Trabajo Fin de Máster

# Vectores de Killing en métricas FRW

Raúl Belmonte Aix

2024-2025

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Tutor: Bert Janssen

*Máster en Física y Matemáticas(FisyMat)*

*Universidad de Granada*

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

# Declaración de originalidad de Trabajo Fin de máster
# Máster en Física y Matemáticas (FisyMat)

**Raúl Belmonte Aix**, con DNI/Pasaporte n.º **29524991Y**, autor del trabajo de fin máster con el título *Vectores de Killing en métricas FRW*, declara la originalidad de este trabajo presentado para su defensa y evaluación en el Máster en Física y Matemáticas en el curso 2024/2025, en el que se han respetado los derechos de otros autores a ser citados.

Granada, 29 de Junio de 2025

Fdo:

29524991Y

## Resumen

El estudio de las simetrías es un tema de gran relevancia en distintas disciplinas de la física y las matemáticas. En este trabajo se profundizará en el estudio de las simetrías en Variedades Diferenciales y en la teoría de la Relatividad General. En concreto, se estudiarán las simetrías para el caso de métricas cosmológicas *FRW* y revisaremos cuántas simetrías asociadas habrá en función de la forma de la métrica *FRW*. Se considerarán métricas de especial interés en física teórica y matemática por el número de simetrías que presentan.



## Abstract

In physics and mathematics the study of symmetry has granted rewarding and valueble answers to the fields. In the present memory, we are going to study the role of symmetry in Manifolds and General Relativity. We are going to focus in the symmetry present in FRW metrics and study the amount of symmetry that these metrics present depending on the form of the metric. We will find some metrics which are very important in theoretical and mathematical physics due to its high symmetry properties.

# Índice

# 1. Introducción

El estudio de las simetrías juega un papel crucial en varias ramas de la física moderna y de las matemáticas. En física clásica y en teorías cuánticas las simetrías continuas están relacionadas con cantidades conservadas de los sistemas y han ayudado a resolver problemas fundamentales de estas ramas. Por otro lado, los grupos de Lie asociados a simetrías continuas son de gran importancia en teorías modernas como en física de partículas y han motivado diversos descubrimientos de gran importancia.

En la presente memoria se desarrolla el estudio de las simetrías continuas que presentan las variedades diferenciales a través del estudio de los *vectores de Killing*, unos vectores asociados intrínsecamente a las simetrías de las métricas en variedades. Como veremos, estas transformaciones formarán el álgebra de Lie de simetrías del espacio-tiempo y estarán estrechamente relacionadas con leyes de conservación de cantidades vectoriales en la teoría de la Relatividad General.

Concretamente, nos centraremos en el estudio de las simetrías de los modelos cosmológicos que son compatibles con las observaciones realizadas hasta el día de hoy sobre el universo. Matemáticamente esto implica que presentan métricas isotrópicas y homogéneas. Estos modelos denominados *modelos Friedmann-Robertson-Walker (FRW)* y son capaces de predecir la contracción o expansión del universo, en función de la curvatura del espacio y de una función $a(t)$ denominada *factor de escala* que queda determinada por el tipo de materia y energía presente en el universo que observamos. Estudiaremos los vectores de Killing asociados a las simetrías que presentan estos modelos en función de la forma de $a(t)$ y del signo de la curvatura espacio $k$. Estos modelos presentarán un mínimo de 6 simetrías asociadas al espacio por construcción, que podrán aumentar hasta un total de 10 en función de la forma que tome $a(t)$. Los casos con 10 simetrías, el número máximo que pueden presentar para $N = 4$ dimensiones del espacio-tiempo, se tratarán de espacios de gran importancia. Estos espacios son: el espacio de Minkowski, el espacio de De Sitter y el espacio de anti-De Sitter. Verificaremos que se tratan de espacios máximamente simétricos y obtendremos los vectores de Killing asociados a las simetrías de cada uno de estos espacios.

