



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Gravedad en tres dimensiones y el agujero negro BTZ

Grado en Física

Miguel Ángel Gómez Torres

8 de julio de 2026

Resumen

Este trabajo estudia las propiedades fundamentales de la gravedad en distintas dimensiones, con especial énfasis en la comparación entre los casos $3+1$ y $2+1$. En primer lugar, se analizan soluciones clásicas en cuatro dimensiones, como la métrica de Schwarzschild y el espacio (anti-)de Sitter, junto con el comportamiento de sus geodésicas y la influencia de la constante cosmológica. A partir de estos resultados, se introduce la estructura geométrica de la teoría, destacando el papel de los tensores de curvatura.

Posteriormente, se aborda la gravedad en $2+1$ dimensiones. En este contexto, se estudia el agujero negro BTZ como solución en espacios Anti-de Sitter, analizando sus propiedades geométricas y causales.

Finalmente, se discuten las implicaciones de estos resultados en relación con la naturaleza de la información en agujeros negros y la correspondencia AdS/CFT, resaltando cómo la simplicidad de la gravedad en $2+1$ dimensiones proporciona un marco privilegiado para explorar la holografía y la relación entre geometría y grados de libertad cuánticos.

This work studies the fundamental properties of gravity in different spacetime dimensions, with particular emphasis on the comparison between the $3+1$ and $2+1$ cases. First, classical solutions in four dimensions are analyzed, such as the Schwarzschild metric and (anti-)de Sitter spacetime, together with the behavior of their geodesics and the role of the cosmological constant. Based on these results, the geometrical structure of the theory is introduced, highlighting the role of curvature tensors.

Subsequently, gravity in $2+1$ dimensions is addressed. In this context, the BTZ black hole is studied as a solution in Anti-de Sitter spacetime, analyzing its geometrical and causal properties.

Finally, the implications of these results are discussed in connection with the nature of information in black holes and the AdS/CFT correspondence, emphasizing how the simplicity of gravity in $2+1$ dimensions provides a privileged framework for exploring holography and the relationship between geometry and quantum degrees of freedom.

Índice

1. Introducción	4
2. Geometría diferencial e invariantes de curvatura	6
2.1. Elementos de geometría diferencial	6
2.2. Invariantes de curvatura y singularidades	7
3. Derivación de las ecuaciones de Einstein	8
3.1. Variación de la acción	8
3.2. Caracterización según la dimensión	9
4. Gravedad en $3 + 1$ dimensiones	10
4.1. Solución de Schwarzschild	10
4.1.1. Cálculo de los símbolos de Christoffel y de las componentes del tensor de Ricci	10
4.1.2. Cálculo de la métrica de Schwarzschild	11
4.1.3. Estudio de las singularidades de la métrica de Schwarzschild	13
4.1.4. Geodésicas temporales y nulas	15
4.2. Solución (A)dS con simetría esférica e hipótesis de estaticidad	17
5. Gravedad en $2+1$ dimensiones	20
5.1. Ausencia de solución de Schwarzschild en $2 + 1$ dimensiones	20
5.2. Cálculo del déficit angular	21
5.3. Introducción de la constante cosmológica en $2 + 1$ dimensiones	22
5.3.1. Soluciones de Sitter y anti-de Sitter	22
5.3.2. La solución BTZ	24
5.3.3. Geodésicas temporales y nulas en el agujero negro BTZ	26
5.4. Agujero negro BTZ con campo electromagnético	27
5.4.1. Ansatz métrico y del campo electromagnético	27
5.4.2. Horizontes de la solución BTZ cargada	29
6. Implicaciones	32
6.1. Solución del agujero negro BTZ como laboratorio simplificado	32
6.2. El problema de la información	32
6.3. Holografía y correspondencia AdS/CFT	32
7. Conclusiones	33

1. Introducción

La teoría de la relatividad general fue desarrollada y publicada por Albert Einstein en 1915 como una extensión natural de su trabajo previo sobre relatividad especial (1905). En ella se propone una descripción de la gravedad conceptualmente distinta de la formulada por Isaac Newton, en la que esta deja de interpretarse como una fuerza de atracción entre masas para entenderse como una manifestación de la geometría del espacio-tiempo.

En este marco, la presencia de energía y materia determina la curvatura del espacio-tiempo. Así, lo que en la mecánica clásica se interpreta como una fuerza gravitatoria se entiende, en relatividad general, como una consecuencia directa del movimiento en un espacio curvo.

