La función gamma

La función gamma

La integral impropia $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ existe para valores estrictamente positivos de p, dando origen a la denominada *función gamma*, que representaremos por $\Gamma(p)$:

La función gamma

La integral impropia $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ existe para valores estrictamente positivos de p, dando origen a la denominada *función gamma*, que representaremos por $\Gamma(p)$:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \qquad p > 0.$$

La función gamma

La integral impropia $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ existe para valores estrictamente positivos de p, dando origen a la denominada *función gamma*, que representaremos por $\Gamma(p)$:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \qquad p > 0.$$

Propiedades

i) $\Gamma(1) = 1$.

ii) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $p > 0$.

iii) Si $p \in \mathbb{N}$, $\Gamma(p) = (p-1)!$.

iv) Si $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma(p+k) = p(p+1)\cdots(p+k-1)\Gamma(p)$.

v) Si $a > 0$, $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-ax}dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$.

vi) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

La función gamma

La integral impropia $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ existe para valores estrictamente positivos de p, dando origen a la denominada *función gamma*, que representaremos por $\Gamma(p)$:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \qquad p > 0.$$

Propiedades

i) $\Gamma(1) = 1$.

ii) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $p > 0$.

iii) Si $p \in \mathbb{N}$, $\Gamma(p) = (p-1)!$.

iv) Si $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma(p+k) = p(p+1)\cdots(p+k-1)\Gamma(p)$.

v) Si $a > 0$, $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-ax}dx = \dfrac{\Gamma(p)}{a^p}$.

vi) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Demostración:

La función gamma

La integral impropia $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ existe para valores estrictamente positivos de p, dando origen a la denominada *función gamma*, que representaremos por $\Gamma(p)$:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \qquad p > 0.$$

Propiedades

i) $\Gamma(1) = 1.$

ii) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $p > 0$.

iii) Si $p \in \mathbb{N}$, $\Gamma(p) = (p-1)!$.

iv) Si $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma(p+k) = p(p+1)\cdots(p+k-1)\Gamma(p)$.

v) Si $a > 0$, $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-ax}dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$.

vi) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Demostración:

i) A partir de la definición de la función gamma, se tiene

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx =$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \left[\begin{array}{lll} u = x^p, & \rightarrow & du = px^{p-1}dx \\ dv = e^{-x}dx, & \rightarrow & v = -e^{-x} \end{array} \right] =$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \left[\begin{array}{lll} u = x^p, & \rightarrow & du = px^{p-1} dx \\ dv = e^{-x} dx, & \rightarrow & v = -e^{-x} \end{array} \right] = \left[-x^p e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} px^{p-1} e^{-x} dx =$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \left[\begin{array}{lll} u = x^p, & \rightarrow & du = px^{p-1}dx \\ dv = e^{-x}dx, & \rightarrow & v = -e^{-x} \end{array} \right] = \left[-x^p e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} px^{p-1} e^{-x} dx =$$

$$= p \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx =$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \left[\begin{array}{lll} u = x^p, & \rightarrow & du = px^{p-1}dx \\ dv = e^{-x}dx, & \rightarrow & v = -e^{-x} \end{array} \right] = \left[-x^p e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} px^{p-1}e^{-x}dx =$$

$$= p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = p\Gamma(p).$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \left[\begin{array}{lll} u = x^p, & \rightarrow & du = px^{p-1}dx \\ dv = e^{-x}dx, & \rightarrow & v = -e^{-x} \end{array} \right] = \left[-x^p e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} px^{p-1}e^{-x}dx =$$

$$= p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = p\Gamma(p).$$

iii) Esta propiedad es inmediata a partir de los dos primeras.

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \left[\begin{array}{lll} u = x^p, & \rightarrow & du = px^{p-1}dx \\ dv = e^{-x}dx, & \rightarrow & v = -e^{-x} \end{array} \right] = \left[-x^p e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} px^{p-1}e^{-x}dx =$$

$$= p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = p\Gamma(p).$$

iii) Esta propiedad es inmediata a partir de los dos primeras.

iv) Esta propiedad es inmediata a partir de la segunda.

