

La estructura causal de Reissner-Nordström-Anti-De Sitter



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

Pablo Hidalgo Romera

Tutor: Bert Janssen

4 de septiembre de 2026

Resumen

En este Trabajo de Fin de Máster se realiza un estudio comparativo de la estructura causal y de los horizontes en soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein con simetría esférica y estáticas. Se analizan los casos de Schwarzschild, Reissner–Nordström, Schwarzschild–De Sitter y Anti-de Sitter y Reissner–Nordström–Anti-de Sitter.

A lo largo del trabajo se exponen los fundamentos teóricos de la Relatividad General necesarios para el desarrollo de este trabajo, se derivan de forma explícita las métricas correspondientes y se estudia la naturaleza de los horizontes como fronteras causales. Se enfatiza el papel de la constante cosmológica y de la carga eléctrica en la modificación de la estructura geométrica. Finalmente, se comparan las diferencias físicas entre agujeros negros y modelos cosmológicos, resaltando la relevancia de estos resultados en la física teórica y astrofísica moderna.

Abstract

This Master's Thesis presents a comparative study of the causal structure and horizons in exact spherically symmetric and static solutions of Einstein's equations. We analyze the Schwarzschild, Reissner–Nordström, Schwarzschild–de Sitter y Anti-de Sitter Reissner–Nordström–Anti-de Sitter. metrics.

The theoretical framework of General Relativity is reviewed, the metrics are explicitly derived, and the horizons are studied as causal boundaries. Special attention is paid to the role of the cosmological constant and the electric charge in modifying the geometry. Finally, the differences between black hole and cosmological models are compared, highlighting their relevance in modern theoretical physics and astrophysics.

Índice general

1.	Introducción	4
2.	Marco Teórico	7
2.1.	La Relatividad General como teoría geométrica de la gravedad . . .	7
2.2.	El principio de equivalencia	7
2.3.	Descripción geométrica del espacio-tiempo	8
2.4.	Las ecuaciones de Einstein	9
2.5.	Conos de luz y estructura causal	10
2.6.	Acción general de Einstein-Maxwell con constante cosmológica . . .	11
3.	La solución de Schwarzschild	12
3.1.	Derivación de la solución de Schwarzschild	12
3.2.	Estructura causal de la solución de Schwarzschild	13
4.	La solución de Reissner-Nordström	17
4.1.	Las ecuaciones de Einstein-Maxwell	17
4.2.	Singularidades de la solución de Reissner-Nordström	19
5.	Soluciones con constante cosmológica	22
5.1.	Espacio de De Sitter	23
5.2.	Espacio Anti-de Sitter	24
5.3.	Solución de Schwarzschild-De Sitter	25
5.4.	Solución de Schwarzschild-Anti-de Sitter	30
6.	Solución de Reissner-Nordström-Anti-de Sitter	33
6.1.	Condición de extremalidad de la solución Reissner-Nordström Anti-de Sitter	33
6.2.	Caso subextremal	35
6.3.	Caso extremal	36
6.4.	Caso sobreextremal	38
7.	Conclusiones	41

1. Introducción

La formulación de la Relatividad General por Albert Einstein en 1915 supuso una profunda transformación en la comprensión de la interacción gravitatoria y marcó el nacimiento de una nueva descripción geométrica del espacio-tiempo. Frente a la concepción newtoniana de la gravedad como una fuerza que actúa instantáneamente entre cuerpos materiales, la teoría de Einstein marca un nuevo enfoque en el que interpreta la gravedad como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo producida por la presencia de materia y energía. De este modo, el movimiento de las partículas y de la radiación queda determinado por la geometría del espacio-tiempo, mientras que dicha geometría evoluciona de acuerdo con las ecuaciones de campo de Einstein [1].