La relación entre la distribución de energía y momento y la curvatura que esta genera está codificada en las ecuaciones de Einstein, un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden y no lineales:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

La parte izquierda de la igualdad recoge la geometría del espacio-tiempo a través de la métrica y sus derivadas, mientras que el lado derecho contiene la información sobre la distribución de energía y momento. La no linealidad de estas ecuaciones, causada por la interacción del campo gravitatorio consigo mismo, hace que la obtención de soluciones exactas sea en general una tarea extraordinariamente difícil. De hecho, el propio Einstein consideraba que encontrar soluciones exactas sería, en el mejor de los casos, una empresa muy ardua. Sin embargo, apenas unos meses después de la publicación de la teoría, Karl Schwarzschild obtuvo la primera solución exacta no trivial, sentando las bases del estudio analítico de la relatividad general.

La estructura y las propiedades de estas ecuaciones dependen de la dimensión del espacio-tiempo en el que se formulan, presentando características cualitativamente diferentes que permiten explorar aspectos fundamentales de la teoría en contextos más simples o más restrictivos. El estudio de modelos de dimensión reducida es, por tanto, una herramienta útil para aislar y comprender algunos mecanismos esenciales de la interacción gravitatoria.

En este trabajo se estudiará la relatividad general tanto en $3 + 1$ como en $2 + 1$ dimensiones, poniendo especial énfasis en las diferencias entre ambos casos. En cuatro dimensiones, la teoría presenta grados de libertad dinámicos asociados a la propagación de ondas gravitatorias, y las soluciones pueden presentar singularidades físicas, como la que aparece en el interior del agujero negro de Schwarzschild. En tres dimensiones, en cambio, la estructura algebraica de las ecuaciones implica la ausencia de grados de libertad dinámicos: el tensor de Riemann queda completamente determinado por el tensor de Ricci, de modo que en el vacío el espacio-tiempo es necesariamente plano. La

gravedad adquiere así un carácter no-dinámico.

A pesar de esta aparente trivialidad local, la introducción de una constante cosmológica negativa en $2 + 1$ dimensiones da lugar a soluciones con horizontes de sucesos y propiedades termodinámicas bien definidas. En particular, el agujero negro BTZ, descubierto por Bañados, Teitelboim y Zanelli en 1992 [1], constituye un modelo ampliamente estudiado de la física teórica contemporánea, y ha desempeñado un papel central en el desarrollo de la correspondencia AdS/CFT y en la comprensión microscópica de la entropía de los agujeros negros.

En este contexto, se analizarán diferentes soluciones de las ecuaciones de Einstein en ambas dimensionalidades: la métrica de Schwarzschild y los espacios (anti-)de Sitter en cuatro dimensiones, y el agujero negro BTZ en $2 + 1$ dimensiones, incluyendo su generalización en presencia de un campo electromagnético. El estudio comparativo de estas soluciones permitirá ilustrar cómo la dimensionalidad del espacio-tiempo determina la naturaleza misma de la gravedad, la estructura de sus soluciones y sus implicaciones físicas .

7. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha realizado un estudio comparativo de la relatividad general en $3+1$ y $2+1$ dimensiones, analizando las diferencias entre ambas teorías y sus implicaciones en la estructura de las soluciones. Lo primero a realizar ha sido la formulación de las ecuaciones de Einstein a partir de la acción de Einstein-Hilbert, lo que ha permitido obtener la dependencia de estas ecuaciones de campo con la dimensión. Además, se ha hecho un conteo del número de componentes de los tensores de curvatura de Riemann y Ricci, comprobando que coinciden exactamente en $2+1$ dimensiones, pero no en $3+1$, concluyendo que en el primero de los casos el tensor de Ricci determina completamente el tensor de Riemann.

En cuatro dimensiones, el estudio de la solución de Schwarzschild ha permitido ilustrar algunos conceptos clave. La derivación de la métrica ha mostrado cómo las condiciones de simetría esférica y estaticidad simplifican el problema, permitiendo demostrar la existencia de una singularidad física en el origen, donde el invariante de Kretschmann diverge, así como la aparición de un horizonte de eventos situado en el radio de Schwarzschild. El análisis de las geodésicas ha confirmado que el horizonte actúa como una frontera causal: en el interior, la coordenada radial adquiere carácter temporal y la caída hacia la singularidad se vuelve tan inevitable como el avance hacia el futuro fuera del agujero, siendo que no existen puntos de retorno para ninguna geodésica que haya cruzado el horizonte. El estudio del espacio (Anti-)de Sitter ha completado el estudio de la gravedad en cuatro dimensiones, mostrando cómo la introducción de una constante cosmológica modifica la aparición de singularidades.

