



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Trabajo de Fin de Máster

Máster Universitario en Matemáticas

El problema de Hopf para superficies de Weingarten

Presentado por:

Alberto Cerezo Cid

Dirigido por:

Isabel Fernández Delgado

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA I

22 DE JUNIO DE 2022

Abstract

The aim of this work is to study Hopf's theorem, a classical result which characterizes constant mean curvature spheres in \mathbb{R}^3 , as well as its generalizations. Namely, the extension to special Weingarten surfaces by Hartman and Wintner and the generalization to spheres immersed in the 3-dimensional spaces $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ by Abresch and Rosenberg. We will also discuss the Hopf problem for Weingarten surfaces in $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.

In the following chapter, we will review concepts from Riemannian geometry, introduce Weingarten and Riemann surfaces and define the concept of line fields on a manifold. Additionally, we will present the 2-parameter family of $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ spaces.

We will prove Hopf's theorem in the second chapter. In order to do so, we will use two different techniques: on the one hand, we will study the line field of curvatures of a CMC sphere. On the other hand, we will introduce the Hopf differential, a 2-form whose zeros correspond to the set of umbilical points of a surface.

The third chapter will deal with the extension of Hopf's theorem to special Weingarten surfaces by Hartman and Wintner. Additionally, we will show an alternative proof by Shiing Shen Chern.

In the fourth chapter we will show the key steps of the extension of Hopf's theorem to $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ spaces by Abresch and Rosenberg. In addition, we will show that Hopf's original proof can be applied to space forms $\mathbb{M}^3(\kappa)$.

Finally, in the last chapter we will discuss the latest achievements in the Hopf problem for special Weingarten surfaces in $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ spaces, emphasizing a recent result by José Antonio Gálvez and Pablo Mira.

Agradecimientos

Quisiera aprovechar este espacio para dar las gracias a dos personas que han sido fundamentales en la realización de esta memoria.

En primer lugar, quería agradecer a Isabel Fernández su implicación, amabilidad y dedicación no solo como tutora en este trabajo, sino también como directora en los distintos proyectos académicos en los que he tenido la oportunidad de participar en los últimos años. La considero una referente como investigadora, docente y por supuesto, como persona.

De igual manera, quería agradecer a Pablo Mira, a quien he tenido el placer de conocer recientemente, su compromiso y cercanía, a pesar de las dificultades que supone orientar un Trabajo de Fin de Máster desde la distancia. Considero que sus conocimientos y sugerencias han sido claves para permitirme obtener una visión más global de esta línea de investigación.

Asimismo, quiero agradecer a ambos su enorme predisposición a la hora de orientarme de cara a mi próxima etapa como estudiante predoctoral. Unos años atrás, me habría parecido imposible imaginar que tendría la suerte de trabajar con personas tan brillantes.

Índice general

Introducción	8
1. Preliminares	9
1.1. Variedades Riemannianas	9
1.2. Campos de líneas sobre una superficie e índice	14
1.3. Superficies inmersas en 3-variedades Riemannianas	18
1.4. Superficies especiales de Weingarten	24
1.5. Parametrizaciones isotermas y superficies de Riemann	31
1.6. Espacios homogéneos simplemente conexos	38
1.6.1. Los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$	39
1.6.2. Modelo general para los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$	42
1.6.3. Grupos de isometrías de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$	43
2. Teorema de Hopf clásico para superficies de CMC en \mathbb{R}^3	46
2.1. Resultados previos	47
2.2. Primera demostración: campos de líneas de curvatura	50
2.3. Segunda demostración: diferencial de Hopf	53
3. Generalización para W-superficies especiales en \mathbb{R}^3	55
3.1. Primera demostración del teorema 3.1	56
3.2. Segunda demostración del teorema 3.1	64
4. Generalización para superficies de CMC en espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$	68
4.1. Ecuaciones de compatibilidad en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$	69
4.2. Diferencial de Abresch-Rosenberg	72
4.3. Demostración del teorema 4.3	73
4.4. Sobre el teorema de Hopf en $\mathbb{M}^3(\kappa)$	75
5. W-superficies en los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$	77
5.1. Sobre el teorema de Hopf para W-superficies especiales en $\mathbb{M}^3(\kappa)$	77
5.2. El problema de Hopf para W-superficies especiales en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$	78

5.3. Problemas abiertos 80

Introducción

La teoría de superficies de curvatura media constante (CMC) en \mathbb{R}^3 es una de las ramas fundamentales de la Geometría Diferencial. El origen de esta disciplina data del siglo XVIII, gracias a los trabajos de la física y matemática Sophie Germain sobre teoría de elasticidad. Otros grandes matemáticos de la época, como Joseph Louis Lagrange o Adrien-Marie Legendre, realizaron importantes contribuciones al estudio de superficies mínimas (aquellas con curvatura media constante 0). Estas superficies surgen de manera natural al considerar problemas de minimización de área de superficies con un borde prefijado. A lo largo de la historia, se han establecido numerosas conexiones entre esta y otras áreas clásicas de las Matemáticas, entre las que destacamos el Cálculo de Variaciones, el Análisis Complejo o la teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs).

En este trabajo, nos centraremos en un resultado fundamental en la teoría global de superficies de CMC, el **teorema de Hopf**. En esta memoria, llamaremos **esfera** a cualquier superficie compacta y de género cero, y **esfera redonda** al conjunto de \mathbb{R}^3 formado por los puntos que equidistan de un punto dado (ver ecuación (2.1)).