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \begin{bmatrix} u = x^p, & \to & du = px^{p-1}dx \\ dv = e^{-x}dx, & \to & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = \left[-x^p e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} px^{p-1}e^{-x}dx =$$

$$= p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = p\Gamma(p).$$

iii) Esta propiedad es inmediata a partir de los dos primeras.

iv) Esta propiedad es inmediata a partir de la segunda.

v) Haciendo el cambio de variable $u = ax$ en la integral que define a la función gamma se obtiene

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-ax}\,dx =$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \left[\begin{array}{lll} u = x^p, & \rightarrow & du = px^{p-1}dx \\ dv = e^{-x}dx, & \rightarrow & v = -e^{-x} \end{array} \right] = \left[-x^p e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} px^{p-1}e^{-x}dx =$$

$$= p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = p\Gamma(p).$$

iii) Esta propiedad es inmediata a partir de los dos primeras.

iv) Esta propiedad es inmediata a partir de la segunda.

v) Haciendo el cambio de variable $u = ax$ en la integral que define a la función gamma se obtiene

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-ax}\, dx = \left[\begin{array}{lll} u = a\,x & \rightarrow & x = u/a \\ & \rightarrow & dx = du/a \end{array} \right] =$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \left[\begin{array}{lll} u = x^p, & \rightarrow & du = px^{p-1}dx \\ dv = e^{-x}dx, & \rightarrow & v = -e^{-x} \end{array} \right] = \left[-x^p e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} px^{p-1}e^{-x}dx =$$

$$= p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = p\Gamma(p).$$

iii) Esta propiedad es inmediata a partir de los dos primeras.

iv) Esta propiedad es inmediata a partir de la segunda.

v) Haciendo el cambio de variable $u = ax$ en la integral que define a la función gamma se obtiene

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-ax}\, dx = \left[\begin{array}{lll} u = a\,x & \rightarrow & x = u/a \\ & \rightarrow & dx = du/a \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{a^{p-1}} e^{-u} \frac{du}{a} =$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \left[\begin{array}{lll} u = x^p, & \rightarrow & du = px^{p-1}dx \\ dv = e^{-x}dx, & \rightarrow & v = -e^{-x} \end{array} \right] = \left[-x^p e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} px^{p-1}e^{-x}dx =$$

$$= p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = p\Gamma(p).$$

iii) Esta propiedad es inmediata a partir de los dos primeras.

iv) Esta propiedad es inmediata a partir de la segunda.

v) Haciendo el cambio de variable $u = ax$ en la integral que define a la función gamma se obtiene

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-ax}\, dx = \left[\begin{array}{lll} u = a\,x & \rightarrow & x = u/a \\ & \rightarrow & dx = du/a \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{a^{p-1}} e^{-u} \frac{du}{a} = \frac{1}{a^p} \int_0^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}du =$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty}x^pe^{-x}dx=\left[\begin{array}{lll}u=x^p, & \rightarrow & du=px^{p-1}dx\\ dv=e^{-x}dx, & \rightarrow & v=-e^{-x}\end{array}\right]=\left[-x^pe^{-x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{\infty}px^{p-1}e^{-x}dx=$$

$$=p\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=p\Gamma(p).$$

iii) Esta propiedad es inmediata a partir de los dos primeras.

iv) Esta propiedad es inmediata a partir de la segunda.

v) Haciendo el cambio de variable $u=ax$ en la integral que define a la función gamma se obtiene

$$\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-ax}\,dx=\left[\begin{array}{lll}u=a\,x & \rightarrow & x=u/a\\ & \rightarrow & dx=du/a\end{array}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{u^{p-1}}{a^{p-1}}e^{-u}\frac{du}{a}=\frac{1}{a^p}\int_0^{+\infty}u^{p-1}e^{-u}du=\frac{1}{a^p}\Gamma(p).$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^p, & \rightarrow \quad du = px^{p-1}dx \\ dv = e^{-x}dx, & \rightarrow \quad v = -e^{-x} \end{array} \right] = \left[-x^p e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} px^{p-1}e^{-x}dx =$$

$$= p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = p\Gamma(p).$$

iii) Esta propiedad es inmediata a partir de los dos primeras.

iv) Esta propiedad es inmediata a partir de la segunda.

v) Haciendo el cambio de variable $u = ax$ en la integral que define a la función gamma se obtiene

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-ax}\, dx = \left[\begin{array}{ll} u = a\,x & \rightarrow \quad x = u/a \\ & \rightarrow \quad dx = du/a \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{a^{p-1}} e^{-u} \frac{du}{a} = \frac{1}{a^p} \int_0^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}du = \frac{1}{a^p}\Gamma(p).$$

vi) A partir de la definición de función gamma se tiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx =$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \left[\begin{array}{lll} u = x^p, & \rightarrow & du = p x^{p-1} dx \\ dv = e^{-x} dx, & \rightarrow & v = -e^{-x} \end{array} \right] = \left[-x^p e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} p x^{p-1} e^{-x} dx =$$

$$= p \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p).$$

iii) Esta propiedad es inmediata a partir de los dos primeras.

iv) Esta propiedad es inmediata a partir de la segunda.

