



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

Escuela Internacional de Posgrado

**MÁSTER UNIVERSITARIO EN
FÍSICA Y MATEMÁTICAS - FISYMAT**

TRABAJO FIN DE MASTER

**UNA SOLUCIÓN ESFÉRICAMENTE
SIMÉTRICA Y ESTÁTICA
PARA GRAVEDAD
EINSTEIN-HILBERT-GAUSS-BONNET**

Presentado por:
D. Jose María García Arcas

Tutorizado por:
Dr. Bert Janssen
Dr. Alejandro Jiménez Cano

Curso Académico 2025/2026

Abstract

Motivated by the search for corrections to General Relativity, this work is centered on the study of the second Lovelock term, the Gauss–Bonnet action, and its interaction with the Einstein–Hilbert action in dimensions greater than four. The Gauss–Bonnet action is of particular interest because it is the simplest one, beyond the Einstein–Hilbert action, that yields second-order equations of motion.

The general static and spherically symmetric solutions are obtained for Einstein–Hilbert gravity, Einstein–Hilbert gravity with the cosmological constant, Gauss–Bonnet gravity and Einstein–Hilbert–Gauss–Bonnet gravity. For each of these theories, their Newtonian limits, masses, singularities, and event and cosmological horizons are analyzed. The results obtained from the previous solutions are going to be used to understand and analyze the solution for Einstein–Hilbert–Gauss–Bonnet gravity, which is the final objective of this work.

Resumen

Motivado por la búsqueda de correcciones a la relatividad general, este trabajo se centra en el estudio del segundo término de Lovelock, la acción de Gauss-Bonnet, y su interacción con la acción de Einstein-Hilbert para dimensiones mayores a cuatro. El interés que radica la acción de Gauss-Bonnet es que es el término más simple, después de la acción de Einstein-Hilbert, del cual se obtienen ecuaciones de movimiento de segundo orden.

Se encuentran las soluciones generales para simetría esférica y espaciotiempo estático en las teorías de gravedad de Einstein-Hilbert, Einstein-Hilbert junto a la constante cosmológica, Gauss-Bonnet y Einstein-Hilbert-Gauss-Bonnet. Se estudian en cada una de ellas sus límites newtonianos, masas, singularidades y horizontes de eventos y cosmológicos. Se usarán los resultados del estudio de las soluciones previas para entender y analizar la solución en la teoría de gravedad de Einstein-Hilbert-Gauss-Bonnet, objetivo final de este trabajo.

Índice

1	Introducción	5
2	Las teorías Lovelock	7
3	Espaciotiempos relevantes y sus simetrías	9
3.1	Espaciotiempos máximamente simétricos	9
3.2	El Ansatz esféricamente simétrico y estático	10
4	Cálculo variacional	11
4.1	Acción de Einstein-Hilbert	11
4.2	Acción de Gauss-Bonnet	13
4.3	Aplicación del Ansatz	15
5	Teorías de gravedad con el término de Einstein-Hilbert	17
5.1	Solución de vacío	17
5.1.1	Derivación de la solución	17
5.1.2	Límite newtoniano	18
5.1.3	Singularidad central	19
5.1.4	Búsqueda de horizontes	20
5.2	Solución con constante cosmológica	21
5.2.1	Derivación de la solución	21
5.2.2	Límites de la solución	22
5.2.3	Búsqueda de horizontes	22
6	Teorías de gravedad con el término de Gauss-Bonnet	24

6.1	Solución de vacío en la teoría de gravedad Gauss-Bonnet	24
6.1.1	Derivación de la solución	24
6.1.2	Análisis de la solución	25
6.2	Solución de vacío en la teoría de gravedad Einstein-Hilbert-Gauss-Bonnet	26
6.2.1	Derivación de la solución	26
6.2.2	Límites de la solución	28
6.2.3	Búsqueda de horizontes	29
7	Conclusiones	30

1 Introducción

En 1915 Albert Einstein publicó el artículo [1] en el que presentó la teoría de la relatividad general (GR), la cual describe el universo como un espaciotiempo cuya dinámica viene descrita mediante la ecuación de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

que es, en el fondo, el sistema de ecuaciones de movimiento de la métrica $g_{\mu\nu}$ del espaciotiempo. David Hilbert demostró [2] que estas se podían obtener mediante cálculo variacional desde la acción Einstein-Hilbert (EH),

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_{mat} \right]. \quad (1.2)$$

Karl Schwarzschild publicó la primera solución exacta de estas ecuaciones [3]. La solución de Schwarzschild se calculó imponiendo al espaciotiempo las condiciones de que fuera esféricamente simétrico, estático y vacío. Con esta se logró describir unos objetos con tal atracción gravitatoria que ni siquiera la luz podía escapar de ellos, los conocidos agujeros negros. Pero es en estos donde se encuentra una de las primeras controversias de GR.