Para la resolución de este problema habremos de resolver una serie de ecuaciones diferenciales, cuya solución son los vectores de Killing. Con el objetivo de simplificar nuestro problema, en las primeras secciones se desarrollan algunos conceptos matemáticos que nos ayudarán a entender nuestro problema adecuadamente y que nos facilitarán su resolución. En particular, consideraremos una generalización de los vectores de Killing, *los vectores de Killing conformes*, que utilizaremos para simplificar nuestros cálculos cuando consideremos espacios de curvatura no nula.

La nomenclatura, notación y simbología usada es la siguiente:

- Convenio de suma de Einstein.
- La métrica de Minkowski $\eta$ se considerará de signatura $(1, N-1)$, un único valor positivo.

# 6. Conclusión

El desarrollo de las herramientas matemáticas necesarias en la sección §2 nos ha permitido obtener una serie de resultados matemáticos que han facilitado la resolución de las ecuaciones diferenciales asociados a los vectores de Killing en las métricas FRW.

Comprobamos que nuestro tratamiento nos ha permitido obtener los vectores de Killing asociados a las simetrías presentes en una métrica FRW (4.1) dada, con $a(t)$ siendo cualquier función matemática y un $k$ dado. Para casos donde $a(t) = 1$ nos encontramos con que hay un caso máximamente simétrico para secciones planas $k = 0$, Minkowski, mientras que para secciones curvas nos encontramos con un total de 7 simetrías asociadas, 7 vectores de Killing únicamente. Por otro lado, para casos donde $\dot{a}(t) \neq 0$ comprobamos que los que presentan 10 vectores de Killing, máximamente simétricos, para una $k$ dado son los que tienen un $a(t)$ solución de la ecuación $\ddot{a}a - \dot{a}^2 = kR_0^{-2}$. En caso de considerar un $a(t)$ que no cumpla con esta condición únicamente presentarán un total de 6 vectores de Killing. Estos 6 vectores de Killing son proporcionales a los vectores de Killing asociados a las métricas de las secciones espaciales, es decir, asociados a $\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3$ y $\mathbb{H}^3$ en función del valor de $k$. Debido a la construcción de las métricas FRW parece lógico que de no existir ninguna simetría asociada a $a(t)$, solo tengamos 6 vectores de Killing; de existir una simetría asociada al tiempo, obtengamos 7 vectores de Killing; o que existan simetrías asociadas al tiempo y al espacio y tengamos 10. Al ser métricas isotrópicas y homogéneas no tendría sentido que una dirección del espacio fuese privilegiada y existiesen 8 o 9 vectores de Killing.

Nuestro estudio se ha centrado en el uso de las coordenadas comóviles por su simpleza, pero una vez obtenidos los vectores de Killing en estas coordenadas la conversión es directa para cualquier otro tipo de coordenadas. Como comprobamos, la elección de estas coordenadas ha sido de gran utilidad, pues nos ha asegurado resultados relativamente sencillos y compactos.

Con estos resultados somos capaces de comprobar resultados bien conocidos sobre espacios cosmológicos con cierta simetría y espacios máximamente simétricos. Hemos sido capaces de obtener expresiones para los vectores de Killing asociados a las simetrías de estos espacios, interpretarlas y conocer qué condiciones han de cumplir para poder presentar un cierto número de simetrías. Además, gran parte de lo estudiado y desarrollado es aplicable al estudio de simetrías de otras variedades y muchas de las herramientas tratadas pueden servir para simplificar la resolución, como hemos visto en la sección §3.1.

# Referencias


[1] S. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2003.

[2] R. d'Inverno. *Introducing Einstein's relativity*. 1992.

[3] J. B. Hartle. *Gravity: An introduction to Einstein's general relativity*. 2003.

[4] B. Janssen. *Gravitación y geometría : una introducción moderna a la Teoría de la Relatividad General*. Manuales-Major. Ciencias. Editorial Universidad de Granada, Granada, 2022.

[5] A. A. J. KEANE. The role of isometries in cosmological models.

[6] J. M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Springer International Publishing, 2018.

[7] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. 2003. Bristol, UK: Hilger (1990) 505 p. (Graduate student series in physics).