Teorema de Hopf [H47]. *Las únicas esferas de \mathbb{R}^3 con curvatura media constante son las esferas redondas.*

Este resultado fue demostrado por el matemático Heinz Hopf a mediados del siglo XX usando dos estrategias diferentes. La primera demostración se basó en estudiar los **campos de líneas de curvatura** de la esfera (ver sección 1.2 y definición 1.30). Estos campos consisten en aplicaciones que asocian a cada punto de una superficie sus direcciones principales. Para la otra demostración introdujo la **diferencial de Hopf**, una 2-forma compleja cuyos ceros se corresponden con los puntos umbílicos de una superficie, es decir, aquellos puntos donde ambas curvaturas principales coinciden. La propiedad fundamental de la diferencial de Hopf consiste en que es **holomorfa** para toda superficie orientable de CMC inmersa en \mathbb{R}^3 .

Tras demostrar el resultado, Hopf emprendió la búsqueda de una generalización de su teorema. Partió de la siguiente idea: por definición, una superficie con curvaturas principales k_1, k_2 es de curvatura media constante si se cumple que $k_1 + k_2 = c$ para algún $c \in \mathbb{R}$. ¿Qué ocurre si sustituimos

esta ecuación por una relación general del tipo $W(k_1, k_2) = 0$?

Las superficies cuyas curvaturas principales satisfacen alguna relación funcional reciben el nombre de **superficies de Weingarten** (o **W-superficies**, ver definición 1.32). Estas fueron introducidas en 1861 por Julius Weingarten [W61, W63], cuya motivación original consistía en encontrar todas las superficies isométricas a una cierta superficie de revolución.

Dentro de la familia de W-superficies, destacamos las llamadas **superficies especiales de Weingarten**. Las curvaturas de estas superficies están asociadas a una función $W(x, y)$ que satisface una condición de elipticidad (ver (1.13)). Como veremos, esta condición permitirá establecer una conexión con la teoría de EDPs absolutamente elípticas (ver proposición 1.40).

Hopf [H47] logró extender su teorema al caso general de superficies de Weingarten especiales bajo la hipótesis restrictiva de que la superficie fuese analítica. Años después, en 1954, Philip Hartman y Aurel Wintner lograron prescindir de la condición de analiticidad, generalizando el teorema de Hopf:

Teorema de Hopf para W-superficies especiales en \mathbb{R}^3 [HW54]. *Las únicas esferas especiales de Weingarten de \mathbb{R}^3 son las esferas redondas.*

Para demostrar este resultado, Hartman y Wintner hicieron uso de teoría de EDPs absolutamente elípticas y estudiaron el campo de líneas de curvatura de la esfera. Un año después, Shiing-Shen Chern [C55-2] dio una demostración alternativa basada en herramientas del análisis complejo.

Volvamos al resultado original de Hopf. Una generalización natural de cualquier teorema sobre superficies en \mathbb{R}^3 consiste en plantear si este sigue siendo válido -y en qué sentido- para superficies inmersas en otros espacios ambiente. En nuestro caso, nos preguntamos si es posible caracterizar de alguna manera las esferas de CMC inmersas en otras 3-variedades Riemannianas, como por ejemplo el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 y la 3-esfera \mathbb{S}^3 . El estudio de estas variedades constituye en sí mismo un área clásica de la Geometría, con numerosas aplicaciones en otras disciplinas como la Física. La riqueza de estos espacios reside en su alto nivel de simetría: son espacios *homogéneos* e *isótropos* (ver sección 1.6). Mediante homotecias, podemos construir una familia uniparamétrica $\mathbb{M}^3(\kappa)$, con $\kappa \in \mathbb{R}$, a partir de \mathbb{S}^3 , \mathbb{R}^3 y \mathbb{H}^3 . Esta familia se corresponde, de hecho, con el conjunto

de 3-variedades Riemannianas simplemente conexas y de curvatura seccional constante.

Analizando en detalle la diferencial de Hopf para superficies inmersas en $\mathbb{M}^3(\kappa)$, se puede deducir que toda esfera de CMC en estos espacios debe ser totalmente umbílica. Este tipo de esferas se encuentran clasificadas, y en el caso de \mathbb{R}^3 se corresponden exactamente con las esferas redondas. De esta manera, es posible extender el teorema de Hopf a los espacios de curvatura seccional constante. De forma análoga, la demostración de Chern para el caso de W-superficies especiales en \mathbb{R}^3 sigue siendo válida en los espacios $\mathbb{M}^3(\kappa)$. Se deduce el siguiente resultado:

Teorema de Hopf para W-superficies especiales en $\mathbb{M}^3(\kappa)$ [H47, C55-2]. *Las únicas esferas especiales de Weingarten de $\mathbb{M}^3(\kappa)$ son las esferas totalmente umbílicas.*

Entre finales del siglo XX y principios del siglo XXI, William Meeks, Harold Rosenberg y Uwe Abresch, entre otros, realizaron numerosos avances en el estudio de superficies de CMC en los espacios producto $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ [R02, MR04, MR05, AR04], donde $\mathbb{M}^2(\kappa)$ denota la única superficie simplemente conexa de curvatura constante κ . Es decir, salvo homotecia, podemos identificar $\mathbb{M}^2(\kappa)$ con \mathbb{S}^2 si $\kappa > 0$, \mathbb{R}^2 si $\kappa = 0$ o \mathbb{H}^2 si $\kappa < 0$. Respecto al problema de Hopf, en 2004 Abresch y Rosenberg lograron definir en toda superficie orientable de CMC inmersa en $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ una 2-forma holomorfa: la **diferencial de Abresch-Rosenberg**. Poco después, en 2005, extendieron esta diferencial a cualquier superficie inmersa en una familia más general de 3-variedades: los llamados espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, con $(\kappa, \tau) \in \mathbb{R}^2$, que trataremos en detalle en la sección 1.6. Por ahora, solo destacaremos que las variedades de esta familia son fibraciones sobre $\mathbb{M}^2(\kappa)$, y que es posible considerar rotaciones alrededor de las fibras. Dentro de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ encontramos los espacios simplemente conexos *más simétricos* tras los de curvatura seccional constante (en particular, para $\tau = 0$ tenemos los espacios producto).