En $2+1$ dimensiones, por otro lado, la situación es cualitativamente distinta y sorprendente. La anulación del tensor de Ricci implica que Riemann es idénticamente cero. La consecuencia más inmediata es que una fuente puntual no genera ninguna curvatura local en el vacío circundante. El espacio-tiempo es localmente plano en todos los puntos excepto en la ubicación de la propia fuente, y sin embargo no es globalmente equivalente al espacio de Minkowski. Lo que ocurre es que la masa genera un déficit angular en la estructura global del espacio-tiempo, la llamada singularidad cónica: el espacio-tiempo es equivalente a un plano al que se le ha extraído una sección angular y cuyos bordes han sido identificados, formando un cono cuyo vértice es la masa puntual. Este resultado ilustra de forma muy clara que en $2+1$ dimensiones la gravedad no es una teoría dinámica.

Sin embargo, la introducción de una constante cosmológica negativa cambia los resultados anteriores. En presencia de la misma, las ecuaciones de Einstein en $2+1$ dimensiones admiten la solución del agujero negro BTZ para $M > 0$. Esta solución comparte con Schwarzschild algunos de los rasgos causales de un agujero negro en $3+1$ dimensiones: existe un horizonte de sucesos que define una región de no retorno, y cualquier geodésica que lo cruce está obligada a avanzar hacia el interior sin posibilidad de escapar. Sin embargo, también presenta diferencias con el caso en $3+1$ dimensiones.

La más importante de estas diferencias es la ausencia de singularidad de curvatura. El invariante de Kretschmann es constante en todo el espacio-tiempo BTZ, incluido el origen, lo que permite que no exista ningún punto donde la curvatura diverja. Esto contrasta radicalmente con Schwarzschild, donde el invariante de Kretschmann diverge como r^{-6} en el origen, señalando una singularidad física donde la propia estructura del espacio-tiempo deja de tener sentido.

Por último, se ha generalizado la solución del BTZ a la presencia de un campo electromagnético, observando la aparición de una singularidad física, en contraste con el agujero negro BTZ. En 2+1 dimensiones, aparece un término logarítmico en la función métrica, lo que modifica la estructura de horizontes respecto al caso de Reissner-Nordström en cuatro dimensiones. Dependiendo de los valores de la masa y la carga, la solución puede presentar dos horizontes, una solución extremal donde ambos coinciden, o una singularidad desnuda.

Referencias

- [1] M. Bañados, C. Teitelboim y J. Zanelli, *The Black Hole in Three Dimensional Space-Time*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1849–1851.
- [2] M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim y J. Zanelli, *Geometry of the 2+1 Black Hole*, Phys. Rev. D **48** (1993) 1506–1525.
- [3] D. Boito, L. N. S. de Andrade, G. de Sousa, R. Gama y C. Y. M. London, *On Maxwell's Electrodynamics in Two Spatial Dimensions*, Rev. Bras. Ensino Fís. **42**.
- [4] S. Carlip, *Quantum Gravity in 2+1 Dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [5] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, San Francisco, 2004.
- [6] S. Deser, R. Jackiw y G. 't Hooft, *Three-Dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space*, Ann. Phys. **152** (1984) 220–235.
- [7] A. A. García-Díaz, *Three dimensional stationary cyclic symmetric Einstein-Maxwell solutions; energy, mass, momentum, and algebraic tensors characteristics*, arXiv:1307.6652 [gr-qc] (2013).
- [8] S. W. Hawking y G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [9] B. Janssen, *Teoría de la Relatividad General*, Universidad de Granada.
- [10] M. Kamata y T. Koikawa, *The Electrically Charged BTZ Black Hole with Self (Anti-self) Dual Maxwell Field*, arXiv:hep-th/9505037 (1995).
- [11] J. M. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231–252.
- [12] R. B. Mann, *Lower Dimensional Black Holes: Inside and Out*, arXiv:gr-qc/9501038 (1995).
- [13] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [14] R. Penrose, *Gravitational Collapse and Space-Time Singularities*, Phys. Rev. Lett. **14** (1965) 57–59.
- [15] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [16] A. Strominger, *Black Hole Entropy from Near-Horizon Microstates*, JHEP **02** (1998) 009, arXiv:hep-th/9712251.
- [17] R. M. Wald, *General Relativity* University of Chicago Press, Chicago.