Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO
Grado en Física

EL AGUJERO NEGRO DE KERR

Autora:
Raquel Aller Presencio

Tutores:
Dr. Bert Janssen
Dr. José Manuel Izquierdo Rodríguez

2024

Dedicado a mis padres y a mi abuelo, que siempre han velado por mí y que tanto me han apoyado a lo largo de la carrera.

Índice

1. Resumen

La métrica de Kerr es una de las soluciones de las ecuaciones de Einstein, que describe la geometría del espaciotiempo provocada por un cuerpo masivo en rotación. A lo largo de este trabajo, deduciremos dicha métrica y se estudiará con detenimiento, haciendo especial énfasis en la estructura causal de la solución.

Para hacer este estudio de forma amena, se comenzará introduciendo el agujero negro de Schwarzschild. De esta forma se presentan muchos conceptos y herramientas de forma sencilla, como las singularidades físicas y de coordenadas o los vectores de Killing. Una vez el lector está familiarizado con los conceptos básicos, nos sumergiremos de lleno en el agujero negro de Kerr.

The Kerr metric is a solution of the Einstein's equations which describes the geometry of spacetime arround a massive body with rotation. Along this project, the Kerr metric will be deduced and studied deeply, with special emphasis on the causal structure of this solution.

To make this proyect more pleasant, we will begin introducing the Schwarzschild black hole. Therefore, we will be able to present many concepts and tools, as essential and coordinate singularities or the Killing vectors. Once the reader is used to all these new concepts, it will be time to dive into the Kerr solution.

2. Notación

A lo largo de todo el trabajo se utiliza el *convenio de sumación de Einstein*, donde se supone que se suma sobre índices superiores e inferiores repetidos:

$$V_\mu W^\mu \equiv \sum_{\mu=1}^{N} V_\mu W^\mu. \tag{1}$$

Por otro lado, se trabaja en unidades naturales, de tal forma que $c = G = 1$.

En cuanto a la signatura de la métrica, existen distintos convenios en relatividad general. En este texto se usará la convención $diag(1, -1, -1, -1)$.

3. Introducción

Todos conocemos en mayor o menor medida la historia de la *Relatividad General*, que surge como una teoría de la gravedad formulada por el físico Albert Einstein y publicada en 1915. Esta publicación rompía con todo lo establecido hasta entonces. Lo que Einstein proponía era una nueva cosmovisión en la que reformularía (generalizaría) por completo la gravedad de Isaac Newton.

Albert Einstein publicaba el 25 de noviembre de 1915 el artículo que sentaría las bases de la Relatividad General. Bajo el nombre de *Die Feldgleichungen der Gravitation (Las ecuaciones de campo de la gravitación)*, Einstein desarrolla las ecuaciones siguientes

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G_N T_{\mu\nu}, \tag{2}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ el tensor métrico y $T_{\mu\nu}$ el tensor energía-momento. También aparece el escalar de Ricci R, que resulta de contraer el tensor de curvatura con la métrica.

La igualdad anterior, aunque compacta, se trata de un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales, no lineales acopladas y de segundo orden para la métrica $g_{\mu\nu}$. Debido a la dificultad de estas ecuaciones, Einstein pensó que no se encontrarían soluciones. Hoy sabemos que esto no fue así. Menos de dos meses después, en enero de 1916, Karl Schwarzschild halló la primera solución exacta no trivial: esféricamente simétrica y estática . La solución de Kerr, sin embargo, se haría de rogar durante 48 años. Esta métrica, descubierta por matemático el neozelandés Roy Kerr en 1963, resulta ser mucho más complicada que Schwarzschild, ya que se pierde la simetría esférica a causa de su rotación.

La física en muchas ocasiones causa rechazo ya que el formalismo matemático en el que se sustenta esta disciplina puede llegar a asustar. Sin embargo, detrás de tantas cuentas engorrosas, nos encontramos con resultados absolutamente fascinantes, y muchos de ellos se pueden entender de forma intuitiva y sin necesidad de las matemáticas.