La diferencial de Abresch-Rosenberg permitió caracterizar las esferas de CMC inmersas en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. En estos espacios, el papel de las esferas totalmente umbílicas fue sustituido por el de **esferas rotacionales** con curvatura media constante, es decir, esferas de CMC invariantes ante rotaciones alrededor de una fibra, y cuya clasificación en los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ es conocida (ver teorema 4.2).

Teorema de Hopf para superficies de CMC en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ [AR04, AR05]. *Las únicas esferas inmersas en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ con curvatura media constante son las esferas rotacionales de CMC.*

Tras la extensión del teorema de Hopf al caso de W-superficies especiales en \mathbb{R}^3 por Hartman y Wintner y posteriormente a superficies de CMC en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ por Abresch y Rosenberg, surge naturalmente la pregunta de si es posible caracterizar en general las esferas especiales de Weingarten en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. A día de hoy, esta cuestión permanece abierta, aunque se han realizado avances importantes en los últimos años. En este sentido, destacamos un reciente artículo de José Antonio Gálvez y Pablo Mira [GM21], donde proponen un método sistemático para extender el teorema de Hopf para esferas de Weingarten en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Esto les permitió probar el teorema de Hopf en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$:

Teorema de Hopf para W-superficies especiales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ [GM21]. *Las únicas esferas especiales de Weingarten inmersas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ son esferas rotacionales.*

Asimismo, pudieron demostrar que las esferas con curvatura extrínseca constante y positiva en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ debían ser además rotacionales, algo que hasta el momento solo se había conseguido para los espacios producto (ver [EGR09]).

Teorema [EGR09, GM21]. *Para cada $K_e > 0$ existe una esfera rotacional inmersa en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ con curvatura extrínseca constante K_e , que además es única salvo isometría. Más aún: cualquier esfera con curvatura extrínseca constante y positiva debe ser una esfera rotacional.*

La presente memoria está dedicada al estudio del teorema de Hopf así como sus generalizaciones. En el primer capítulo, introduciremos las superficies de Weingarten, las superficies de Riemann y definiremos los campos de líneas sobre una variedad. Además, presentaremos la familia de espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. En el segundo capítulo, expondremos las dos demostraciones de la versión original del teorema de Hopf. Trataremos en el tercer capítulo la extensión de este teorema al caso de superficies especiales de Weingarten en \mathbb{R}^3 por Hartman y Wintner. Asimismo, estudiaremos una demostración alternativa propuesta por S. S. Chern. En el capítulo cuatro abordaremos los aspectos principales de la generalización del teorema de Hopf para superficies de CMC en los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ por Abresch y Rosenberg. Por último, en el quinto capítulo comentaremos los últimos avances en el

problema de Hopf para superficies especiales de Weingarten en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, centrándonos en el trabajo de José Antonio Gálvez y Pablo Mira [GM21].

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Variedades Riemannianas

A pesar de que la versión original del teorema de Hopf es un resultado que puede enmarcarse en la teoría clásica de superficies en \mathbb{R}^3 , resulta conveniente hacer uso del formalismo de las variedades diferenciables y Riemannianas. Esto nos permitirá definir correctamente las herramientas necesarias para abordar este resultado así como sus generalizaciones. Presentaremos en esta sección un breve repaso de los contenidos necesarios para este trabajo.

Definición 1.1. Sea M un espacio topológico Hausdorff y $2^{\mathbb{Q}}$ numerable. Un **atlas** de dimensión n es un conjunto $\mathcal{A} := \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, donde U_i son subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n y φ_i son aplicaciones $\varphi_i : U_i \rightarrow M$, con las siguientes propiedades:

1. $\bigcup_{i \in I} \varphi_i(U_i) = M$.
2. Las aplicaciones $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset M$ son homeomorfismos. En particular, el conjunto $\varphi_i(U_i)$ es un abierto de M .
3. Dados dos pares $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$, se tiene que o bien el abierto $W := \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j)$ es vacío o bien la composición $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(W) \rightarrow \varphi_j^{-1}(W)$ define un difeomorfismo de clase C^∞ .

Llamaremos **variedad diferenciable** al par (M, \mathcal{A}) . Diremos que los pares (U_i, φ_i) son **parametrizaciones** de M . Dadas dos cartas $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ tales que $\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) \neq \emptyset$, llamaremos **reparametrización** al difeomorfismo $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$.

Dada una variedad diferenciable (M, \mathcal{A}) , existe un único atlas $\langle \mathcal{A} \rangle$, al que llamaremos **estructura diferenciable**, que cumple las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{A} \subseteq \langle \mathcal{A} \rangle$.
2. $\langle \mathcal{A} \rangle$ es maximal, en el sentido de que para todo conjunto de parametrizaciones \mathcal{B} tal que $\langle \mathcal{A} \rangle \cup \mathcal{B}$ sea un atlas de M se cumple que $\mathcal{B} \subseteq \langle \mathcal{A} \rangle$.