En el límite en que la coordenada radial va a cero en la solución de Schwarzschild la curvatura del espaciotiempo aumenta, divergiendo en el límite a radio nulo. Se trata de una singularidad, un punto en el que la métrica no está definida. Las fuerzas de marea en sus inmediaciones se vuelven infinitas y cualquier observador que entre en ella desaparece del espaciotiempo. Es por esto que las singularidades no son deseables en una teoría fundamental como lo es GR y Schwarzschild no es la única solución en la que aparecen. Esto motiva la búsqueda de correcciones a la teoría que puedan solventar estos problemas de manera adecuada.

El ámbito de este trabajo se limitará al estudio de correcciones gravitatorias, sin introducir nuevas fuerzas o interacciones, donde el lagrangiano debe ser función exclusivamente de la métrica. Lo único, por tanto, que se puede hacer es añadir o quitar términos de curvatura a la acción de Einstein-Hilbert (1.2), concretamente escalares de curvatura.

Sin embargo, las ecuaciones de movimiento (EOM) obtenidas pueden resultar problemáticas. Las nuevas acciones darán, en general, ecuaciones diferenciales de orden superior a dos, pero todas las teorías físicas fundamentales se formulan con EOM de segundo orden. La necesidad de que se cumpla esta condición se demuestra a través del teorema de Ostrogradski [4], la presencia de derivadas temporales de tercer orden o superior en las EOM de una teoría fundamental la hacen inviable (más detalles en la sección 2).

En 1971 David Lovelock [5] demuestra que la variación de la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\frac{1}{2\kappa} R - \Lambda + \mathcal{L}_{mat} + \tilde{\lambda} \left(R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma R^{\mu\nu\rho}{}_\sigma \right) \right] \quad (1.3)$$

genera el sistema de EOM de segundo orden más general para el espaciotiempo cuadridimensional. Esta acción se corresponde con (1.2), con la adición de la constante cosmológica Λ [6] y el término de Gauss-Bonnet, entre paréntesis.

El término de Gauss-Bonnet (GB), formado por una combinación concreta de los tres posibles escalares de curvatura de orden dos, es la característica cuadridimensional de Euler. La expresión en cuatro dimensiones se trata de una derivada total, de modo que no da lugar a nueva dinámica en las EOM. Su inclusión, por tanto, no es relevante a la hora de estudiar posibles soluciones cuadridimensionales.

Por el contrario, si se aumenta el número de dimensiones espaciales el término de GB se vuelve dinámico. Esto es lo que estudia el trabajo [7], donde se imponen las condiciones de simetría esférica y espaciotiempo estático y vacío de la solución de Schwarzschild a las EOM provenientes del término de GB. Sin embargo, no logra dar un valor de masa a la solución que obtiene, como si se puede hacer con la de Schwarzschild, dificultando su interpretación. Propone la posibilidad de que la presencia del término EH sea condición necesaria para obtener un valor de la masa y, siguiendo su propuesta, este trabajo se va a centrar en imponer las mismas condiciones a la acción que combina los términos de EH y GB, la acción Einstein-Hilbert-Gauss-Bonnet (EHGB). Se obtendrán y analizarán sus soluciones como paso previo al estudio del término GB como posible corrección a GR.

