **operador hermítico** A in \mathcal{H} . Los **posibles valores** de \mathcal{A} son los **autovalores** λ de A .

Recuerda:

- $|a\rangle$ es autovector de A con autovalor $\lambda \iff A|a\rangle = \lambda|a\rangle$
- A^\dagger es operador adjunto de $A \iff \langle\Phi|A\Psi\rangle = \langle A^\dagger\Phi|\Psi\rangle$
- A es operador hermítico (auto-adjunto) $\iff A = A^\dagger$

4. Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado I: Un **sistema cuántico** está representado por un **espacio de Hilbert complejo separable** \mathcal{H} . Un **estado cuántico** es un **vector normalizado** $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Postulado II: Un **observable físico** \mathcal{A} está representado por un **operador hermítico** A in \mathcal{H} . Los **posibles valores** de \mathcal{A} son los **autovalores** λ de A .

Recuerda:

- $|a\rangle$ es autovector de A con autovalor $\lambda \iff A|a\rangle = \lambda|a\rangle$
- A^\dagger es operador adjunto de $A \iff \langle\Phi|A\Psi\rangle = \langle A^\dagger\Phi|\Psi\rangle$
- A es operador hermítico (auto-adjunto) $\iff A = A^\dagger$
- A es operador hermítico \implies autovalores $\lambda \in \mathbb{R}$
- Autovectores $\{|a_n\rangle\}$ forman base ortonormal completa

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |a_n\rangle, \quad \langle a_m | a_n \rangle = \delta_{mn}$$

4. Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado I: Un sistema cuántico está representado por un espacio de Hilbert complejo separable \mathcal{H} . Un estado cuántico es un vector normalizado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Postulado II: Un observable físico \mathcal{A} está representado por un operador hermítico A in \mathcal{H} . Los posibles valores de \mathcal{A} son los autovalores λ de A .

Postulado III: En una medida, la probabilidad de medir valor λ_k en un estado $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle$ viene dada por $P(\lambda_k) = |\langle a_k | \Psi \rangle|^2 = |c_k|^2$. Tras la medida de λ_k , la función de onda se proyecta al subespacio generado por $|a_k\rangle$.

4. Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado I: Un sistema cuántico está representado por un espacio de Hilbert complejo separable \mathcal{H} . Un estado cuántico es un vector normalizado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Postulado II: Un observable físico \mathcal{A} está representado por un operador hermítico A in \mathcal{H} . Los posibles valores de \mathcal{A} son los autovalores λ de A .

Postulado III: En una medida, la probabilidad de medir valor λ_k en un estado $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle$ viene dada por $P(\lambda_k) = |\langle a_k | \Psi \rangle|^2 = |c_k|^2$. Tras la medida de λ_k , la función de onda se proyecta al subespacio generado por $|a_k\rangle$.

Obsérvese:

- Mecánica Cuántica solo predice probabilidades
- $|\Psi\rangle$ es vector normalizado $\implies \sum_n |c_n|^2 = 1$
- $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle \xrightarrow{\lambda_k} |\Psi\rangle = |a_k\rangle$

4. Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado I: Un sistema cuántico está representado por un espacio de Hilbert complejo separable \mathcal{H} . Un estado cuántico es un vector normalizado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Postulado II: Un observable físico \mathcal{A} está representado por un operador hermítico A in \mathcal{H} . Los posibles valores de \mathcal{A} son los autovalores λ de A .

Postulado III: En una medida, la probabilidad de medir valor λ_k en un estado $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle$ viene dada por $P(\lambda_k) = |\langle a_k | \Psi \rangle|^2 = |c_k|^2$. Tras la medida de λ_k , la función de onda se proyecta al subespacio generado por $|a_k\rangle$.

Postulado IV: La evolución del sistema se rige por la ecn de Schrödinger:

$$i\hbar \partial_t |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle$$

4. Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado I: Un **sistema cuántico** está representado por un **espacio de Hilbert complejo separable** \mathcal{H} . Un **estado cuántico** es un **vector normalizado** $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Postulado II: Un **observable físico** \mathcal{A} está representado por un **operador hermítico** A in \mathcal{H} . Los **posibles valores** de \mathcal{A} son los **autovalores** λ de A .

Postulado III: En una medida, la **probabilidad de medir valor** λ_k en un **estado** $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle$ viene dada por $P(\lambda_k) = |\langle a_k | \Psi \rangle|^2 = |c_k|^2$. Tras la medida de λ_k , la función de onda se **proyecta** al **subespacio** generado por $|a_k\rangle$.

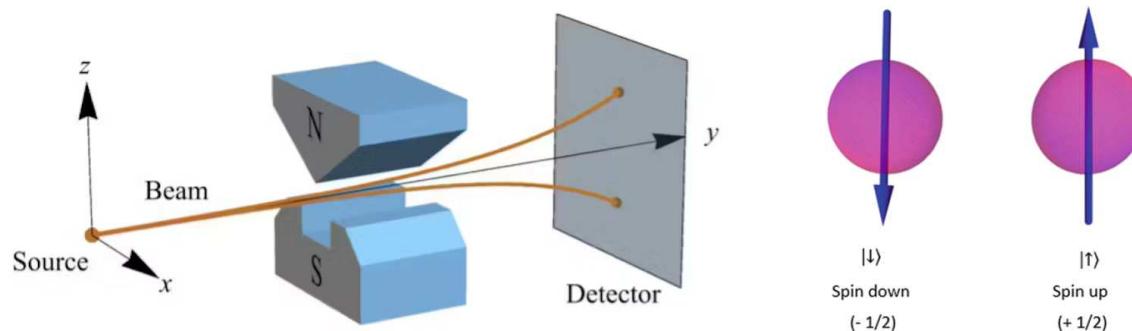
Postulado IV: La **evolución** del sistema se rige por la **ecn de Schrödinger**:

$$i\hbar \partial_t |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle \quad \Rightarrow \quad |\Psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle$$

Obsérvese:

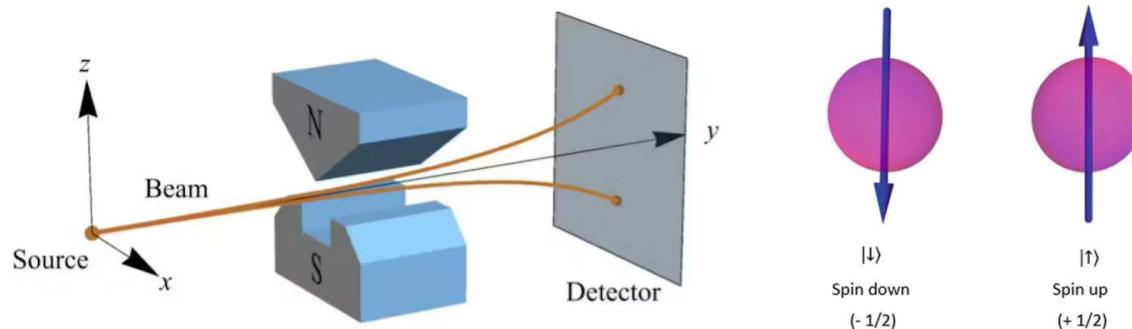
- $H = T + V$ es Hamiltoniano
- $|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |a_n\rangle$

5. Sistemas de dimensión finita: S-G



- 2 posibles estados de espín \iff Espacio de Hilbert 2-dim $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

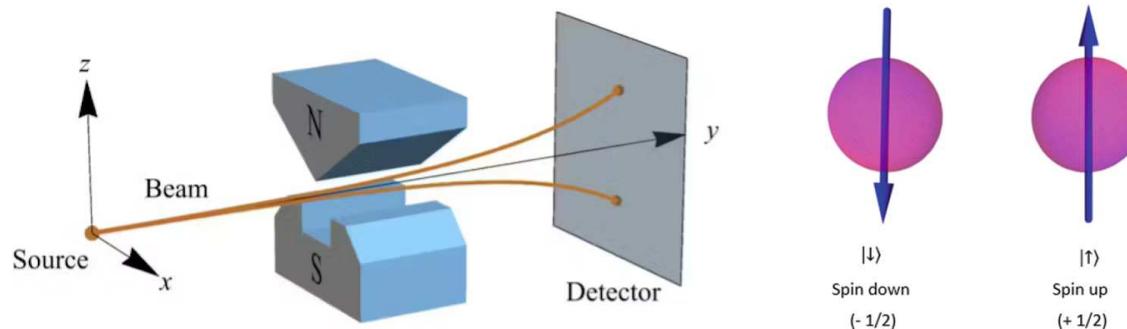
5. Sistemas de dimensión finita: S-G



- 2 posibles estados de espín \iff Espacio de Hilbert 2-dim $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$
- Espín en direcciones x, y, z \iff Matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Sistemas de dimensión finita: S-G



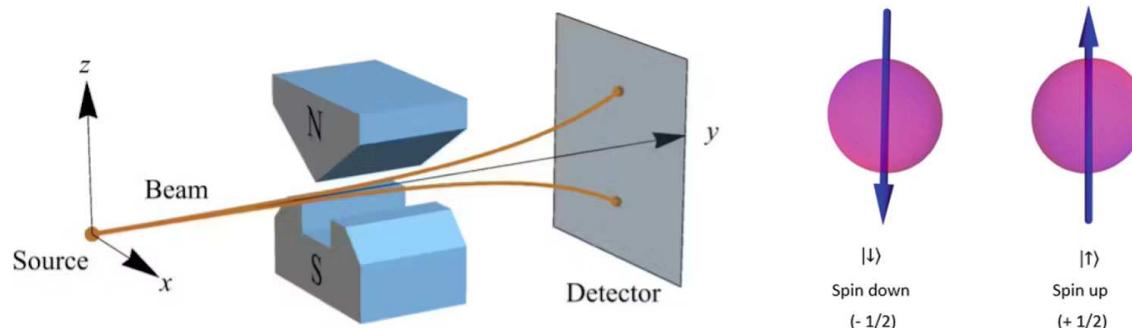
- 2 posibles estados de espín \iff Espacio de Hilbert 2-dim $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$
- Espín en direcciones x, y, z \iff Matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Recuérdese:

- 3 matrices 2×2 hermíticas, sin traza
- Generadores de $SU(2)$: $[\sigma_i, \sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\sigma_k$
- $\{\mathbb{1}_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ es base completa de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$
- Representación de cuaterniones $\{1, i, j, k\}$

5. Sistemas de dimensión finita: S-G



- 2 posibles estados de espín \iff Espacio de Hilbert 2-dim $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$
- Espín en direcciones x, y, z \iff Matrices de Pauli