En lo que sigue, cuando consideremos parametrizaciones de una variedad, nos referiremos a parametrizaciones de su estructura diferenciable.

Definición 1.2. Diremos que una variedad diferenciable es **orientable** si admite un atlas tal que todas sus reparametrizaciones tienen determinante jacobiano positivo. Cabe destacar, no obstante, que la orientabilidad es una propiedad topológica que puede ser definida para una familia de espacios más general que las variedades diferenciables: las **variedades topológicas**.

Definición 1.3. Llamaremos **superficie** a toda variedad diferenciable de dimensión 2.

La estructura de las variedades diferenciables permite dar una noción de **diferenciabilidad** de aplicaciones entre variedades: dadas dos variedades M, N , diremos que una aplicación $f : M \rightarrow N$ es diferenciable si para todo $p \in M$ y toda parametrización (W, ψ) de N tal que $f(p) \in \psi(W)$ existe una parametrización (U, φ) de M tal que $p \in \varphi(U)$, $f(U) \subset \psi(W)$ y la composición $\tilde{f} := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \rightarrow W$ sea diferenciable (de clase C^∞). Además, diremos que f es un **difeomorfismo** si posee inversa f^{-1} y es también diferenciable.

En lo que sigue, denotaremos por $\mathcal{F}(M)$ el conjunto de aplicaciones diferenciables de la forma $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Un caso particular de aplicaciones diferenciables entre variedades es el de las **curvas diferenciables**, que nos permiten definir el concepto de espacio tangente a una variedad. Dada una variedad diferenciable M , una curva diferenciable con origen en p es una aplicación $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ y $\varepsilon > 0$. Diremos que dos curvas α, β con origen en $p \in M$ son **equivalentes** si existe una parametrización (U, φ) tal que $p \in \varphi(U)$ y $(\varphi^{-1} \circ \alpha)'(0) = (\varphi^{-1} \circ \beta)'(0)$.

Observación 1.4. La relación de ser curvas equivalentes es independiente de la parametrización escogida. Además, esta relación define una clase de equivalencia sobre el conjunto de curvas diferenciables con origen en un cierto punto $p \in M$. Dada una curva diferenciable α , denotaremos por $[\alpha]$

su clase de equivalencia. Intuitivamente, las clases de equivalencia se corresponden con los *vectores tangentes* a la variedad M en el punto p .

Dada una variedad M y $p \in M$, se define el **espacio tangente** a M en p como

$$T_p M = \{[\alpha] : \alpha \text{ es una curva con origen en } p\}.$$

Llamaremos a las clases de equivalencia $[\alpha]$ vectores tangentes a M en p . Asimismo, definimos el **fibrado tangente** a M como

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}.$$

Para todo $p \in M$, el espacio tangente $T_p M$ es un espacio vectorial isomorfo a \mathbb{R}^n . Además, es posible dotar de manera natural al fibrado tangente TM de una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$.

Una vez definido el fibrado tangente a una variedad, podemos hablar de la diferencial de una aplicación entre variedades y de campos vectoriales:

Definición 1.5. Sean M, N dos variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Dado $p \in M$, definimos la diferencial de f en p , que denotaremos por df_p , como la aplicación lineal $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ que asocia a cada vector tangente $[\alpha] \in T_p M$ el vector $[f \circ \alpha] \in T_{f(p)} N$.

Dado un punto $p \in M$ de una variedad de dimensión n y una parametrización (U, φ) tal que $\varphi(t) = p$ para algún $t \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\{d\varphi_t(e_i)\}_{i=1}^n$ es una base del espacio tangente $T_p M$, donde por $\{e_i\}_{i=1}^n$ entendemos la base canónica de \mathbb{R}^n .

Definición 1.6. Llamaremos **campo vectorial** a cualquier aplicación diferenciable de la forma $X : M \rightarrow TM$ que verifique $X(p) \in T_p M$ para todo $p \in M$, es decir, a cada punto $p \in M$ le asigna un vector tangente a M en p . Al conjunto de campos vectoriales de M lo denotaremos $\mathfrak{X}(M)$.

La estructura de espacio vectorial del espacio tangente permite definir aplicaciones lineales (o, en general, multilineales) sobre este espacio. Esto nos lleva al concepto de n -formas:

Definición 1.7. Sea M una variedad diferenciable. Dado $n \in \mathbb{N}$, una n -**forma** sobre M es una aplicación f que asocia a cada $p \in M$ una aplicación multilineal $f_p : (T_p M)^n \rightarrow \mathbb{R}$. Además, f es diferenciable en el siguiente sentido: para cualesquiera campos $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$, la aplicación $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(p) := f_p(X_1(p), \dots, X_n(p))$ es diferenciable.

Por último, necesitaremos dotar a las variedades de una estructura métrica y de una **conexión** para poder introducir conceptos relacionados con la curvatura.

Definición 1.8. Sea M una variedad diferenciable. Una **métrica Riemanniana** g sobre M es una 2-forma que a cada $p \in M$ le asocia un producto escalar $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, g_p es una aplicación simétrica y definida positiva.

Llamaremos al par (M, g) **variedad Riemanniana**. En particular, si M es una superficie, diremos que es una **superficie Riemanniana**.

Definición 1.9. Sean (M, g) , (N, h) dos variedades Riemannianas. Diremos que un difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ es una **isometría** si para todo $p \in M$ se cumple que la diferencial $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es una isometría entre espacios vectoriales.