El espaciotiempo en el que se va a trabajar será una variedad lorentziana de dimensión arbitraria $D \geq 4$ con signatura $(+ - \dots -)$. Se utilizarán unidades naturales y la notación de Einstein de sumatoria sobre índices contrapuestos repetidos donde los índices griegos recorren todas las D coordenadas y los latinos las $D - 2$ coordenadas angulares para las coordenadas esféricas. Como conexión se utilizará la de Levi-Civita. Para el tensor de curvatura de Riemann se va a emplear el convenio [8]

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda \equiv \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\gamma \quad (1.4)$$

y el tensor de Ricci y el escalar de Ricci como

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\rho\nu}{}^\rho \quad \text{y} \quad R \equiv R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

El trabajo se organizará de la siguiente forma: la sección 2 desarrollará la teoría de Lovelock y calculará el término de Gauss-Bonnet; en la sección 3 se estudiarán los espacios máximamente simétricos por su relevancia en el resto del artículo y se presentará el Ansatz esféricamente simétrico y estático; en la sección 4 se realizará el cálculo variacional de los términos EH y GB obteniendo las correspondientes EOM en vacío para, posteriormente, imponer sobre ellas el Ansatz; la sección 5 calculará y estudiará las soluciones obtenidas a partir del término EH exclusivamente, primero en solitario y después en presencia de constante cosmológica no

nula; y en la sección 6 se calcularán y estudiarán las soluciones obtenidas de la acción del término GB y, finalmente, de la acción EHGB. Las conclusiones del trabajo serán recogidas en la sección 7.

2 Las teorías Lovelock

Nuestra búsqueda de correcciones para GR parte del teorema de Ostrogradski [4]. Este se puede enunciar como la necesidad de que las EOM de una teoría fundamental sean, como máximo, de segundo orden en derivadas temporales, como sucede en la ecuación de Einstein (1.1). Si esta condición no se cumple, en general, la teoría presenta inestabilidades dinámicas que la hacen inviable.

Todos los lagrangianos que se van a construir estarán compuestos de los escalares de curvatura derivados del tensor de Riemann, así que contendrán segundas derivadas de la métrica de las que se obtendrán, en general, EOM de cuarto orden. Por tanto, se buscan concretamente aquellos lagrangianos que se encuentren degenerados para que las EOM que se deduzcan de estos sean de segundo orden. El teorema de Lovelock [5] conduce a que la forma más general que estas EOM de segundo orden pueden tomar en cuatro dimensiones es

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} - \kappa\Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

que es la ecuación de Einstein (1.1) con la adición de la constante cosmológica Λ .

Como ya se vio en la introducción, a la acción se puede añadir el término de GB

$$\tilde{\lambda} \left(R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}R^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma} \right), \quad (2.2)$$

debido a que, al tratarse de una derivada total en cuatro dimensiones, no altera las EOM resultantes. Pero si se aumenta el número de dimensiones se vuelve un término dinámico, alterando la forma de las EOM pero manteniéndolas de segundo orden.

Que este término sea un polinomio formado por una combinación lineal de los invariantes de curvatura de orden dos no es una casualidad, el término de EH también está formado por el único invariante de curvatura de orden uno, el escalar de Ricci. En general, para cualquier dimensión par D se puede añadir un polinomio de orden $D/2$ que es una derivada total para esa dimensión, pero que se vuelve dinámico para dimensiones superiores, cumpliendo la propiedad de que de su cálculo variacional se obtienen EOM de segundo orden. Cada uno de estos términos se trata de una combinación lineal concreta de escalares de curvatura de un mismo orden.

Para $D = 5$ se puede resolver directamente la ecuación (6.24), dando

$$r_H = \sqrt{\frac{4M - \alpha}{2}}. \quad (6.25)$$

Solo si se cumple que $4M > \alpha$ existirá un horizonte de eventos. Esta es también la condición de que el valor de la métrica para el límite (6.21) con $D = 5$ sea negativo en $\sigma = -1$.

Para la rama $\sigma = 1$ no hay horizontes para el caso $\alpha > 0, M \geq 0$. Como sucedió en GB, al no poder dar interpretación a la constante M , también se tiene que tener en cuenta el caso $M \leq 0, \alpha < 0$, como se ve en [15]. Aquí, para $r > \sqrt{|\alpha|}$ los signos a cada lado de la igualdad son opuestos, no hay horizontes en ese rango. Al contrario, para $r < \sqrt{|\alpha|}$ si se igualan los signos y se puede llegar de nuevo a la expresión (6.24). Sin embargo, el polinomio no sería monótono y su resolución sería muy compleja, así que en este trabajo no se va a realizar. Al menos se puede afirmar que hay como máximo $D - 3$ horizontes, por ser (6.24) un polinomio de orden $D - 3$, y como mínimo un horizonte cosmológico, ya que para este caso g_{tt} tiende a infinito para $r \rightarrow 0$ y a menos infinito para $r \rightarrow \infty$.