v) Haciendo el cambio de variable $u = ax$ en la integral que define a la función gamma se obtiene

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-ax}\, dx = \left[\begin{array}{lll} u = a\,x & \rightarrow & x = u/a \\ & \rightarrow & dx = du/a \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{a^{p-1}} e^{-u} \frac{du}{a} = \frac{1}{a^p} \int_0^{+\infty} u^{p-1} e^{-u} du = \frac{1}{a^p} \Gamma(p).$$

vi) A partir de la definición de función gamma se tiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \left[\begin{array}{lll} u = \sqrt{2x} & \rightarrow & x = u^2/2 \\ & & dx = u du \end{array} \right] =$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty}x^pe^{-x}dx=\left[\begin{array}{lll} u=x^p, & \rightarrow & du=px^{p-1}dx \\ dv=e^{-x}dx, & \rightarrow & v=-e^{-x}\end{array}\right]=\left[-x^pe^{-x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{\infty}px^{p-1}e^{-x}dx=$$

$$=p\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=p\Gamma(p).$$

iii) Esta propiedad es inmediata a partir de los dos primeras.

iv) Esta propiedad es inmediata a partir de la segunda.

v) Haciendo el cambio de variable $u=ax$ en la integral que define a la función gamma se obtiene

$$\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-ax}\,dx=\left[\begin{array}{lll} u=a\,x & \rightarrow & x=u/a \\ & \rightarrow & dx=du/a\end{array}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{u^{p-1}}{a^{p-1}}e^{-u}\frac{du}{a}=\frac{1}{a^p}\int_0^{+\infty}u^{p-1}e^{-u}du=\frac{1}{a^p}\Gamma(p).$$

vi) A partir de la definición de función gamma se tiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}x^{-1/2}e^{-x}dx=\left[\begin{array}{lll} u=\sqrt{2x} & \rightarrow & x=u^2/2 \\ & & dx=udu\end{array}\right]=\sqrt{2}\int_0^{+\infty}e^{-u^2/2}du.$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty} x^p e^{-x}dx=\begin{bmatrix} u=x^p, & \rightarrow & du=px^{p-1}dx \\ dv=e^{-x}dx, & \rightarrow & v=-e^{-x}\end{bmatrix}=\left[-x^pe^{-x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{\infty} px^{p-1}e^{-x}dx=$$

$$=p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=p\Gamma(p).$$

iii) Esta propiedad es inmediata a partir de los dos primeras.

iv) Esta propiedad es inmediata a partir de la segunda.

v) Haciendo el cambio de variable $u=ax$ en la integral que define a la función gamma se obtiene

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-ax}\,dx=\begin{bmatrix} u=a\,x & \rightarrow & x=u/a \\ & \rightarrow & dx=du/a\end{bmatrix}=\int_0^{+\infty}\frac{u^{p-1}}{a^{p-1}}e^{-u}\frac{du}{a}=\frac{1}{a^p}\int_0^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}du=\frac{1}{a^p}\Gamma(p).$$

vi) A partir de la definición de función gamma se tiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx=\begin{bmatrix} u=\sqrt{2x} & \rightarrow & x=u^2/2 \\ & & dx=udu\end{bmatrix}=\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du.$$

Como la función $e^{-u^2/2}$ es par, se tiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du,$$

ii) Volviendo a tener en cuenta la definición de función gamma, e integrando por partes, se tiene

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^p, & \rightarrow \quad du = px^{p-1}dx \\ dv = e^{-x}dx, & \rightarrow \quad v = -e^{-x} \end{array} \right] = \left[-x^p e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} px^{p-1}e^{-x}dx =$$

$$= p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = p\Gamma(p).$$

iii) Esta propiedad es inmediata a partir de los dos primeras.

iv) Esta propiedad es inmediata a partir de la segunda.

v) Haciendo el cambio de variable $u = ax$ en la integral que define a la función gamma se obtiene

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-ax}\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = a\,x & \rightarrow \quad x = u/a \\ & \rightarrow \quad dx = du/a \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{a^{p-1}} e^{-u} \frac{du}{a} = \frac{1}{a^p}\int_0^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}du = \frac{1}{a^p}\Gamma(p).$$

vi) A partir de la definición de función gamma se tiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{2x} & \rightarrow \quad x = u^2/2 \\ & \quad\;\; dx = udu \end{array} \right] = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du.$$

Como la función $e^{-u^2/2}$ es par, se tiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du,$$

y multiplicando y dividiendo por $\sqrt{\pi}$, se concluye que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du.$$

Por último, como $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$ es la función de densidad de la distribución $N(0,1)$, su integral vale uno, obteniéndose el resultado. ∎