Definición 1.10. Sean (M, g) y (N, h) variedades Riemannianas. El producto $M \times N$ admite de manera natural una estructura diferenciable cuyo fibrado tangente $T(M \times N)$ se identifica con $TM \times TN$. Además, podemos dotar a esta variedad de una estructura Riemanniana con la llamada **métrica producto** $g \oplus h$, dada por

$$(g \oplus h)_{(p,q)}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = g_p(u_1, u_2) + h_q(v_1, v_2),$$

para todo $p \in M$, $u_1, u_2 \in T_p M$ y $q \in N$, $v_1, v_2 \in T_q N$.

Para poder generalizar al caso de variedades diferenciables ciertos objetos de teoría clásica de superficies en \mathbb{R}^3 (como, por ejemplo, las geodésicas o el transporte paralelo), resulta necesario dotar a la variedad de una **conexión afín** (ver [dC92]). Intuitivamente, las conexiones afines son operadores que permiten *derivar* campos vectoriales. En el caso particular de variedades Riemannianas, existe una única conexión, llamada **conexión de Levi Civita**, que se caracteriza por ser *compatible* con la métrica.

Proposición 1.11. *En toda variedad Riemanniana (M, g) existe una única aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que verifica las siguientes propiedades:*

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ.$
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ.$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + df(X)Y.$
4. $d(g(Y, Z))(X) = g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ).$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y todo $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Llamaremos a ∇ **conexión de Levi-Civita**.

A modo de ejemplo, estudiaremos algunos de los conceptos expuestos en esta sección para el caso de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.12. (Espacio euclídeo \mathbb{R}^n) Para todo $n \in \mathbb{N}$, el espacio euclídeo \mathbb{R}^n es una variedad diferenciable de dimensión n . Un posible atlas para \mathbb{R}^n viene dado por $\{(\mathbb{R}^n, Id)\}$, donde Id denota la aplicación identidad. En general, todo subconjunto abierto de \mathbb{R}^n es una variedad diferenciable de dimensión n , y un atlas viene dado por $\{(U, i)\}$, donde $i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la inclusión.

Con respecto al fibrado tangente, podemos identificar de manera natural $T\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Según esta identificación, todo vector $[\alpha] \in TM$ puede expresarse como un par (p, v) , donde $p = \alpha(0) \in \mathbb{R}^n$, $v = \alpha'(0) \in \mathbb{R}^n$. De igual manera, podemos escribir todo campo vectorial X como

$$X(p) \equiv (p, v(p)),$$

donde $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable. Más aún: toda aplicación diferenciable $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ induce un campo vectorial $p \rightarrow (p, v(p)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Esto nos permite identificar $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ con el conjunto de aplicaciones diferenciables de \mathbb{R}^n en sí mismo.

Podemos dotar de manera natural a \mathbb{R}^n de una métrica, la llamada **métrica euclídea**: denotemos al producto escalar estándar en \mathbb{R}^n por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dados dos campos $v, w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definimos en cada punto $p \in \mathbb{R}^n$

$$g_p(v(p), w(p)) := \langle v(p), w(p) \rangle.$$

Por último, la conexión de Levi Civita asociada a esta métrica es la **derivada direccional**:

$$(\nabla_v w)_p := Jw_p \cdot v(p),$$

donde Jw_p denota la matriz jacobiana de w en el punto p .

1.2. Campos de líneas sobre una superficie e índice

Una de las estrategias seguidas en algunas demostraciones del teorema de Hopf consiste en estudiar un tipo de aplicaciones llamadas **campos de líneas**, que definimos a continuación.

Definición 1.13. Sea M una variedad diferenciable. Un **campo de líneas** sobre M es una aplicación L que asocia a cada punto $p \in M$ una línea del espacio tangente $T_p M$, esto es, un conjunto de la forma

$$\text{span}(v) = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset T_p M,$$

para algún vector $v \in T_p M \setminus \{0\}$. Además, exigiremos que L sea diferenciable en el siguiente sentido: para todo $p_0 \in M$ existe un entorno $p_0 \in U$ y un campo vectorial $X : U \rightarrow TM$ tal que $X(p) \in L(p) \setminus \{0\}$ para todo $p \in U$.

Diremos que L posee singularidades en un conjunto de puntos aislados $V := \{p_i\}_{i \in I}$ si el campo de líneas está definido en todo M salvo en V , y no es posible extender el campo a dicho conjunto.

Observación 1.14. Si X es un campo vectorial que posee un conjunto aislado de ceros $\{p_i\}_{i \in I}$, entonces X induce un campo de líneas L con singularidades en los puntos p_i , siendo $L(p) := \text{span}(X(p))$. Sin embargo, no todo campo de líneas puede inducir un campo vectorial (por ejemplo, ver figura 1.1).

Centrémonos a partir de ahora en el caso particular de campos definidos sobre superficies. En la figura 1.1, el campo de líneas parece dar *media vuelta* cuando nos desplazamos alrededor de p . Esta situación ocurre en general: alrededor de las singularidades, los campos de líneas pueden dar

un número semientero de vueltas. A continuación, definiremos formalmente este fenómeno. Para ello, haremos uso del concepto de curva positivamente orientada.

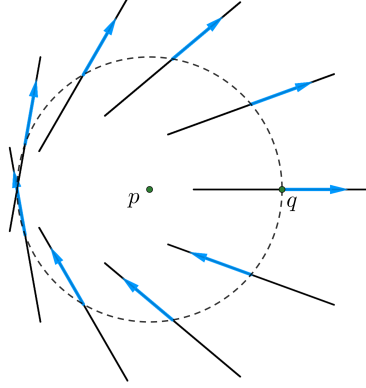


Figura 1.1: Campo de líneas sobre \mathbb{R}^2 (representado con segmentos continuos) con una singularidad en el punto p . Intentamos definir un campo vectorial X (en azul) partiendo del punto q . No obstante, cuando damos *una vuelta* alrededor de p observamos que el vector $X(q)$ no estaría bien definido.