Resumiendo, para la rama $\sigma = -1$ la singularidad solo está desnuda si $4M \leq \alpha$ y $D = 5$, para el resto de casos contiene un horizonte de eventos. Para $\sigma = 1$ la singularidad está desnuda si $M > 0$, con $M < 0$ contiene como mínimo un horizonte cosmológico y como máximo $D - 3$ horizontes, todos a radios $r < \sqrt{|\alpha|}$.

Concluido el análisis de EHGB, termina aquí todo el desarrollo del trabajo y se pasa a dar las conclusiones finales de todos los análisis realizados.

7 Conclusiones

El trabajo se ha comenzado planteando una problemática de la relatividad general, la existencia de una singularidad física en la solución de Schwarzschild, motivando así el estudio de correcciones de la teoría. Se ha propuesto añadir a la acción el término de Gauss-Bonnet debido a que al solo obtenerse de él ecuaciones de movimiento de segundo orden se evitan las inestabilidades predichas por el teorema de Ostrogradski.

Tras introducir la teoría de Lovelock y el Ansatz esféricamente simétrico y estático, el estudio se ha limitado a los tres primeros términos de Lovelock: la constante cosmológica, la acción de Einstein-Hilbert y la acción de Gauss-Bonnet. Se han obtenido las EOM de las combinaciones EH, Λ EH, GB y EHGB; esta última es el foco principal del trabajo y se ha estudiado a modo de continuación del trabajo

[7]. Todas estas EOM se han resuelto para el caso de simetría esférica y espacio-tiempo estático.

Primero se ha estudiado el caso solo con el término de Einstein-Hilbert. Aquí se ha obtenido la solución de Schwarzschild-Tangherlini (5.6). Se ha comprobado que su límite en el infinito es el espaciotiempo plano de Minkowski y, por tanto, se ha realizado el límite newtoniano para obtener el valor de su masa. También se ha comprobado que en $r = 0$ hay una singularidad física que se encuentra rodeada por un horizonte de eventos que protege al resto del universo de la influencia desconocida de la singularidad, como exige la conjetura del censor cósmico de Penrose [12].

Combinando Einstein-Hilbert con la constante cosmológica, Λ , se llega al espaciotiempo de Schwarzschild-(anti)-De Sitter (5.19) [13]. En su límite en el infinito toma la forma del espaciotiempo de (anti)-De Sitter, por ello no se ha podido calcular el límite newtoniano. Siempre hay una singularidad física en $r = 0$ para $D \geq 4$ pero los horizontes cambian según el signo de Λ . Para $\Lambda < 0$ hay un único horizonte de eventos conteniendo a la singularidad. Para $\Lambda > 0$ hay tres casos dependiendo de la relación (5.26) entre la constante de integración y Λ : hay un horizonte de eventos y uno cosmológico, el segundo envolviendo al primero; ambos se combinan; o no hay ninguno y la singularidad central está desnuda.

Estudiando solo el término de GB se encuentra la solución de Cai-Ohta (6.6) [14], similar a Schwarzschild para $D \geq 5$, pero su masa no puede ser calculada debido a, según [7], la ausencia del término de Einstein-Hilbert en la acción, a pesar de que su límite en el infinito es el espaciotiempo de Minkowski. Debido a esto no se le ha podido dar interpretación a su constante de integración C . En su centro reside una singularidad física para $D > 5$, que solo se encuentra contenida por un horizonte de eventos si $C < 0$, sino está desnuda.

Finalmente, se ha resuelto el objetivo de este trabajo, continuación de [7], la solución para la teoría de gravedad Einstein-Hilbert-Gauss-Bonnet (6.17), conocida como la solución de Boulware-Deser [15]. Esta es más compleja, surgiendo dos ramas diferenciadas por el signo de σ . En ambas ramas la singularidad central es física. En el límite a radio nulo la métrica toma la forma de la solución para la teoría que solamente incluye el término de Gauss-Bonnet.