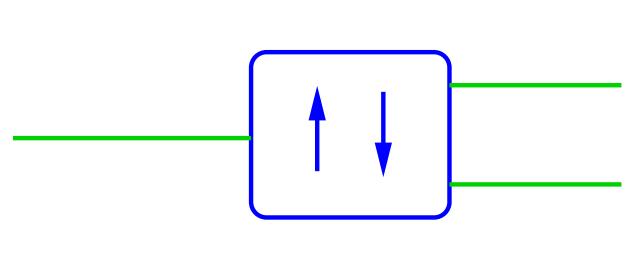
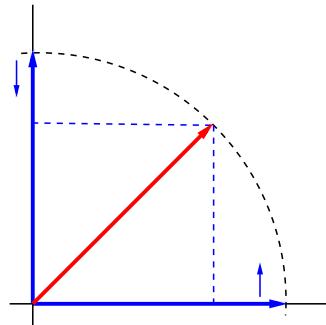
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Autovectores de σ_z : $|\uparrow\rangle$ con autovalor 1 y $|\downarrow\rangle$ con autovalor -1

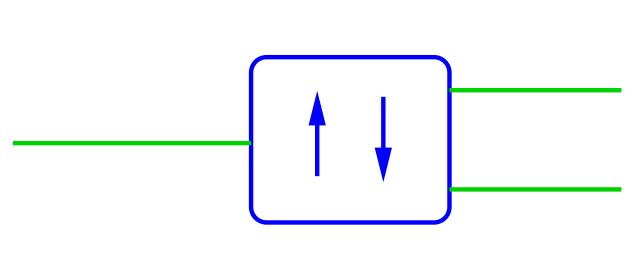
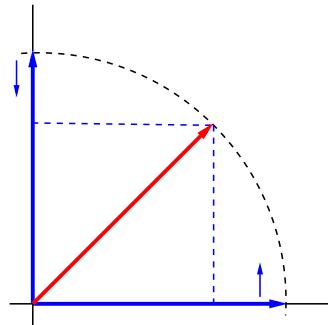
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\implies únicas mediciones posibles son $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$ y $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$

- $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ forman base ortonormal de \mathbb{C}^2 : $|\Psi\rangle = c_+|\uparrow\rangle + c_-|\downarrow\rangle$
En general, $|\Psi\rangle$ está en superposición de $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$
→ espín no determinado hasta que se mida
→ al medir $|\Psi\rangle$ se proyecta en $|\uparrow\rangle$ o $|\downarrow\rangle$



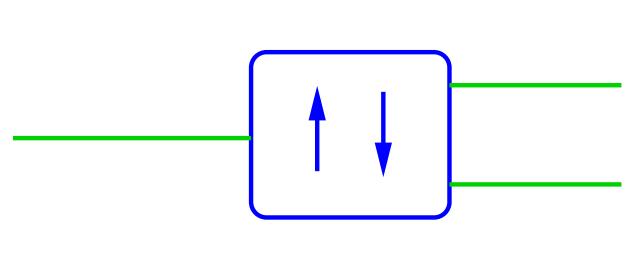
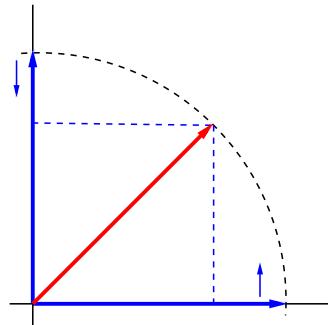
- $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ forman base ortonormal de \mathbb{C}^2 : $|\Psi\rangle = c_+|\uparrow\rangle + c_-|\downarrow\rangle$
 En general, $|\Psi\rangle$ está en superposición de $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$
 - espín no determinado hasta que se mida
 - al medir $|\Psi\rangle$ se proyecta en $|\uparrow\rangle$ o $|\downarrow\rangle$



- En estado $|\Psi\rangle = c_+|\uparrow\rangle + c_-|\downarrow\rangle$:
 - probabilidad $|c_+|^2$ de proyectar en $|\uparrow\rangle$ y medir $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$
 - probabilidad $|c_-|^2$ de proyectar en $|\downarrow\rangle$ y medir $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$

¡El hecho de medir cambia la realidad!

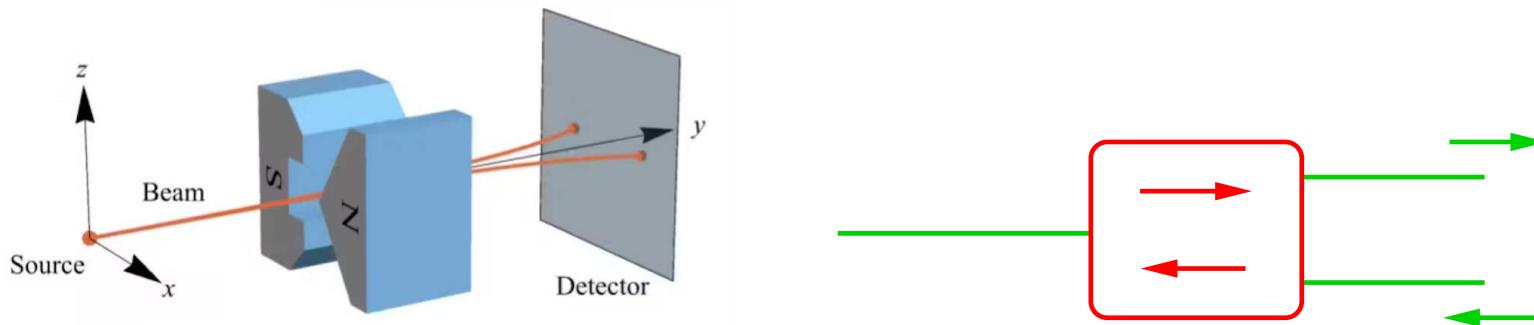
- $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ forman base ortonormal de \mathbb{C}^2 : $|\Psi\rangle = c_+|\uparrow\rangle + c_-|\downarrow\rangle$
 En general, $|\Psi\rangle$ está en superposición de $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$
 \rightarrow espín no determinado hasta que se mida
 \rightarrow al medir $|\Psi\rangle$ se proyecta en $|\uparrow\rangle$ o $|\downarrow\rangle$



- En estado $|\Psi\rangle = c_+|\uparrow\rangle + c_-|\downarrow\rangle$:
 - \rightarrow probabilidad $|c_+|^2$ de proyectar en $|\uparrow\rangle$ y medir $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$
 - \rightarrow probabilidad $|c_-|^2$ de proyectar en $|\downarrow\rangle$ y medir $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$

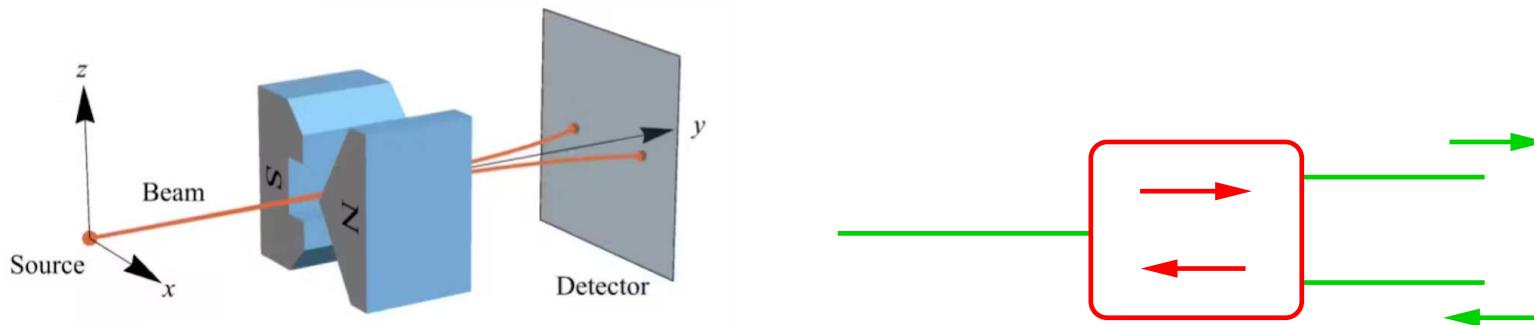
¡El hecho de medir cambia la realidad!
- **100 % eficacia:** en estado $|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle$:
 - \rightarrow probabilidad 1 de proyectar en $|\uparrow\rangle$ y medir $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$
 - \rightarrow probabilidad 0 de proyectar en $|\downarrow\rangle$ y medir $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$

- Campo magnético en dirección x \iff operador hermítico σ_x



$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Campo magnético en dirección $x \iff$ operador hermítico σ_x



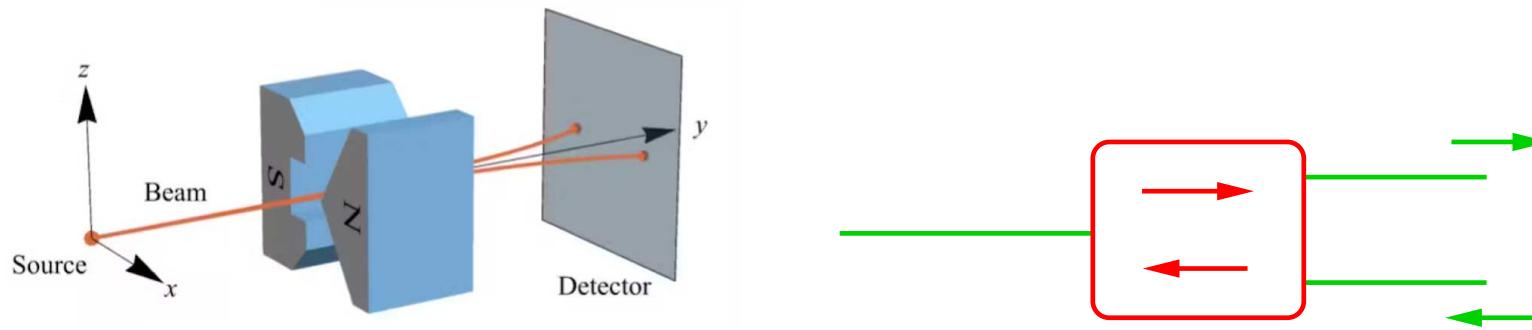
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Autovectores de σ_x : $| \rightarrow \rangle$ con autovalor 1 y $| \leftarrow \rangle$ con autovalor -1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

\implies únicas mediciones posibles son $S_x = +\frac{1}{2}\hbar$ y $S_x = -\frac{1}{2}\hbar$