Definición 1.15. Dado $l > 0$, sea $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha = \alpha(t)$, una curva regular, simple y cerrada en \mathbb{R}^2 , y denotemos por $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ los vectores tangente y normal interior a la curva. Sea $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de \mathbb{R}^2 . Diremos que α está **positivamente orientada** si para todo $t \in [0, l]$ la matriz de cambio de base $\{e_1, e_2\} \rightarrow \{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$ tiene determinante positivo.

Intuitivamente, las curvas positivamente orientadas son aquellas que se *recorren en sentido antihorario*.

Sea L un campo de líneas sobre una superficie M con una singularidad en un punto $p \in M$. Consideremos una parametrización (U, φ) en un entorno de p de forma que U sea simplemente conexo y tal que p sea la única singularidad en $\varphi(U)$. Además, supondremos que $\varphi(0, 0) = p$. Definimos en U una curva regular, simple, cerrada y positivamente orientada $C : [0, l] \rightarrow U$, $C = C(t)$, de manera que $(0, 0)$ se encuentre en el interior de C .

El campo L induce de manera natural un campo de líneas \tilde{L} sobre el abierto U : dado $(x, y) \in U$, sea $q = \varphi(x, y)$, y definamos $\tilde{L}(x, y) := d\varphi_q^{-1}(L(q))$.

Sea $X_0 \in \tilde{L}(C(0))$ un vector unitario. Fijado X_0 , existe una única aplicación diferenciable $X : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $X(0) = X_0$, $X(t) \in \tilde{L}(C(t))$ y $X(t)$ sea unitario para todo $t \in [0, l]$.

Sea $\phi : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable que en cada $t \in [0, l]$ mida el ángulo entre el vector unitario e_1 y $X(t)$. En estas condiciones, existe un semientero j tal que

$$2\pi j = \phi(l) - \phi(0), \quad (1.1)$$

Definición 1.16. Llamaremos **índice** del campo L en la singularidad p al semientero j de la ecuación anterior.

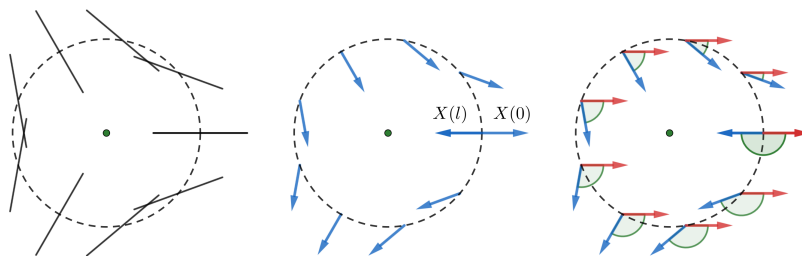


Figura 1.2: Construcción geométrica del índice. A través de la parametrización φ , el campo L define un campo de líneas \tilde{L} sobre \mathbb{R}^2 . Trazamos una circunferencia alrededor del origen. El campo \tilde{L} induce una aplicación vectorial $X(t)$ sobre C (azul). Medimos la variación del ángulo entre X y el vector e_1 (rojo). En este caso, el índice resulta ser $j = -\frac{1}{2}$.

El índice es independiente de la parametrización (U, φ) escogida y de la curva C . Es más, en vez de medir el ángulo respecto al vector e_1 , podemos medir el ángulo respecto a un campo vectorial en \mathbb{R}^2 sin ceros en el interior de C .

A continuación, calcularemos el índice de un campo de líneas que aparecerá en numerosas ocasiones en los siguientes capítulos. Este campo se encuentra definido sobre \mathbb{R}^2 y posee una singularidad en el origen.

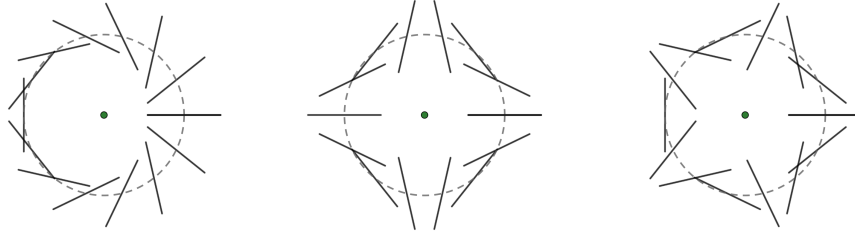


Figura 1.3: Algunos ejemplos de campos de líneas con singularidades. De izquierda a derecha, los índices de estos campos son $\frac{3}{2}$, -1 y $-\frac{3}{2}$.

Ejemplo 1.17. Sea $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Podemos expresar p en coordenadas polares, esto es, $p = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$, siendo $\rho > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. Dado $n \in \mathbb{N}$ y una función diferenciable $\alpha : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos $L(p)$ como la línea

$$L(p) = \text{span}\left(\left(\cos\left(\frac{\alpha(p) - n\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha(p) - n\theta}{2}\right)\right)\right)$$

Calculemos el índice del campo en el origen. Para ello, sea $C(t)$ la curva $C(t) = (\cos(t), \sin(t))$. En $t = 0$ consideramos el vector $X_0 = \left(\cos\left(\frac{\alpha(C(0))}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha(C(0))}{2}\right)\right) \in L(C(0))$. X_0 induce la aplicación diferenciable

$$X(t) = \left(\cos\left(\frac{\alpha(C(t)) - nt}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha(C(t)) - nt}{2}\right)\right) \in L(C(t)).$$

En estas condiciones, el ángulo $\phi(t)$ entre e_1 y $X(t)$ viene dado por $\phi(t) = \frac{\alpha(C(t)) - nt}{2}$. Como $C(0) = C(2\pi)$,

$$\phi(2\pi) - \phi(0) = \frac{\alpha(C(2\pi)) - 2\pi n}{2} - \frac{\alpha(C(0)) - 0}{2} = -2\pi \frac{n}{2},$$

con lo cual el índice es $-\frac{n}{2}$.