En la rama $\sigma = 1$ la métrica tiende a (anti)-De Sitter a radios altos, haciendo imposible el límite newtoniano y el cálculo de la masa. Este resultado demuestra que la presencia de la acción de Einstein-Hilbert no asegura que se pueda calcular la masa. Para $M > 0$ no existen horizontes, presentando una singularidad desnuda. Sin embargo, el caso $M < 0$ siempre tiene como mínimo un horizonte cosmológico y como máximo $D - 3$ horizontes. La aparición del espaciotiempo de (anti)-De Sitter sin la necesidad de la presencia de la constante cosmológica se debe a la interacción entre los términos EH y GB. Según [16], esta solución presenta inestabilidades de tipo *ghost* que no son deseables en una teoría física fundamental. La

presencia de estas inestabilidades se puede intuir al coger en el desarrollo (6.18) los tres primeros términos, se tiene así un S(A)dS con masa negativa. Lo exótico de este resultado y su inestabilidad hacen que su estudio más en profundidad sea de poco interés físico.

En la rama $\sigma = -1$ la métrica tiende Schwarzschild a radios altos, permitiendo calcular de la misma manera su límite newtoniano y obtener su masa, reforzando la afirmación de [7] de la necesidad del término EH para que exista el límite newtoniano. Presenta un horizonte de eventos en todos los casos salvo para $D = 5$ y $4M \leq \alpha$, donde la singularidad se encuentra desnuda. Su gran similitud en estructura con la solución de Schwarzschild-Tangherlini, especialmente para acoplamiento débil $\alpha \ll 1$, la hace un gran candidato para analizar la validez del término de Gauss-Bonnet como corrección a la relatividad general. El estudio de los horizontes de manera más profunda, buscando cambios de coordenadas que muestren su dinámica y su naturaleza como singularidades de coordenadas, es un siguiente paso natural de lo aquí realizado. Otra posible dirección de trabajo podría ser seguir la búsqueda de sistemas de coordenadas que completen el espaciotiempo, como en el caso de Schwarzschild que su representación completa contiene un agujero negro, un agujero blanco y dos universos paralelos [8]. El siguiente gran paso a dar es añadir a la acción EHGB el término 3 de Lovelock y estudiar su solución esféricamente simétrica y estática, en la que hay esperanzas, por [7], de encontrar la masa del sistema.

Referencias

- [1] Albert Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 844–847, 1915.
- [2] David Hilbert. Die grundlagen der physik. *Mathematische Annalen*, 92(1):1–32, 1924.
- [3] Karl Schwarzschild. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 189–196, 1916.
- [4] Hayato Motohashi and Teruaki Suyama. Third order equations of motion and the ostrogradsky instability. *Physical Review D*, 91(8):085009, 2015.
- [5] David Lovelock. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *Journal of Mathematical Physics*, 13(6):874–876, 1972.
- [6] Albert Einstein. Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie. In *Das Relativitätsprinzip: Eine Sammlung von Abhandlungen*, pages 130–139. Springer, 1917.
- [7] José Adrián Castelo Martínez. Soluciones esféricamente simétricas y estáticas en gravedad de Gauss-Bonnet. *Universidad de Granada*, 2018.
- [8] Bert Janssen. *Teoría de la relatividad general*. Universidad de Granada, 2013.
- [9] David Lovelock. The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3):498–501, 1971.
- [10] Willem De Sitter. On the relativity of inertia. remarks concerning einstein’s latest hypothesis. *Proc. Kon. Ned. Acad. Wet*, 19(2):1217–1225, 1917.
- [11] Christian Cherubini, Donato Bini, Salvatore Capozziello, and Remo Ruffini. Second order scalar invariants of the riemann tensor: applications to black hole spacetimes. *International Journal of Modern Physics D*, 11(06):827–841, 2002.
- [12] Roger Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Nuovo Cimento Rivista Serie*, 1:252, 1969.
- [13] Miguel Socolovsky. Schwarzschild black hole in anti-de sitter space. *arXiv preprint arXiv:1711.02744*, 2017.
- [14] Rong-Gen Cai and Nobuyoshi Ohta. Black holes in pure lovelock gravities. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 74(6):064001, 2006.
- [15] David G Boulware and Stanley Deser. String-generated gravity models. *Physical Review Letters*, 55(24):2656, 1985.

-
- [16] Cecilia Garraffo and Gaston Giribet. The lovelock black holes. *Modern Physics Letters A*, 23(22):1801–1818, 2008.