- Campo magnético en dirección $x \iff$ operador hermítico σ_x



$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

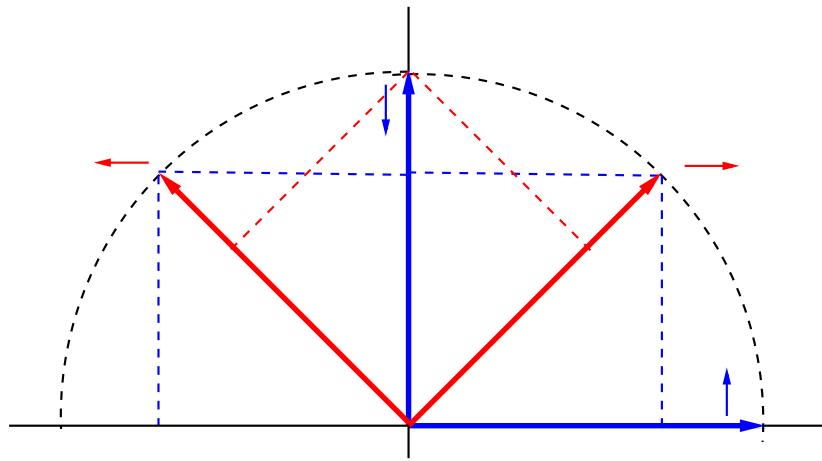
- Autovectores de σ_x : $|\rightarrow\rangle$ con autovalor 1 y $|\leftarrow\rangle$ con autovalor -1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

\implies únicas mediciones posibles son $S_x = +\frac{1}{2}\hbar$ y $S_x = -\frac{1}{2}\hbar$

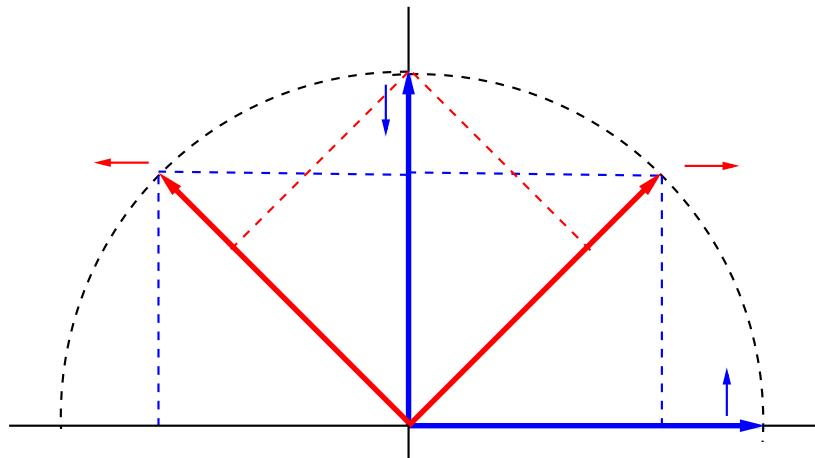
- $|\rightarrow\rangle$ y $|\leftarrow\rangle$ forman base ortonormal de \mathbb{C}^2 : $|\Psi\rangle = b_+|\rightarrow\rangle + b_-|\leftarrow\rangle$

- Tanto $\{| \uparrow \rangle, | \downarrow \rangle\}$ como $\{| \rightarrow \rangle, | \leftarrow \rangle\}$ forman bases ortonormales de \mathbb{C}^2 :
 → se pueden expresar unos en términos de otros



$$\begin{aligned}
 | \rightarrow \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (| \downarrow \rangle + | \uparrow \rangle) \\
 | \leftarrow \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (| \downarrow \rangle - | \uparrow \rangle) \\
 | \uparrow \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (| \rightarrow \rangle - | \leftarrow \rangle) \\
 | \downarrow \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (| \rightarrow \rangle + | \leftarrow \rangle)
 \end{aligned}$$

- Tanto $\{| \uparrow \rangle, | \downarrow \rangle\}$ como $\{| \rightarrow \rangle, | \leftarrow \rangle\}$ forman bases ortonormales de \mathbb{C}^2 :
→ se pueden expresar unos en términos de otros



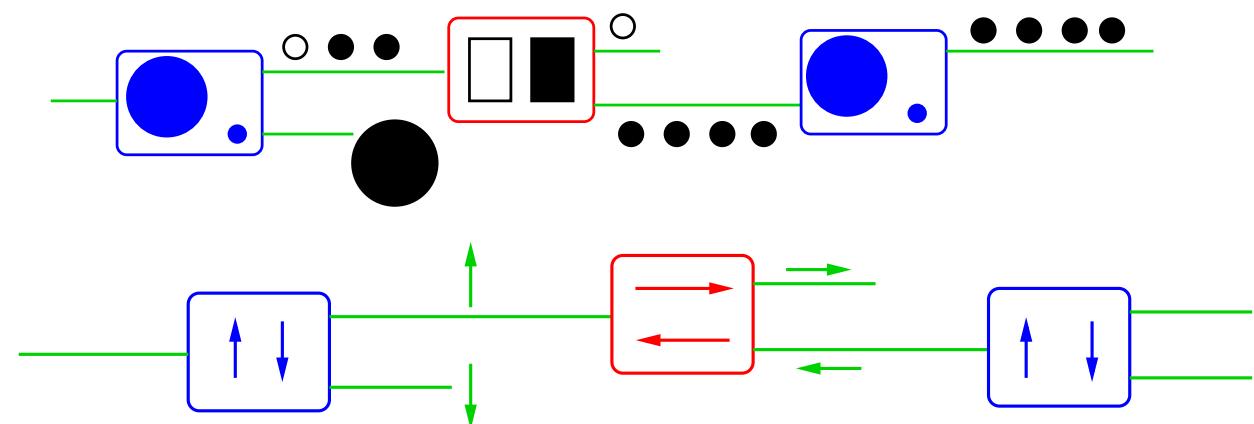
$$| \rightarrow \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| \downarrow \rangle + | \uparrow \rangle)$$

$$| \leftarrow \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| \downarrow \rangle - | \uparrow \rangle)$$

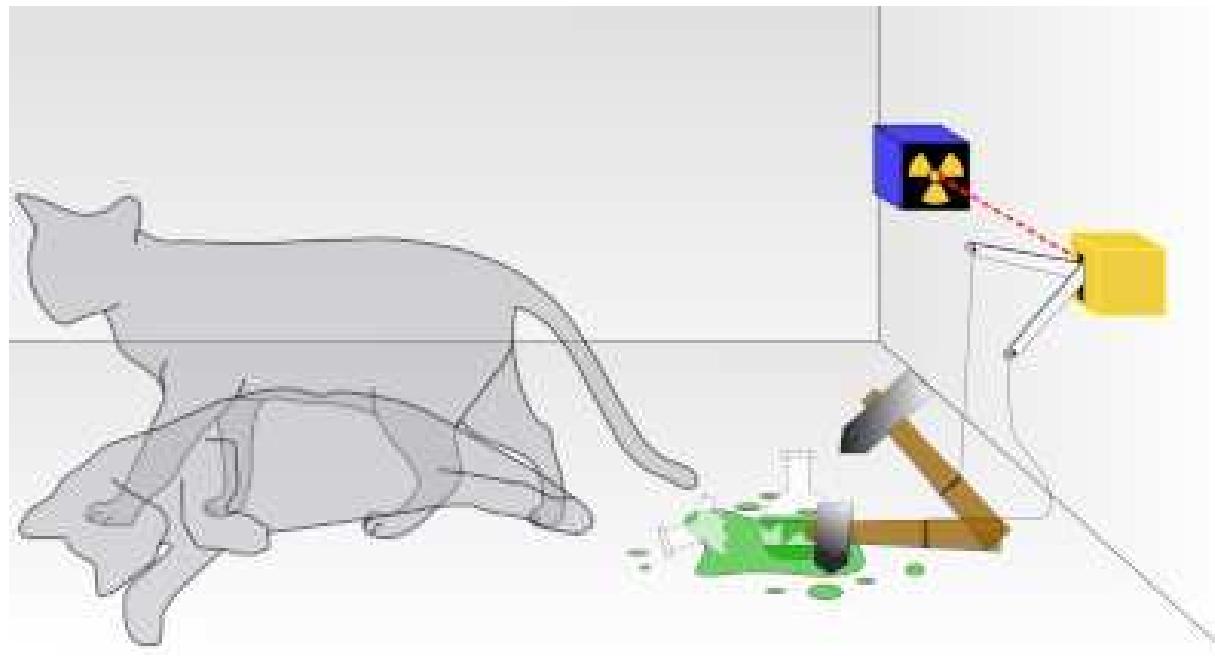
$$| \uparrow \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| \rightarrow \rangle - | \leftarrow \rangle)$$

$$| \downarrow \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| \rightarrow \rangle + | \leftarrow \rangle)$$

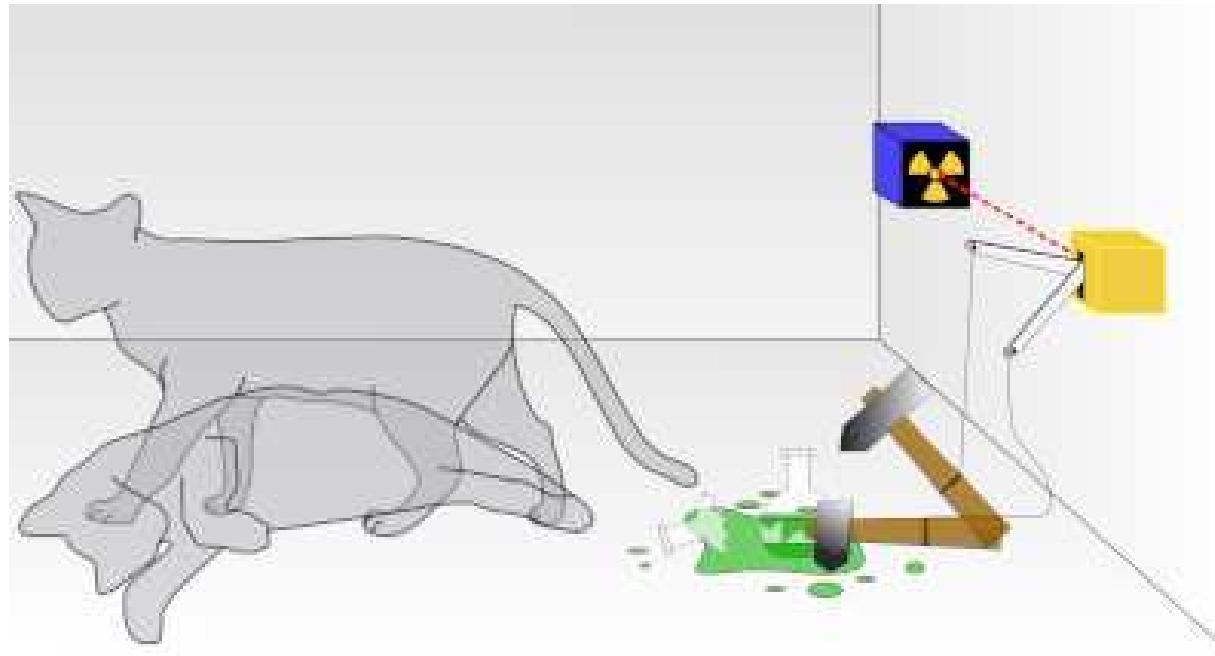
- Analogía clásica no funciona: superposición cuántica!
 $\uparrow\downarrow$ y $\leftarrow\rightleftharpoons$ no tienen existencia simultánea



Gato de Schrödinger: ¿superposición de estados?