Un resultado fundamental en el estudio de los campos de líneas es el teorema de Hopf-Poincaré, que utilizaremos en varias ocasiones a lo largo de esta memoria.

Teorema 1.18. (Teorema de Hopf-Poincaré, [H47]) Sea M una superficie compacta¹ de di-

¹Es decir, la superficie M es compacta como espacio topológico.

mensión 2 y L un campo de líneas definido en M salvo en a lo máximo un conjunto finito de singularidades $p_1, \dots, p_n \in M$. Denotemos por j_i , $1 \leq i \leq n$, el índice del campo en cada una de las singularidades. En estas condiciones,

$$\sum_{i=1}^n j_i = \chi(M), \quad (1.2)$$

donde $\chi(M)$ es la característica de Euler-Poincaré de M .

Corolario 1.19. *Sea M una variedad diferenciable homeomorfa a una esfera. Entonces no existe sobre M ningún campo de líneas L definido globalmente: L debe poseer alguna singularidad.*

Demostración. Si el conjunto de singularidades es infinito, entonces el resultado es trivialmente cierto. Si es finito, notemos que $\chi(M) = 2 \neq 0$, y por el teorema de Hopf-Poincaré la suma de los índices del campo debe ser distinta de 0. En particular, existe al menos una singularidad. \square

1.3. Superficies inmersas en 3-variedades Riemannianas

En secciones anteriores, definimos las superficies como variedades diferenciables de dimensión 2. De esta manera, las superficies son un objeto *en sí mismo*, es decir, su definición no depende de si se encuentran contenidas o no algún otro espacio. Esto supone una diferencia fundamental con la geometría diferencial clásica, donde las superficies son subconjuntos de \mathbb{R}^3 . Este hecho permitía introducir algunos conceptos elementales en la teoría, como por ejemplo la **segunda forma fundamental**, cuya definición dependía de considerar vectores normales a la superficie.

En esta sección, estudiaremos superficies contenidas en variedades Riemannianas de dimensión 3, a las que llamaremos **espacio ambiente**. La estructura métrica del espacio ambiente permitirá dotar de una métrica a las superficies e introducir las **curvaturas media y extrínseca**.

Definición 1.20. Sean M , N dos variedades diferenciables, y $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Decimos que f es una **inmersión** si para todo $p \in M$ se tiene que la diferencial $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es una aplicación inyectiva.

Definición 1.21. Sea S una superficie conexa² y $\mathbf{X} : S \rightarrow M$ una inmersión en una variedad diferenciable M de dimensión 3. Diremos que el par (S, \mathbf{X}) es una **superficie inmersa** en M , y que M es el **espacio ambiente** de la superficie.

Debido a que las inmersiones no tienen por qué ser aplicaciones inyectivas, las superficies pueden poseer autointersecciones (ver imagen 1.4).

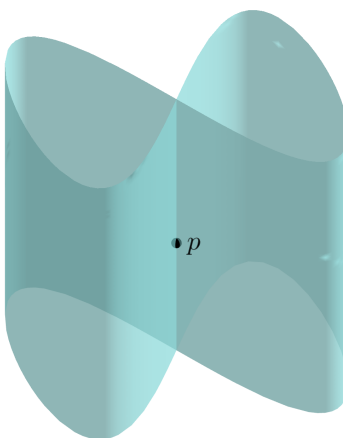


Figura 1.4: Superficie dada por la inmersión $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{X}(s, t) = (\sin(s), \sin(2s), t)$.

En lo que sigue, asumiremos que el espacio ambiente sobre el que se define una superficie inmersa (S, \mathbf{X}) es una variedad Riemanniana. La existencia de una métrica sobre M induce una estructura de variedad Riemanniana en S , mediante la llamada **métrica pullback**:

Proposición 1.22. Sea S una variedad diferenciable y $\mathbf{X} : S \rightarrow M$ una inmersión de S en una variedad Riemanniana (M, \bar{g}) . Entonces, la aplicación $\mathbf{X}^*\bar{g} : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathcal{F}(S)$ definida para todo $p \in S$, $u, v \in T_p S$ como

$$\mathbf{X}^*\bar{g}_p(u, v) = \bar{g}_{\mathbf{X}(p)}(d\mathbf{X}_p(u), d\mathbf{X}_p(v))$$

²Es decir, S es conexa como espacio topológico.

induce en S una métrica Riemanniana. Llamamos a $\mathbf{X}^*\bar{g}$ **métrica pullback**.

A partir de ahora, denotaremos por g a la métrica de S y por \bar{g} a la métrica de M .