En particular, la relatividad general puede resultar densa, ya que se apoya en la geometría diferencial y una notación muy compacta. La finalidad de este TFG es explicar de forma llevadera el agujero negro de Kerr, de manera que cualquier estudiante de física pueda llegar a seguirlo con facilidad. Se pretende que este trabajo sirva como un puente de conocimiento entre los contenidos que se estudian en la carrera a cerca de relatividad general y los estudios posteriores.

El texto siguiente trata de ser autocontenido. En primer lugar se introduce el agujero negro más sencillo: Schwarzschild. De esta forma, se explican de forma sencilla muchos conceptos que después serán utilizados para la solución de Kerr. Se habla de temas como la métrica, estructura causal, cantidades conservadas y movimiento geodésico. Tras habernos familiarizado con el estudio de este agujero negro, dispondremos de las herramientas necesarias para adentrarnos en Kerr. El núcleo del trabajo consiste en la estructura causal del agujero negro de Kerr, donde sobre todo nos centraremos en entender la física del sistema. En definitiva, se explicará al lector los fenómenos que acontecen cerca de un agujereo negro en rotación.

4. Métrica y cono de luz

La métrica es el punto de partida para el estudio de un espacio-tiempo particular. Es la herramienta que nos permite medir distancias, normas de vectores, distinguir entre futuro y pasado, y además contiene toda la información necesaria para describir la curvatura de la variedad.

En Relatividad General se trabaja con variedades pseudoriemannianas, es decir, con los pares ($\mathscr{M}$,g) donde $\mathscr{M}$ es una variedad diferenciable y g un tensor de rango (0,2) (dos veces covariante) no degenerado (determinante de la métrica distinto de cero). Este tensor se denomina métrica, y se puede expresar mediante el elemento de arco o en forma matricial.

Dados dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ pertenecientes al plano tangente de un punto p en la variedad $\mathscr{M}$, es decir $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathscr{T}_p(\mathscr{M})$ tales que $\mathbf{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu$ y $\mathbf{w} = w^\mu \mathbf{e}_\mu$. Entonces con la métrica podemos definir el producto escalar de dos vectores

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \longmapsto g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu \tag{3}$$

así como la norma de un vector

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu|} = \sqrt{|v_\nu v^\nu|}. \tag{4}$$

La segunda solución es exterior a la ergosfera. Se trataría de un anillo de fotones que conforman una órbita circular inestable fuera del agujero negro. Por otro lado, la primera solución se encuentra sobre el propio horizonte de evento exterior, de tal forma que en R_+ también podría formarse un anillo de luz.

Si consideramos el caso $a = 0$, en el que recuperaríamos Schwarzschild, la solución que se obtiene es $r_{LR}^{(1,2)} = 3M$, es decir, un único anillo de luz en el exterior del agujero negro.

Captura de fotones

La captura de fotones ocurriría para un fotón que se acercase desde el infinito con una energía $E > V_+(r_{max})$ y $\dot{r}(\infty) < 0$. En esta situación, la partícula se aproximaría al agujero negro con velocidad radial decreciente hasta alcanzar r_{max}, y después con velocidad creciente hasta alcanzar el horizonte. El número de vueltas alrededor del agujero negro antes de quedar atrapado, dependerá del valor de L^4.

Deflexión de partículas

Sería el caso de un fotón con energía $0 < E < V_+(r_{max})$ y $\dot{r}(\infty) < 0$. Se aproximaría hasta $E = V_+(r)$, donde $\dot{r} = 0$, que es un punto de retorno, ya que la velocidad radial se anula y además se tendría que $\ddot{r} > 0$, luego la partícula invertiría su trayectoria y escaparía al infinito.

10. Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos estudiado dos agujeros negros. En primer lugar el de Schwarzschild, el más sencillo. Resulta ser una solución de vacío, esféricamente simétrica, estática y asintóticamente plana. Su estructura causal es la más simple de entre todos los agujeros negros, ya que nos encontramos únicamente con un horizonte de eventos y una singularidad en $r = 0$. La singularidad del horizonte es de coordendas, de tal forma que sí se puede atravesar en un tiempo finito, aunque solo puede atravesarse en un único sentido, es decir, es una membrana unidireccional. Este horizonte de eventos resulta ser además una superficie de corrimiento infinito al rojo.