La capacidad predictiva de esta teoría ha sido confirmada experimentalmente en numerosas ocasiones. Entre sus principales éxitos se encuentran la explicación de la precesión anómala del perihelio de Mercurio, la desviación gravitatoria de la luz, el corrimiento gravitacional al rojo, la existencia de agujeros negros y la reciente detección directa de ondas gravitacionales. Asimismo, la Relatividad General constituye el fundamento teórico de la cosmología moderna y permite describir la evolución dinámica del universo a gran escala.

Uno de los aspectos más relevantes de la teoría es la existencia de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein. Estas soluciones representan diferentes geometrías del espacio-tiempo compatibles con determinadas distribuciones de materia y energía, y permiten estudiar fenómenos físicos de enorme interés tanto desde el punto de vista matemático como físico. Entre ellas, las soluciones con simetría esférica ocupan un lugar especialmente destacado debido a la considerable simplificación que esta simetría introduce en las ecuaciones de campo. Bajo hipótesis adicionales, como la estaticidad, el problema puede reducirse a la determinación de un número reducido de funciones de una coordenada radial. Esta simplificación permite obtener soluciones exactas y estudiar de manera explícita propiedades geométricas y causales del espacio-tiempo, entre ellas la posible aparición de horizontes.

La primera solución exacta de vacío con simetría esférica fue obtenida por Karl Schwarzschild en 1916 [2]. La solución de Schwarzschild constituye el ejemplo más sencillo de agujero negro. En este caso aparece un horizonte de sucesos en $r = 2M$, mientras que $r = 0$ corresponde a una singularidad física de curvatura. El estudio de esta solución proporciona así el punto de partida para analizar posteriormente geometrías más complejas obtenidas mediante la incorporación de nuevos parámetros físicos.

Posteriormente, Hans Reissner y Gunnar Nordström generalizaron esta solución incorporando la presencia de carga eléctrica. La solución de Reissner–Nordström presenta una estructura de horizontes más compleja que la solución de Schwarzschild, cuya naturaleza depende de la relación entre la masa y la carga. Según los valores de estos parámetros, pueden aparecer dos horizontes distintos, un único horizonte degenerado o la ausencia de horizontes. El caso en el que los dos horizontes coinciden recibe el nombre de caso extremo y constituye la situación límite entre las configuraciones con dos horizontes y aquellas en las que estos desaparecen. Esta solución introduce, por tanto, el concepto de extremalidad que desempeñará un papel fundamental en el análisis posterior de las soluciones de Schwarzschild–de Sitter y de Reissner–Nordström Anti-de Sitter.

Otra generalización natural de las ecuaciones de Einstein consiste en introducir la constante cosmológica Λ . Aunque este término fue incorporado originalmente por Einstein en un contexto cosmológico, actualmente desempeña un papel fundamental en el estudio

de diferentes soluciones de las ecuaciones de campo. En ausencia de materia, las soluciones máximamente simétricas de las ecuaciones de Einstein son el espacio de De Sitter para $\Lambda > 0$ y el espacio Anti-de Sitter para $\Lambda < 0$. Ambas soluciones presentan propiedades geométricas y causales diferentes. En las coordenadas estáticas, el espacio de De Sitter presenta un horizonte cosmológico que limita la región en la que un observador puede enviar señales causales a otro. Por el contrario, el espacio Anti-de Sitter puro no presenta un horizonte cosmológico y posee una estructura asintótica diferente.

La incorporación simultánea de masa, carga eléctrica y una constante cosmológica negativa conduce finalmente a la solución de Reissner-Nordström-Anti-de Sitter. Esta solución reúne los distintos ingredientes introducidos progresivamente en los casos anteriores y constituye el objeto principal de estudio de este trabajo. La presencia conjunta de los parámetros asociados a la masa, la carga eléctrica y la constante cosmológica da lugar a una estructura de horizontes cuya naturaleza depende de la relación existente entre ellos.