Gato de Schrödinger: ¿superposición de estados?



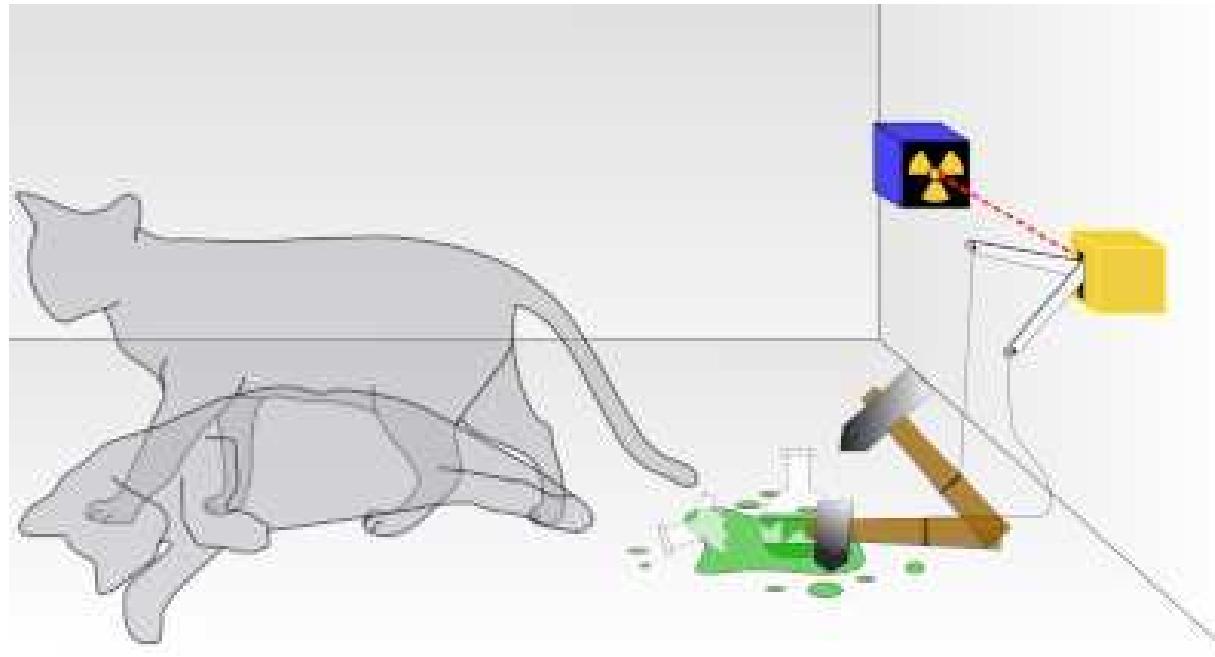
Átomo radioactivo, frasco con veneno y gato encerrados en una caja

$$|^{235}\text{U}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\bullet\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\circ\rangle$$

$$\Rightarrow |\text{frasco}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{intacto}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{roto}\rangle$$

$$\Rightarrow |\text{gato}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{vivo}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{muerto}\rangle$$

Gato de Schrödinger: ¿superposición de estados?



Átomo radioactivo, frasco con veneno y gato encerrados en una caja

$$|^{235}\text{U}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\bullet\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\circ\rangle$$

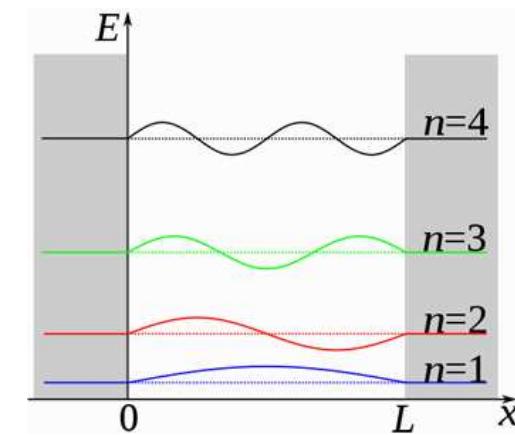
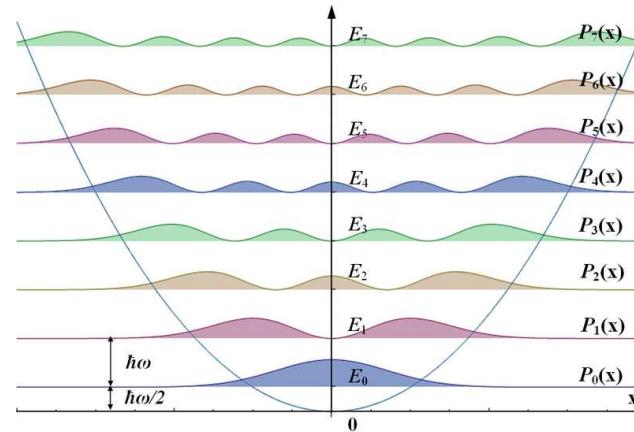
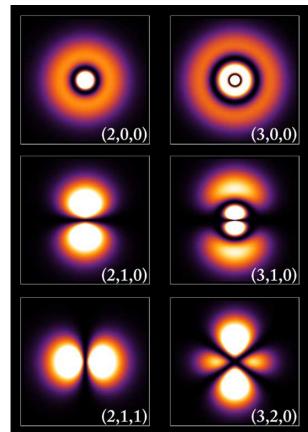
$$\Rightarrow |\text{frasco}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{intacto}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{roto}\rangle$$

$$\Rightarrow |\text{gato}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{vivo}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{muerto}\rangle$$

Decoherencia: interacciones con ambiente → comportamiento clásico

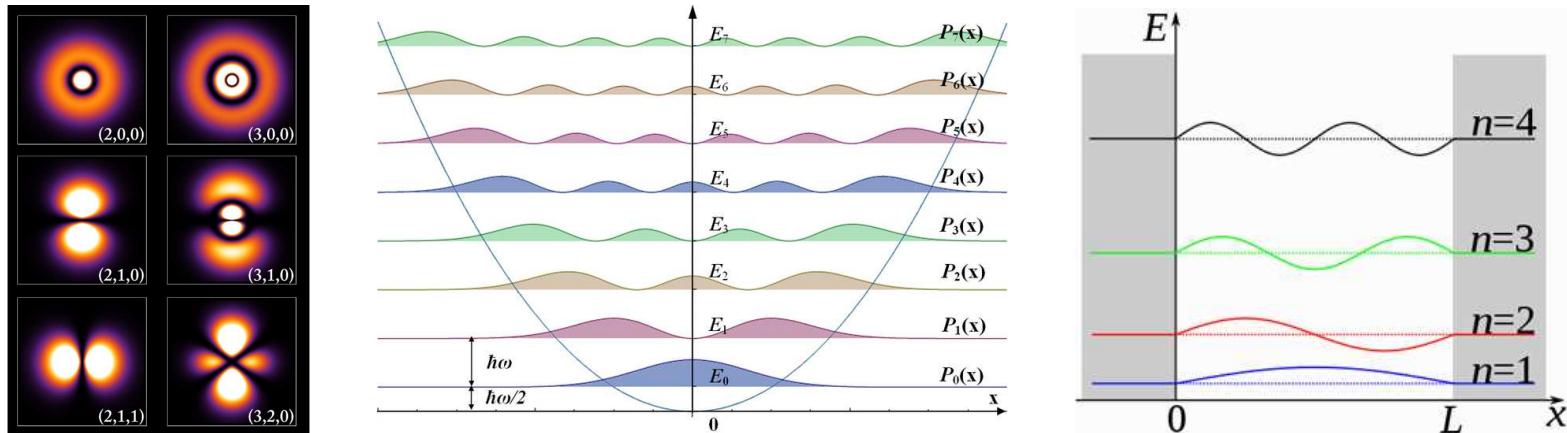
6. Sistemas de dimensión infinita

- Átomo de hidrógeno, oscilador armónico, pozo cuadrado, ... :
Sistemas cuatizados con infinitos niveles de energía



6. Sistemas de dimensión infinita

- Átomo de hidrógeno, oscilador armónico, pozo cuadrado, ... :
Sistemas cuatizados con infinitos niveles de energía

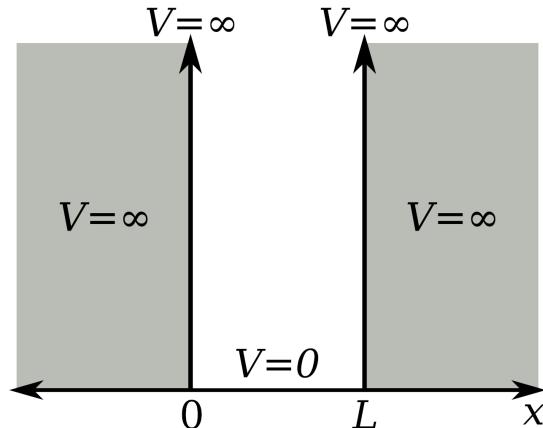


- Espacios de Hilbert de dimensión infinita
 $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2([a, b], \mathbb{C})$: funciones cuadráticamente integrables en $[a, b]$

$$\|\Psi\|^2 = \int_a^b |\Psi(x)|^2 dV < \infty$$

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int_a^b \Phi^*(x) \Psi(x) dV$$

- Partícula en pozo cuadrado: $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2([0, L], \mathbb{C})$:

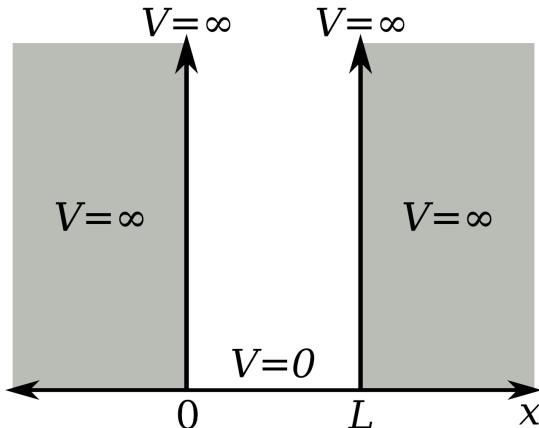


Autofunciones de $H = -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$:

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E\Psi(x)$$

$$\text{con } \Psi(0) = \Psi(L) = 0$$

- Partícula en pozo cuadrado: $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2([0, L], \mathbb{C})$:



Autofunciones de $H = -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$:

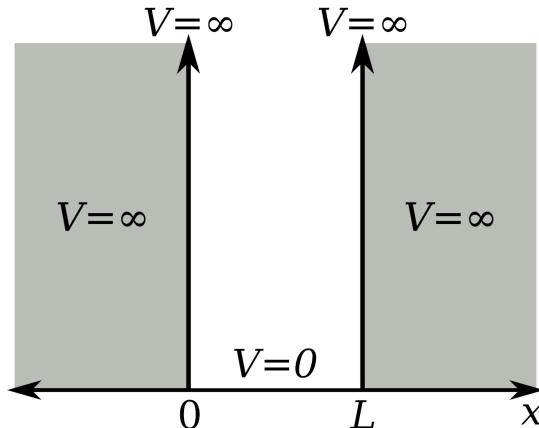
$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E\Psi(x)$$

$$\text{con } \Psi(0) = \Psi(L) = 0$$

- Solución:

$$\Psi(x) = A \sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right) + B \cos\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)$$

- Partícula en pozo cuadrado: $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2([0, L], \mathbb{C})$:



Autofunciones de $H = -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$:

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E\Psi(x)$$

$$\text{con } \Psi(0) = \Psi(L) = 0$$

- Solución:

$$\Psi(x) = A \sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right) + B \cos\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right)$$

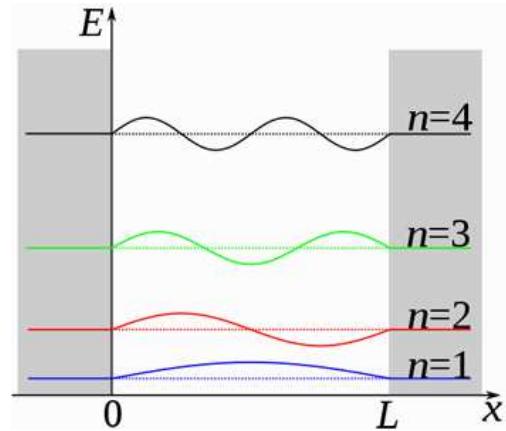
- Cuantización por condiciones de contorno:

$$\Psi(0) = 0 \iff B = 0$$

$$\Psi(L) = 0 \iff \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} L = n\pi$$

$$\iff E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$$

- Pozo cuadrado cuantizado: N_0 autovectores



$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

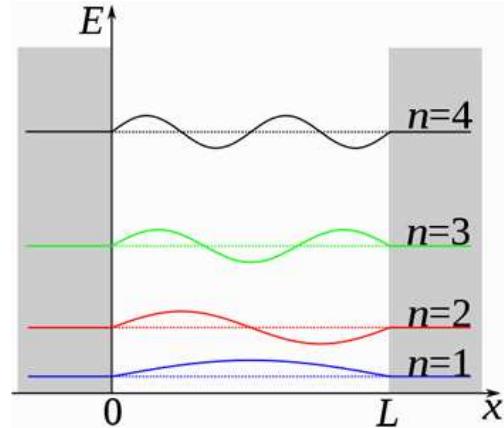
$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$$

→ solo ondas con $\lambda = \frac{1}{2}nL$

→ Problema muy parecido a vibraciones de una cuerda

NB: Estado fundamental: $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / (2mL^2) \neq 0$

- Pozo cuadrado cuantizado: N_0 autovectores



$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$$

→ solo ondas con $\lambda = \frac{1}{2}nL$

→ Problema muy parecido a vibraciones de una cuerda

NB: Estado fundamental: $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / (2mL^2) \neq 0$

- $\psi_n(x)$ forman **base ortonormal** en $\mathcal{L}^2([0, L], \mathbb{C})$:

$$\langle \psi_m(x) | \psi_n(x) \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn}$$

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n(x) \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$$

→ teoría de **series de Fourier**

- Otros problemas llevan a otras ecns diferenciales

Oscilador armónico:	polinomios de Hermite
Momento angular :	polinomios de Legendre
Pozo infinito esférico (radial):	polinomios de Bessel
Átomo hidrógeno (radial):	polinomios de Laguerre
...	

- Otros problemas llevan a otras ecns diferenciales

Oscilador armónico:	polinomios de Hermite
Momento angular :	polinomios de Legendre
Pozo infinito esférico (radial):	polinomios de Bessel
Átomo hidrógeno (radial):	polinomios de Laguerre
...	

- En general: Teoría de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\Psi(x)}{dx} \right] + q(x)\Psi(x) = -\lambda w(x)\Psi(x)$$

- Otros problemas llevan a otras ecns diferenciales

Oscilador armónico:	polinomios de Hermite
Momento angular :	polinomios de Legendre
Pozo infinito esférico (radial):	polinomios de Bessel
Átomo hidrógeno (radial):	polinomios de Laguerre
...	

- En general: Teoría de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\Psi(x)}{dx} \right] + q(x)\Psi(x) = -\lambda w(x)\Psi(x)$$

→ Problema de autovalores $L\Psi = \lambda\Psi$

→ Solo soluciones $\psi_n(x)$ cuando $\lambda \in \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
 $\psi(x) \notin \mathcal{L}^2([a, b], \mathbb{C})$, salvo si $\lambda \in \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

- Otros problemas llevan a otras ecns diferenciales

Oscilador armónico:

polinomios de Hermite

Momento angular :

polinomios de Legendre

Pozo infinito esférico (radial):

polinomios de Bessel

Átomo hidrógeno (radial):

polinomios de Laguerre

...

- En general: Teoría de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\Psi(x)}{dx} \right] + q(x)\Psi(x) = -\lambda w(x)\Psi(x)$$

→ Problema de autovalores $L\Psi = \lambda\Psi$

→ Solo soluciones $\psi_n(x)$ cuando $\lambda \in \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\psi(x) \notin \mathcal{L}^2([a, b], \mathbb{C})$, salvo si $\lambda \in \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

→ Autofunciones $\psi_n(x)$ forman base ortonormal de $\mathcal{L}^2([a, b], \mathbb{C})$

$$\langle \psi_m(x) | \psi_n(x) \rangle = \delta_{mn}, \quad \Psi(x) = \sum_n \alpha_n \psi_n(x) \text{ con } \sum_n |\alpha_n|^2 < \infty$$

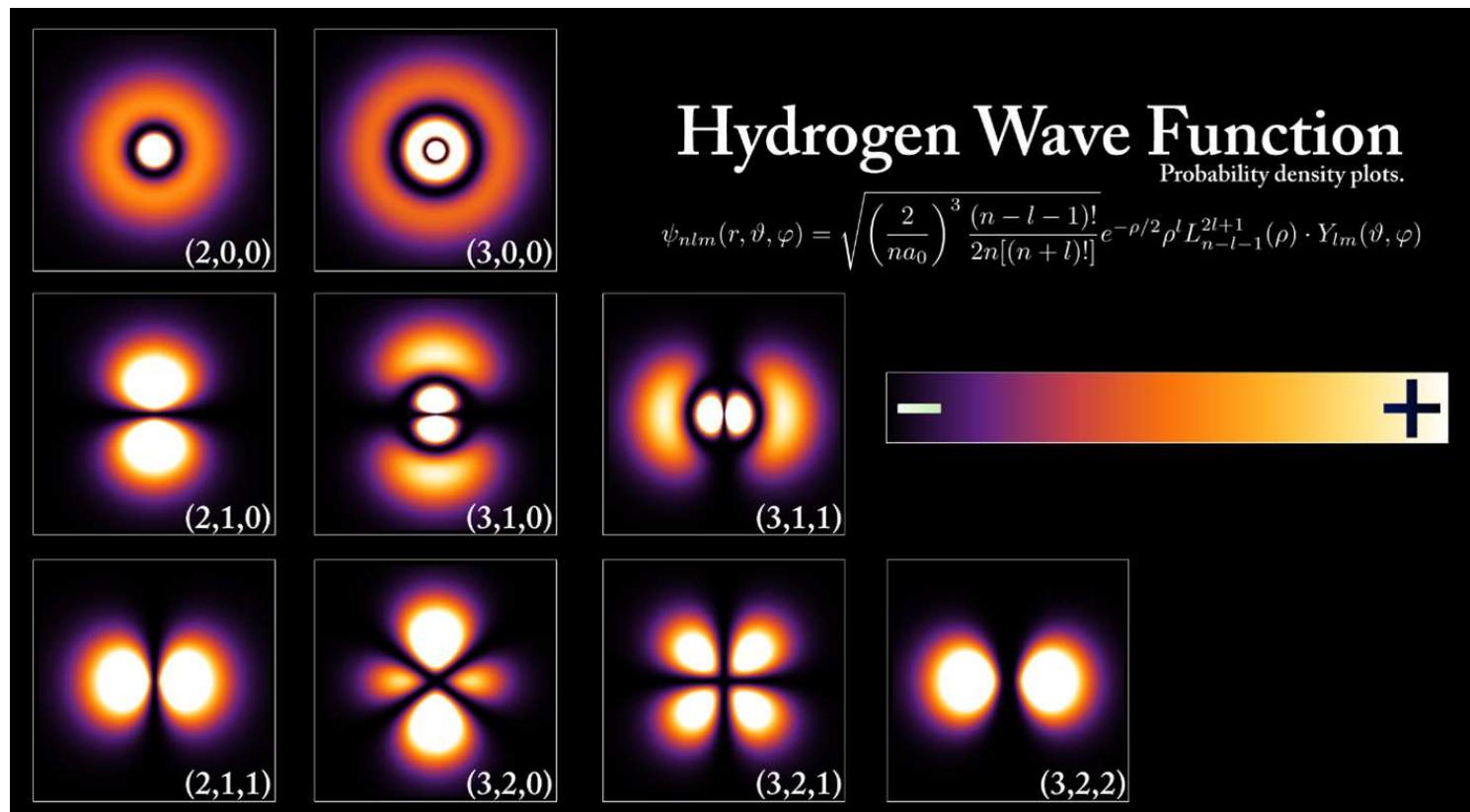
- Estado cuántico caracterizado por **números cuánticos** λ_n