Por otro lado, las trayectorias geodésicas son relativamente sencillas, ya que al tratarse de una solución esféricamente simétrica, las trayectorias geodésicas resultan ser planas.

Todo esto es el resultado de que la estructura causal del agujero negro de Kerr es mucho más compleja que Schwarzschild. Como hemos visto, la métrica de Kerr se origina a partir de un cuerpo en rotación, causando la pérdida de simetría esférica. Este agujero negro pasa a tener únicamente simetría axial en torno al eje sobre el que rota y deja de ser estática. Toda esta información viene codificada en el parámetro a, que como vimos, se relaciona directamente con el momento angular de la solución.

A mayores hemos comprendido que esta nueva métrica no solo curva el espaciotiempo, sino que además rota, es decir, la métrica presenta un momento angular intrínseco, que será capaz de inducir una rotación incluso sobre un observador con momento angular nulo.

El hecho de que la métrica rote y la aparición del parámetro a se traduce en que la expresión de la métrica es notablemente más compleja, y esto a su vez da lugar a una estructura causal más rica. En este agujero negro nos encontramos con un total de cuatro superficies notables: dos ergosferas, que coinciden con las superficies de redshift infinito, y dos horizontes de eventos, aparte de una singularidad anular.

En lo referente a la ergosfera, hemos visto que además es una superficie de límite estático, a partir de la cual no puede existir un observador estático, mientras que los horizontes de eventos resultan ser superficies de límite estacionario.

Por otro lado, hemos podido comprobar que en la solución de Kerr las trayectorias geodésicas son notablemente más complicadas. De manera general, nos encontramos con que el movimiento no es planar, sino que las trayectorias resultantes son en tres dimensiones y muy complejas. El movimiento recluido a un plano (plano de simetría $\theta = \pi/2$) queda relegado a un caso concreto con unas condiciones iniciales determinadas.

Por último, y para una mayor completitud, se ha usado el algoritmo de Newman-Janis para deducir la expresión de la métrica de Kerr.

Referencias

[1] Janssen, B. *Gravitación y geometría: Una introducción moderna a la Teoría de la Relatividad General*, Editorial Universidad de Granada (2022).

[2] Sean M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An introduction to General Relativity*, Cambridge University Press (2019).

[3] Ray A. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press (1992).

[4] Eric Poisson, A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics, Cambridge University Press (2004).

[5] David L. Wiltshire, Matt Visser, Susan M.Scott, *The Kerr Spacetime*, Cambridge University Press (2009).

[6] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press (1983).

[7] Valeria Ferrari, Leonardo Gualtieri, Paolo Pani, *General Relativity and its Applications: Black Holes, Compact Stars and Gravitational Waves*. CRC Press (2021).

[8] Infante Adrián, A. Trabajo Fin de Grado: *Estudio de la estructura del espacio-tiempo a través de diagramas de Penrose*, UVaDOC (2023).

[9] Galvez García, D. Trabajo Fin de Máster: *Aplicación del algoritmo de Janis y Newman a diversas métricas y estudio de los resultados*. Universidad de Granada (2019).

[10] Guerrero Montero, J.A. Trabajo Fin de Grado: *El agujero negro de Kerr*. Univeridad de Granada (2017).

[11] S.P. Drake, Peter Szekeres. *Uniqueness of the Newman-Janis Algorithm in Generating the Kerr-Newman Metric*, General Relativity and Gravitation (2000).

[12] Gabriela Slezáková, *Geodesic Motion in Black Holes*, University of Waikato (2006).

[13] E.T. Newman, A.I. Janis, *Note on the Kerr Spinning-Particle Metric*. Journal of Mathematical Physics (1965).

[14] Utkarsh Kumar, Sukanta Panda, Avani Patel, *Blackhole in nonlocal gravity: comparing metric from Newman-Janis algorithm with slowly rotating solution*. The European Physical Journal C (2020).