Un aspecto especialmente relevante en este trabajo es el concepto de extremalidad. Matemáticamente, esta situación corresponde a la aparición de una raíz degenerada de la función métrica. El estudio de las condiciones bajo las cuales se produce esta degeneración permite determinar los valores de los parámetros que separan las distintas configuraciones posibles y constituye una parte central del análisis desarrollado en este trabajo.

El concepto de horizonte desempeña un papel central en el estudio de estas soluciones. En las métricas estáticas y esféricamente simétricas, la localización de los posibles horizontes puede estudiarse a partir de los ceros de la función métrica $f(r)$. El análisis de sus raíces permite determinar el número y la posición de los horizontes y estudiar cómo estas propiedades se modifican al introducir sucesivamente la carga eléctrica y la constante cosmológica. Este procedimiento resulta especialmente relevante en la solución de Reissner Nordström Anti de Sitter. En este caso, las configuraciones extremales corresponden a la aparición de una raíz degenerada $r = r_e$ de la función métrica, por lo que satisfacen simultáneamente las condiciones $f(r_e) = 0$, $f'(r_e) = 0$. Cuando dos raíces simples de la función métrica coinciden, el cero resultante es una raíz degenerada. En particular, si $r = r_e$ es una raíz doble, la función métrica puede escribirse localmente en la forma $f(r) = (r - r_e)^2 g(r)$, donde $g(r_e) \neq 0$. Por tanto, tanto la función como su primera derivada se anulan en $r = r_e$, dando lugar a las condiciones anteriores las cuales, proporcionan un criterio para determinar los valores críticos de los parámetros de la solución y distinguir las diferentes configuraciones de horizontes.

El objetivo principal de este Trabajo Fin de Máster es estudiar la estructura de horizontes de la solución de Reissner-Nordström-Anti-de Sitter, prestando especial atención a la determinación de sus condiciones de extremalidad. Para alcanzar este objetivo se analizarán previamente distintas soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein con simetría esférica, introduciendo de forma progresiva los diferentes parámetros físicos que intervienen en la solución final.

En primer lugar, se estudiará la solución de Schwarzschild como caso básico caracterizado por el parámetro de masa. En segundo lugar, la incorporación de carga eléctrica conducirá a la solución de Reissner-Nordström, donde aparece el concepto de extremalidad mencionado anteriormente. Por otra parte, la introducción de la constante cosmológica permitirá analizar los espacios de De Sitter y Anti-de Sitter, así como las correspondientes soluciones de Schwarzschild-(Anti)-de Sitter. Finalmente, estos elementos se combinarán en la solución de Reissner-Nordström-Anti-de Sitter. Para esta geometría se estudiará la ecuación que determina la posición de los horizontes, las condiciones que conducen a configuraciones extremales y la dependencia del número de horizontes respecto de los

parámetros de la solución. De este modo, las soluciones consideradas previamente servirán como casos progresivamente más complejos que permitirán interpretar los resultados obtenidos para Reissner Nordström Anti-de Sitter.

El trabajo se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos geométricos y físicos de la Relatividad General necesarios para el desarrollo posterior, prestando especial atención a las ecuaciones de Einstein, la constante cosmológica y los conceptos relacionados con los horizontes y la estructura causal. En el Capítulo 3 se estudia la solución de Schwarzschild, que constituye el punto de partida para el análisis de las soluciones estáticas y esféricamente simétricas consideradas posteriormente. En el Capítulo 4 se incorpora la carga eléctrica mediante la solución de Reissner-Nordström, analizando sus singularidades y su estructura de horizontes, incluido el caso extremal. En el Capítulo 5, se introduce la constante cosmológica y se analizan los espacios de De-Sitter y Anti-de Sitter, así como las soluciones de Schwarzschild-de-Sitter y Schwarzschild-Anti-de Sitter, con el objetivo de estudiar la influencia del signo de la constante cosmológica sobre la aparición y naturaleza de los horizontes. Estos resultados proporcionan la base para el Capítulo 6, dedicado a la solución de Reissner-Nordström-Anti-de Sitter. En este capítulo se estudian las condiciones de extremalidad, el número de horizontes y la dependencia de estas propiedades respecto de los parámetros de la solución. Por último, en el Capítulo 7 se recogen las principales conclusiones del trabajo.