Átomo de hidrógeno: $|n, \ell, m\rangle$

Energía E : $n = \{1, 2, 3, \dots\}$

Momento angular L^2 : $\ell = \{0, 1, 2, \dots n - 1\}$

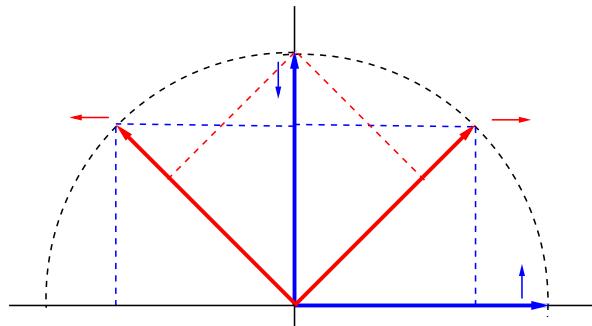
Momento angular L_z : $m = \{-\ell, -\ell + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell - 1, \ell\}$



7. Curiosidades cuánticas

A. Relaciones de incertidumbre

- Por un lado, $\uparrow\downarrow$ y $\Leftarrow\Rightarrow$ no tienen existencia simultánea



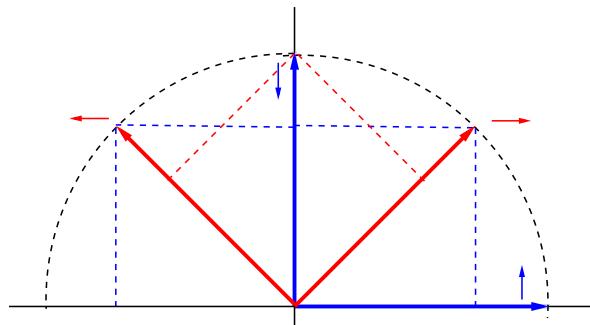
$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle)$$

7. Curiosidades cuánticas

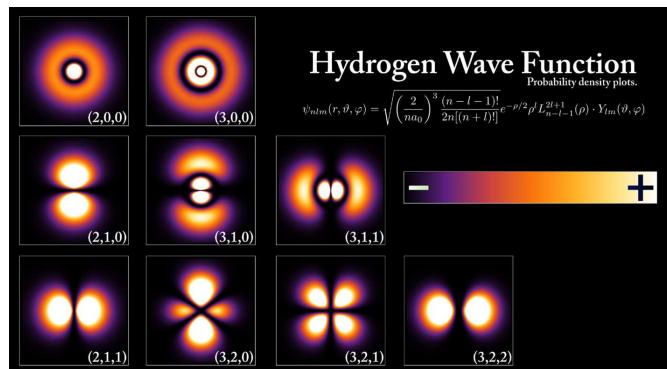
A. Relaciones de incertidumbre

- Por un lado, $\uparrow\downarrow$ y $\leftarrow\rightleftharpoons$ no tienen existencia simultánea



$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$
$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle)$$

- Por otro lado, átomo de hidrógeno caracterizado por $|n, \ell, m\rangle$



Energía E : $n \in \mathbb{N}$

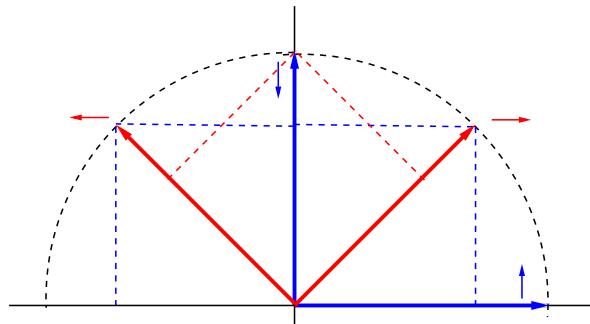
Momento angular L^2 : $0 \leq \ell \leq n - 1$

Momento angular L_z : $-\ell \leq m \leq \ell$

7. Curiosidades cuánticas

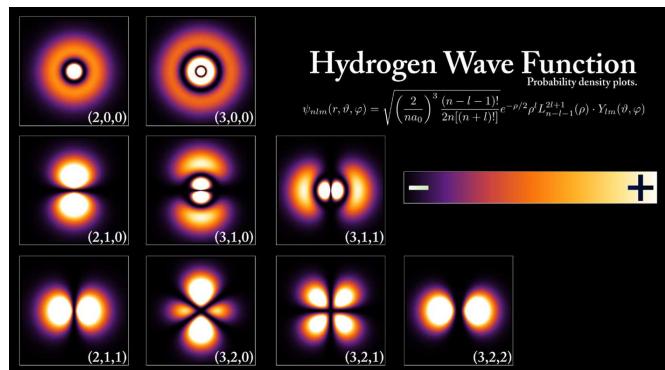
A. Relaciones de incertidumbre

- Por un lado, $\uparrow\downarrow$ y $\leftarrow\rightleftharpoons$ no tienen existencia simultánea



$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$
$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle)$$

- Por otro lado, átomo de hidrógeno caracterizado por $|n, \ell, m\rangle$



Energía E : $n \in \mathbb{N}$

Momento angular L^2 : $0 \leq \ell \leq n - 1$

Momento angular L_z : $-\ell \leq m \leq \ell$

- ¿Algunas cantidades no tienen existencia simultáneas, otras sí?
¿De qué depende?

- Cantidades físicas \mathcal{A} y \mathcal{B} tienen existencia simultánea

- Cantidades físicas \mathcal{A} y \mathcal{B} tienen existencia simultánea
 \iff medidas de \mathcal{A} no扰urban a \mathcal{B} (y vice versa)

- Cantidades físicas \mathcal{A} y \mathcal{B} tienen existencia simultánea
 - \iff medidas de \mathcal{A} no distubran a \mathcal{B} (y vice versa)
 - \iff operadores A y B tienen los **mismos autovectores**

$$\left. \begin{array}{l} A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle \\ B|\psi_n\rangle = b_n|\psi_n\rangle \end{array} \right\} \implies |a_m, b_n\rangle$$

- Cantidades físicas \mathcal{A} y \mathcal{B} tienen existencia simultánea

\iff medidas de \mathcal{A} no distubran a \mathcal{B} (y vice versa)

\iff operadores A y B tienen los **mismos autovectores**

$$\left. \begin{array}{l} A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle \\ B|\psi_n\rangle = b_n|\psi_n\rangle \end{array} \right\} \implies |a_m, b_n\rangle$$

\iff operadores A y B son **simultáneamente diagonalizables**

■ Cantidades físicas \mathcal{A} y \mathcal{B} tienen existencia simultánea

\iff medidas de \mathcal{A} no distuban a \mathcal{B} (y vice versa)

\iff operadores A y B tienen los **mismos autovectores**

$$\left. \begin{array}{l} A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle \\ B|\psi_n\rangle = b_n|\psi_n\rangle \end{array} \right\} \implies |a_m, b_n\rangle$$

\iff operadores A y B son **simultáneamente diagonalizables**

\iff operadores A y B commutan: $[A, B] = 0$

- Cantidades físicas \mathcal{A} y \mathcal{B} tienen existencia simultánea
 - \iff medidas de \mathcal{A} no distuban a \mathcal{B} (y vice versa)
 - \iff operadores A y B tienen los **mismos autovectores**
$$\left. \begin{array}{l} A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle \\ B|\psi_n\rangle = b_n|\psi_n\rangle \end{array} \right\} \implies |a_m, b_n\rangle$$
- \iff operadores A y B son **simultáneamente diagonalizables**
- \iff operadores A y B commutan: $[A, B] = 0$

- Operadores S_z y S_x no commutan

$$[S_x, S_y] = iS_z, \quad [S_y, S_z] = iS_x, \quad [S_z, S_x] = iS_y$$

- Cantidades físicas \mathcal{A} y \mathcal{B} tienen existencia simultánea
 - \iff medidas de \mathcal{A} no distuban a \mathcal{B} (y vice versa)
 - \iff operadores A y B tienen los **mismos autovectores**
$$\left. \begin{array}{l} A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle \\ B|\psi_n\rangle = b_n|\psi_n\rangle \end{array} \right\} \implies |a_m, b_n\rangle$$
 - \iff operadores A y B son **simultáneamente diagonalizables**
 - \iff operadores A y B commutan: $[A, B] = 0$
- Operadores S_z y S_x no commutan

$$[S_x, S_y] = iS_z, \quad [S_y, S_z] = iS_x, \quad [S_z, S_x] = iS_y$$

\iff operadores S_z y S_x no tienen mismos autovectores

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle)$$

\iff medidas de S_x cambian estado $|\uparrow\rangle$

- Heisenberg (1926): Relaciones de incertidumbre
2 cantidades físicas \mathcal{A} y \mathcal{B} con $[A, B] \neq 0$

$$\sigma_{\mathcal{A}} \cdot \sigma_{\mathcal{B}} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right|$$

- Heisenberg (1926): Relaciones de incertidumbre
2 cantidades físicas \mathcal{A} y \mathcal{B} con $[A, B] \neq 0$

$$\sigma_{\mathcal{A}} \cdot \sigma_{\mathcal{B}} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right|$$

- Posición $\Psi(x)$ y momento $\Psi(p)$: Transformadas de Fourier

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx} \Psi(p) \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-ipx} \Psi(x)$$

Relación de incertidumbre: $[X, P] = i\hbar \mathbb{1}$ $\Rightarrow \Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$

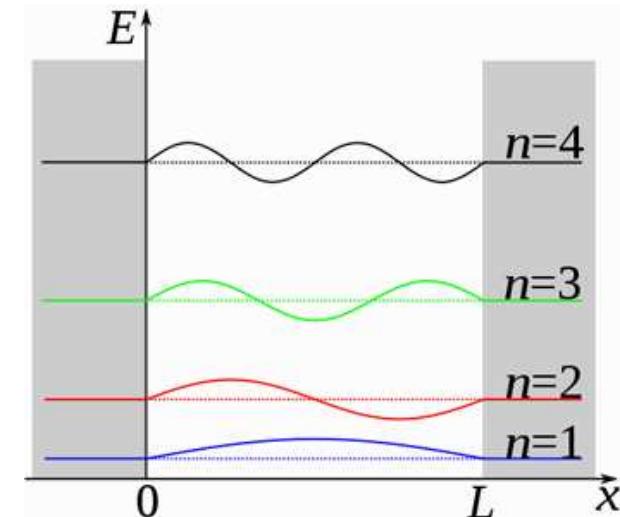
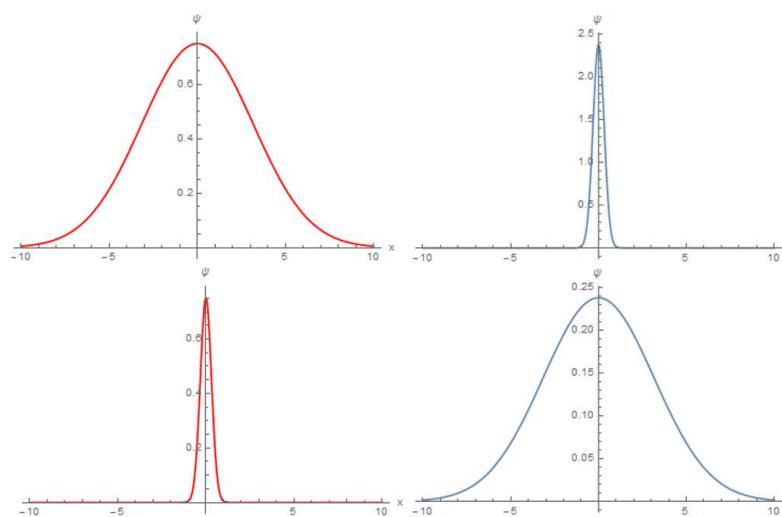
- Heisenberg (1926): Relaciones de incertidumbre
2 cantidades físicas \mathcal{A} y \mathcal{B} con $[A, B] \neq 0$

$$\sigma_{\mathcal{A}} \cdot \sigma_{\mathcal{B}} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right|$$