La constante cosmológica negativa modifica, por tanto, el comportamiento asintótico de la solución y el valor de la masa extremal, aunque se mantiene la misma estructura cualitativa respecto a la desaparición de los horizontes en el régimen sobreextremal.

7. Conclusiones

En este Trabajo Fin de Máster se ha realizado un estudio comparativo de los horizontes de diversas soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein con simetría esférica. El objetivo principal ha consistido en analizar cómo la incorporación de distintos parámetros físicos modifica la geometría del espacio-tiempo y, en particular, la naturaleza y el número de horizontes que podían aparecer.

El punto de partida ha sido la solución de Schwarzschild, que representa el modelo más sencillo de agujero negro dentro de la Relatividad General. A partir de las ecuaciones de Einstein en vacío se obtuvo la métrica correspondiente y se comprobó que el espacio-tiempo presenta una única singularidad física situada en $r = 0$, mientras que la superficie $r = 2M$ constituye únicamente una singularidad de coordenadas. El estudio de las geodésicas radiales nulas permitió interpretar esta superficie como un horizonte de eventos, estableciendo la primera conexión entre la geometría del espacio-tiempo y su estructura causal.

Posteriormente, se estudió la influencia de la carga eléctrica mediante las ecuaciones de Einstein-Maxwell. La solución de Reissner-Nordström mostró que la energía asociada al campo electromagnético modifica la causalidad del espacio-tiempo. A diferencia del caso de Schwarzschild, pueden aparecer dos horizontes distintos: un horizonte exterior y otro horizonte interior, ambos de eventos. El análisis permitió distinguir claramente los regímenes sobreextremal, extremal y subextremal, observándose que únicamente los dos últimos describen auténticos agujeros negros. Además, incorporamos un nuevo método para encontrar la condición de extremalidad resolviendo conjuntamente el sistema $f(r) = 0$ y $f'(r) = 0$, comprobando que se verificaban los mismos resultados que analizando el discriminante de la ecuación de segundo grado.

Posteriormente se analizó el efecto de la constante cosmológica. Las soluciones de De Sitter y Anti-de Sitter mostraron que el signo de Λ desempeña un papel decisivo en la estructura global del espacio-tiempo. En el caso de De Sitter, una constante cosmológica positiva genera un horizonte cosmológico asociado a la expansión acelerada del universo, mientras que el espacio Anti-de Sitter, caracterizado por una constante cosmológica negativa, carece completamente de dicho horizonte. Este resultado pone de manifiesto que la presencia de horizontes no depende únicamente de la existencia de masa o campo electromagnético, sino también de la geometría global del espacio-tiempo.

La incorporación simultánea de masa y constante cosmológica dio lugar a las soluciones de Schwarzschild-de Sitter y Schwarzschild-Anti-de Sitter. En el primer caso se comprobó la coexistencia de un horizonte de eventos y un horizonte cosmológico, delimitando una región estática comprendida entre ambas superficies. En cambio, la solución de Schwarzschild-Anti-de Sitter mantiene un único horizonte de sucesos, modificándose únicamente su posición debido al efecto de la constante cosmológica negativa.