- Posición $\Psi(x)$ y momento $\Psi(p)$: Transformadas de Fourier

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx} \Psi(p) \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-ipx} \Psi(x)$$

Relación de incertidumbre: $[X, P] = i\hbar \mathbb{1} \Rightarrow \Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$



Energía de punto cero: $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / (2mL^2) \neq 0$

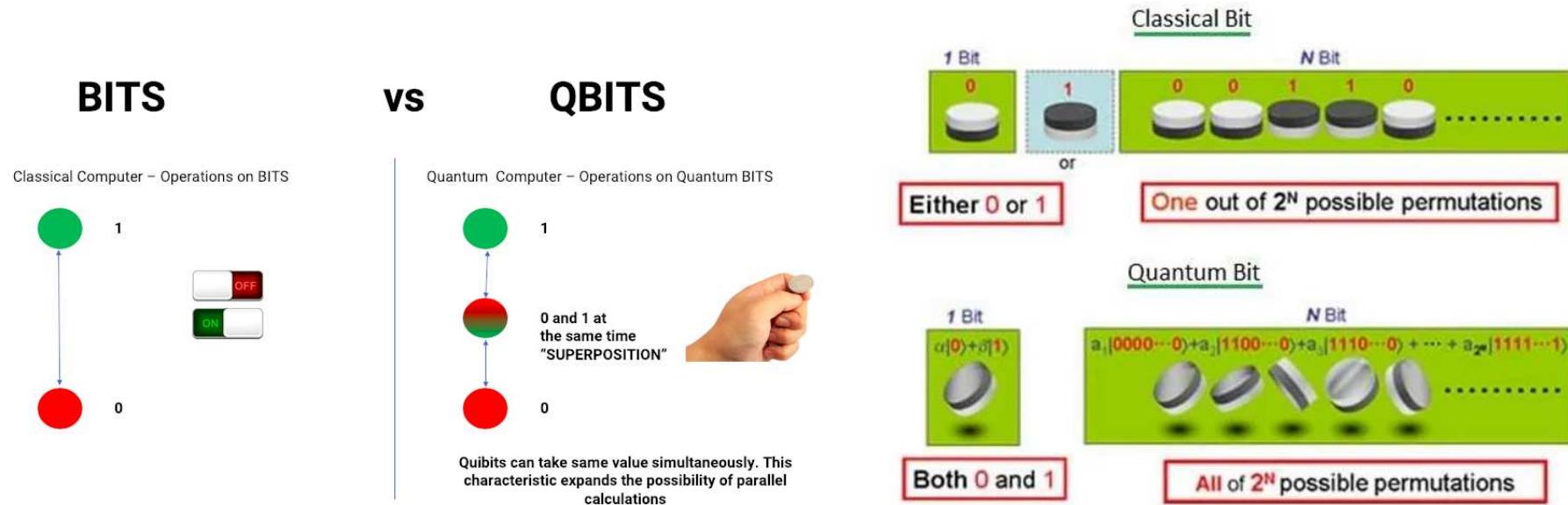
B. Superposición cuántica

Estado $|\Psi\rangle = \sum_n \alpha_n |\psi_n\rangle$ no está en ningún $|\psi_n\rangle$ concreto

B. Superposición cuántica

Estado $|\Psi\rangle = \sum_n \alpha_n |\psi_n\rangle$ no está en ningún $|\psi_n\rangle$ concreto

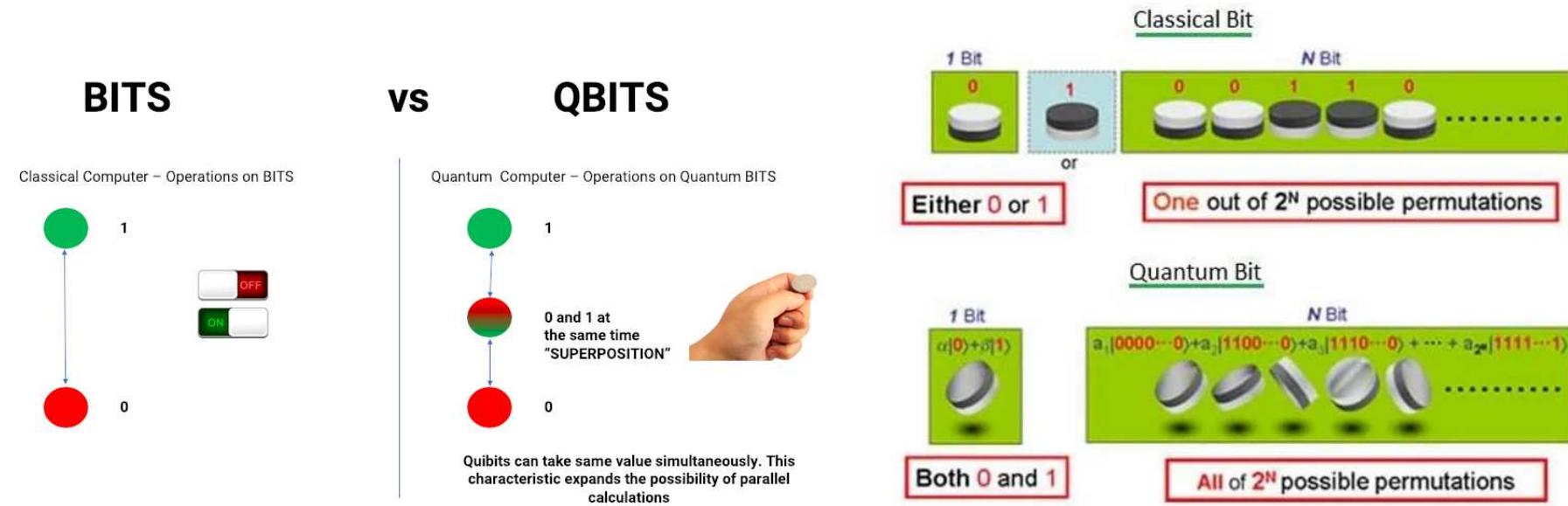
Computación cuántica: 2^N cálculos simultáneos



B. Superposición cuántica

Estado $|\Psi\rangle = \sum_n \alpha_n |\psi_n\rangle$ no está en ningún $|\psi_n\rangle$ concreto

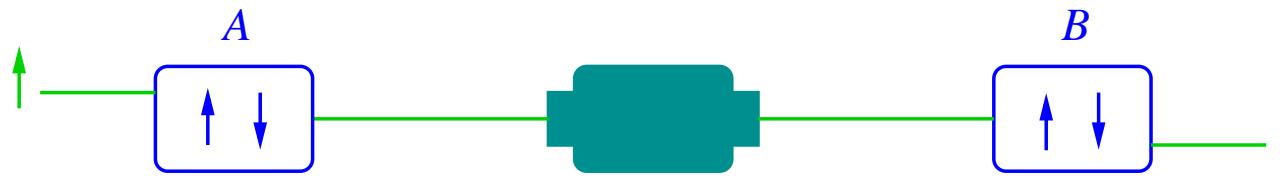
Computación cuántica: 2^N cálculos simultáneos



Supremacia cuántica: problemas no-polinomiales en tiempo polinomial
→ criptografía, ciberseguridad, IA, ...

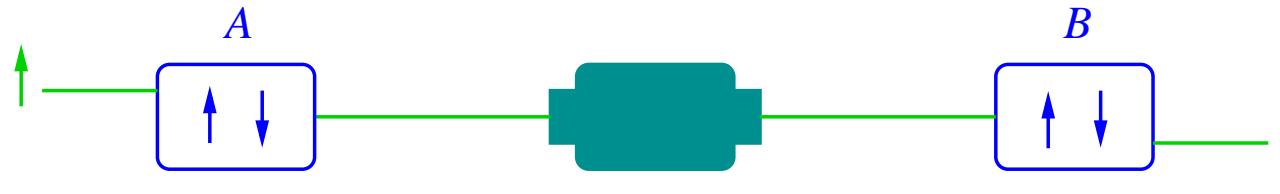
C. Entrelazamiento

- 2 partículas con espín $\uparrow\downarrow$ con espín total $S_{tot} = 0$



C. Entrelazamiento

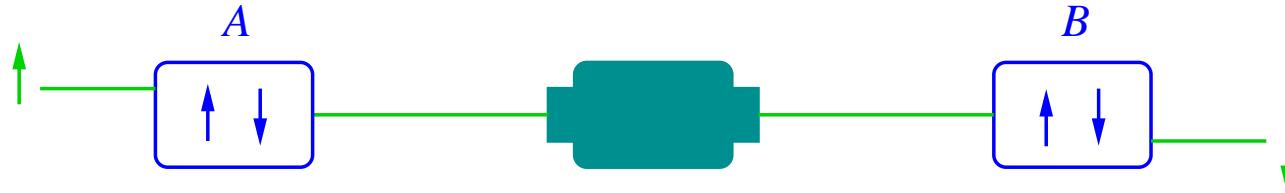
- 2 partículas con espín $\uparrow\downarrow$ con espín total $S_{tot} = 0$



Espín en A y espín en B **no** determinados hasta medida

C. Entrelazamiento

- 2 partículas con espín $\uparrow\downarrow$ con espín total $S_{tot} = 0$



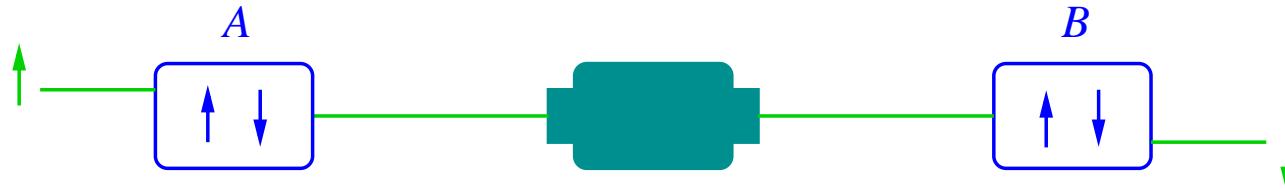
Espín en A y espín en B no determinados hasta medida

Medida de espín en A determina espín en B ...