Finalmente, se abordó la solución de Reissner-Nordström-Anti-de Sitter, que constituye la geometría más general de las estudiadas en este trabajo. Esta solución incorpora simultáneamente la masa, la carga eléctrica y una constante cosmológica negativa, permitiendo analizar de forma conjunta los efectos estudiados por separado en las soluciones anteriores. El estudio de la función métrica y de su condición de extremalidad permitió obtener un valor crítico de la masa M_e , dependiente de la carga y del radio de curvatura Anti-de Sitter. De este modo, se distinguieron tres regímenes diferentes. Para $M > M_e$ aparecen dos horizontes, uno interior y otro exterior; para $M = M_e$ ambos coinciden en un único horizonte degenerado; mientras que para $M < M_e$ desaparecen las raíces

reales positivas y la singularidad no queda oculta tras un horizonte de eventos. Este comportamiento conserva cualitativamente la clasificación obtenida para Reissner-Nordström, aunque la constante cosmológica negativa modifica tanto la condición de extremalidad como el comportamiento asintótico del espacio-tiempo. En particular, para grandes valores de r domina el término asociado a la geometría Anti-de Sitter y no aparece un horizonte cosmológico.

Desde un punto de vista geométrico, uno de los resultados más relevantes del trabajo consiste en comprobar que los horizontes no corresponden, en general, a singularidades físicas del espacio-tiempo. Como vimos al analizar el caso de Schwarzschild, el cálculo de los invariantes de curvatura permitió distinguir claramente entre singularidades reales de la geometría y singularidades asociadas únicamente a la elección del sistema de coordenadas. Este hecho pone de manifiesto la importancia de los invariantes geométricos como herramienta para caracterizar la estructura del espacio-tiempo de forma independiente de las coordenadas utilizadas.

Asimismo, el análisis comparativo realizado permite identificar el papel desempeñado por cada uno de los parámetros considerados. La masa, la carga eléctrica y la constante cosmológica no actúan de forma independiente, sino que su combinación determina la existencia, posición y naturaleza de los horizontes. La introducción de carga eléctrica permite la aparición de una estructura con horizonte interior y exterior y da lugar a los regímenes subextremal, extremal y sobreextremal. Por su parte, la constante cosmológica modifica el comportamiento asintótico del espacio-tiempo: para $\Lambda > 0$ puede aparecer un horizonte cosmológico, mientras que para $\Lambda < 0$ las soluciones estudiadas presentan un comportamiento asintótico Anti-de Sitter sin horizonte cosmológico.

En conjunto, los resultados obtenidos muestran que la estructura causal de un espacio-tiempo constituye una consecuencia directa de la interacción entre la geometría y las fuentes presentes en las ecuaciones de Einstein. Pequeñas modificaciones en los parámetros físicos producen cambios cualitativos en el número y naturaleza de los horizontes, dando lugar a espacios-tiempo con propiedades causales profundamente diferentes.

Por último, este trabajo puede considerarse como una base para estudios más avanzados relacionados con la física de agujeros negros. Entre las posibles líneas de continuación cabe destacar en primer lugar la solución de Reissner-Nordström Anti-de Sitter que por falta de tiempo no ha sido analizada en el presente trabajo. Otras posibles líneas futuras de investigación podrían ser el análisis de soluciones con rotación, como la métrica de Kerr o Kerr-Newman, el estudio de diagramas conformes de Penrose para representar la estructura causal global de estos espacios-tiempo o la investigación de las propiedades termodinámicas de agujeros negros Anti-de Sitter y su relación con la correspondencia AdS/CFT. Estas cuestiones continúan siendo objeto de intensa investigación en Relatividad General y Gravedad Cuántica, lo que pone de manifiesto la vigencia e interés de las soluciones estudiadas en este trabajo.

En definitiva, este trabajo pone de manifiesto que la estructura causal de un espacio-tiempo no es una propiedad fija, sino el resultado de la interacción entre la masa, la carga eléctrica y la constante cosmológica. Cada uno de estos parámetros modifica la geometría de una manera diferente, alterando el número y la naturaleza de los horizontes y, con ello, las regiones del universo que pueden mantener una relación causal entre sí. Desde la simplicidad de la solución de Schwarzschild hasta la riqueza geométrica de Reissner-Nordström-Anti-de Sitter, todas las soluciones analizadas ilustran cómo las ecuaciones de Einstein son capaces de describir una extraordinaria variedad de estructuras espacio-temporales a partir de un mismo marco teórico.