... aunque estén a años-luz de distancia

C. Entrelazamiento

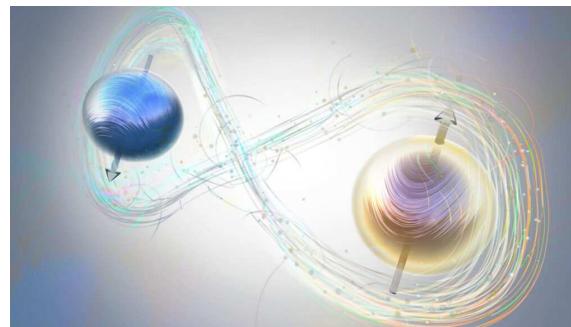
- 2 partículas con espín $\uparrow\downarrow$ con espín total $S_{tot} = 0$



Espín en A y espín en B no determinados hasta medida
Medida de espín en A determina espín en B ...
... aunque estén a años-luz de distancia

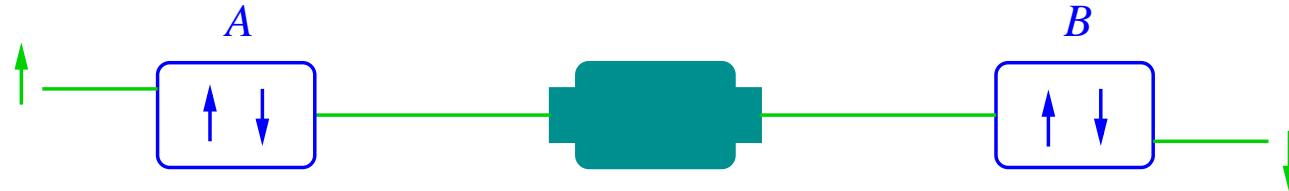
- Dos espínes entrelazados forman un solo estado:

$$\left. \begin{array}{l} |\Psi_A\rangle \in \mathcal{H}_1 \\ |\Psi_B\rangle \in \mathcal{H}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow |\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$$



C. Entrelazamiento

- 2 partículas con espín $\uparrow\downarrow$ con espín total $S_{tot} = 0$



Espín en A y espín en B no determinados hasta medida

Medida de espín en A determina espín en B ...

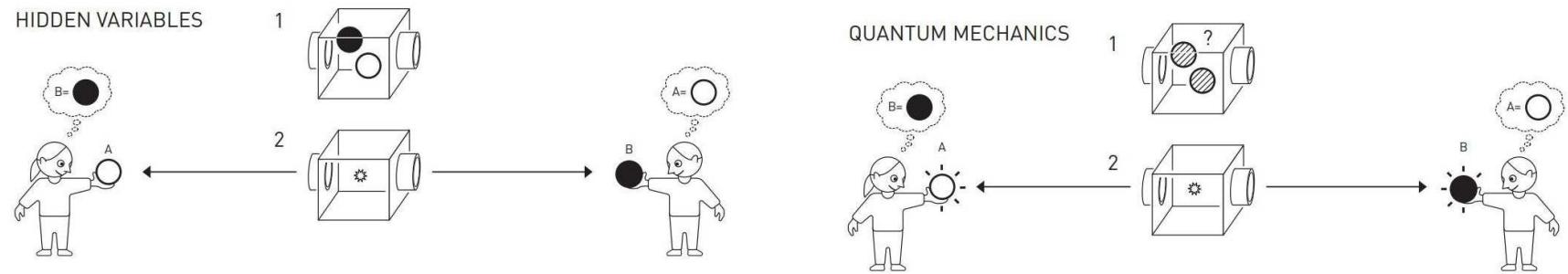
... aunque estén a años-luz de distancia

- Dos espines entrelazados forman un solo estado:

$$\left. \begin{array}{l} |\Psi_A\rangle \in \mathcal{H}_1 \\ |\Psi_B\rangle \in \mathcal{H}_2 \end{array} \right\} \implies |\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$$

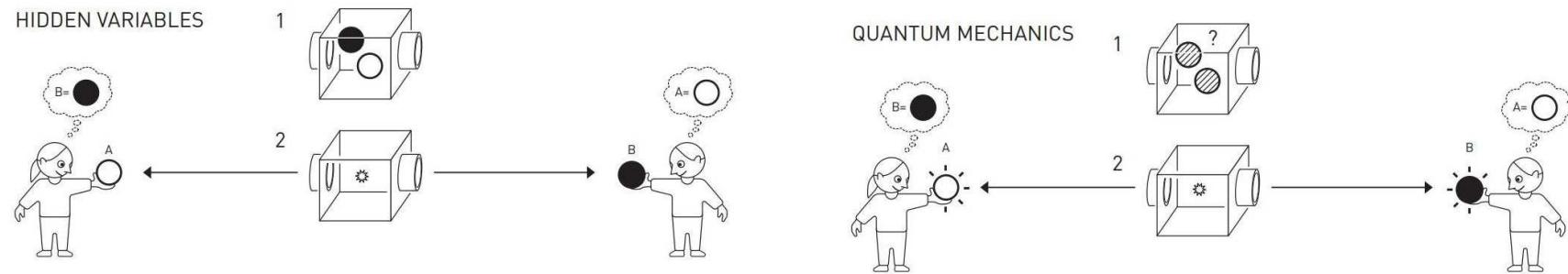
- $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ rompe a $|\uparrow\downarrow\rangle$ o $|\downarrow\uparrow\rangle$ de manera no local
→ solo correlaciones entre A y B ,
no hay comunicación superlumínica

- EPR (1935) veían indicaciones de **variables ocultas**
→ ¿variables desconocidas que dan descripción determinista?



¿Existen teorías locales de variables ocultas?

- EPR (1935) veían indicaciones de **variables ocultas**
→ ¿variables desconocidas que dan descripción determinista?



¿Existen teorías locales de variables ocultas?

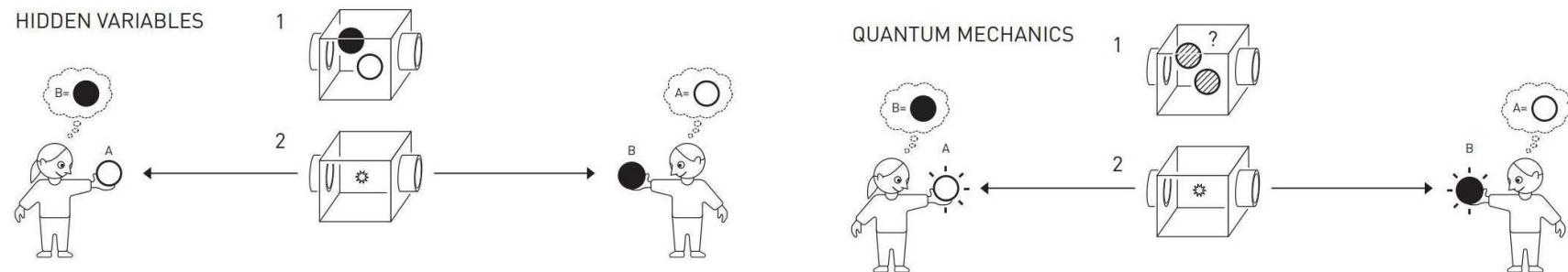
- Desigualdades de Bell (1964): correlaciones entre distintas medidas

$$\text{VOL: } \left| \langle A_0 B_0 \rangle + \langle A_0 B_1 \rangle + \langle A_1 B_0 \rangle - \langle A_1 B_1 \rangle \right| \leq 2$$

$$\text{MC: } \langle A_0 \otimes B_0 \rangle + \langle A_0 \otimes B_1 \rangle + \langle A_1 \otimes B_0 \rangle - \langle A_1 \otimes B_1 \rangle \leq 2\sqrt{2}$$

→ variables ocultas locales **predicen otra física** que Mecánica Cuántica

- EPR (1935) veían indicaciones de **variables ocultas**
→ ¿variables desconocidas que dan descripción determinista?



¿Existen teorías locales de variables ocultas?

- Desigualdades de Bell (1964): correlaciones entre distintas medidas

$$\text{VOL: } \left| \langle A_0 B_0 \rangle + \langle A_0 B_1 \rangle + \langle A_1 B_0 \rangle - \langle A_1 B_1 \rangle \right| \leq 2$$

$$\text{MC: } \langle A_0 \otimes B_0 \rangle + \langle A_0 \otimes B_1 \rangle + \langle A_1 \otimes B_0 \rangle - \langle A_1 \otimes B_1 \rangle \leq 2\sqrt{2}$$

→ variables ocultas locales **predicen otra física** que Mecánica Cuántica

- Experimentos de Clauser (1972), Aspect (1982), Zeilinger (1998):
 - Naturaleza **viola la desigualdad** de Variables Ocultas Locales
 - cualquier teoría de **variables ocultas es no-local**
 - **Premio Nobel de Física 2022**

8. Conclusiones

- Mecánica Cuántica es teoría muy exitosa con numerosas aplicaciones en Ciencias y Tecnología.

8. Conclusiones

- Mecánica Cuántica es teoría muy exitosa con numerosas aplicaciones en Ciencias y Tecnología.
- Mundo cuántico choca con la intuición newtoniana y lógica clásica.

8. Conclusiones

- Mecánica Cuántica es teoría muy exitosa con numerosas aplicaciones en Ciencias y Tecnología.
- Mundo cuántico choca con la intuición newtoniana y lógica clásica.
- Descripción matemática sencilla e intuitiva en términos de espacios de Hilbert y problema de autovectores.

8. Conclusiones

- Mecánica Cuántica es teoría muy exitosa con numerosas aplicaciones en Ciencias y Tecnología.
- Mundo cuántico choca con la intuición newtoniana y lógica clásica.
- Descripción matemática sencilla e intuitiva en términos de espacios de Hilbert y problema de autovectores.
- Física y Matemáticas son dos caras de la misma moneda.
Una no puede existir sin la otra.

8. Conclusiones

- Mecánica Cuántica es teoría muy exitosa con numerosas aplicaciones en Ciencias y Tecnología.
- Mundo cuántico choca con la intuición newtoniana y lógica clásica.
- Descripción matemática sencilla e intuitiva en términos de espacios de Hilbert y problema de autovectores.
- Física y Matemáticas son dos caras de la misma moneda.
Una no puede existir sin la otra.
La diferencia solo es estilo.

¡GRACIAS!