Notación 1.23. Sea (U, φ) , $\varphi = \varphi(u, v)$ una parametrización de una superficie S . Dado $p = \varphi(u, v)$, denotaremos por $\{\partial_u, \partial_v\}$ a la base de $T_p S$ dada por $\{d\varphi_{(u,v)}(e_1), d\varphi_{(u,v)}(e_2)\}$. Asimismo, dada una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(u, v)$, denotaremos por f_u, f_v las derivadas parciales respecto a u, v . Definimos sobre $\varphi(U)$ las 1-formas du, dv como aquellas que verifican $du(\partial_u) = dv(\partial_v) = 1$ y $du(\partial_v) = dv(\partial_u) = 0$.

Dadas dos 1-formas α, β sobre una variedad M , podemos definir una 2-forma $\alpha \odot \beta$ como $(\alpha \odot \beta)_p(u, v) := \alpha_p(u)\beta_p(v)$ para todo $p \in M$. Introducimos así las siguientes aplicaciones:

$$du^2 := du \odot du, \quad dv^2 := dv \odot dv, \quad dudv := \frac{du \odot dv + dv \odot du}{2}.$$

Definición 1.24. Dada una parametrización (U, φ) de una superficie Riemanniana (S, g) , podemos expresar la métrica en función de du, dv como

$$g = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

donde los coeficientes $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables tales que $EG - F^2 > 0$. Llamaremos a E, F, G **coeficientes de la primera forma fundamental** de S .

Observación 1.25. Sea (S, \mathbf{X}) una superficie inmersa en una variedad Riemanniana (M, \bar{g}) . La inmersión \mathbf{X} induce en cada punto una aplicación lineal e inyectiva entre los espacios tangentes $T_p S$ y $T_{\mathbf{X}(p)} M$ a través de la diferencial $d\mathbf{X}_p$. Más aún, la métrica de M permite descomponer el espacio $T_{\mathbf{X}(p)} M$ como

$$T_{\mathbf{X}(p)} M = d\mathbf{X}_p(T_p(S)) \oplus d\mathbf{X}_p(T_p(S))^\perp,$$

donde \oplus denota la suma directa y $(\cdot)^\perp$ denota el complemento ortogonal. Así, dado un vector $v \in T_{\mathbf{X}(p)} M$, podemos escribir de manera única v como $v = v^\top + v^\perp$, donde v^\top pertenece a $d\mathbf{X}_p(T_p(S))$ y v^\perp a su complemento ortogonal. Para simplificar la notación, identificaremos $T_p S \equiv d\mathbf{X}_p(T_p(S))$, y llamaremos $T_p^\perp S$ al espacio $d\mathbf{X}_p(T_p(S))^\perp$.

Por ser variedades Riemannianas, tanto S como M poseen una conexión de Levi-Civita, que denotaremos por ∇ y $\bar{\nabla}$ respectivamente. Estas conexiones se encuentran relacionadas de la siguiente forma: sean $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ dos campos de S y denotemos por $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ a dos campos que *extienden* a X e Y : esto es, para todo $p \in S$, $\tilde{X}(\mathbf{X}(p)) = d\mathbf{X}_p(X(p))$, $\tilde{Y}(\mathbf{X}(p)) = d\mathbf{X}_p(Y(p))$. En estas condiciones, se cumple que

$$\nabla_X Y = \left(\bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \right)^\top.$$

Es decir, la conexión ∇ se corresponde con la parte *tangente* a S de la conexión $\bar{\nabla}$. Por otro lado, el estudio de la parte normal de $\bar{\nabla}$ será de interés para obtener información sobre la curvatura de la superficie, como veremos a continuación.

Definición 1.26. Llamaremos **segunda forma fundamental** al operador $\sigma : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$\sigma(X, Y) := \left(\bar{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \right)^\perp,$$

donde \tilde{X}, \tilde{Y} son extensiones de los campos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$. El operador σ está bien definido, esto es, no depende de las extensiones \tilde{X}, \tilde{Y} escogidas. Más aún, σ induce en cada $p \in S$ una aplicación bilineal y simétrica $\sigma_p : T_p S \times T_p S \rightarrow T_p^\perp(S)$.

Debido a que S es una variedad de dimensión 2 y M es de dimensión 3, el espacio vectorial $T_p^\perp S$ es de dimensión 1 para todo $p \in S$. Sea ξ un campo *normal unitario* a S , esto es, una aplicación diferenciable $\xi : V \rightarrow TM$ definida en un abierto $V \subset S$ tal que $\xi(p) \in T_p^\perp S$ y $\bar{g}(\xi, \xi) \equiv 1$ para todo $p \in V$. Podemos escribir la segunda forma fundamental en términos de ξ ,

$$\sigma_p(u, v) = \bar{g}_p(\sigma_p(u, v), \xi(p))\xi(p). \quad (1.3)$$

De esta manera, la aplicación $\tilde{\sigma}_p := \bar{g}_p(\sigma_p(u, v), \xi(p))$ define una 2-forma simétrica en V . Dada una parametrización (U, φ) , $\varphi = \varphi(u, v)$, tal que $U \subset V$, podemos expresar $\tilde{\sigma}$ como

$$\tilde{\sigma} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2, \quad (1.4)$$

donde $e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ son aplicaciones diferenciables. Llamaremos a estas funciones **coeficientes de la segunda forma fundamental** respecto al normal ξ .

Para todo $p \in S$, existen dos campos normales y unitarios ξ_1, ξ_2 definidos en un entorno de p , siendo $\xi_2 \equiv -\xi_1$. La elección del campo unitario afecta al signo de los coeficientes e, f, g .

Observación 1.27. En relación con lo anterior, podemos plantearnos la pregunta de si es posible definir un campo ξ normal y unitario sobre toda la superficie S , lo cual permitiría a su vez definir globalmente la 2-forma $\tilde{\sigma}$ y fijar el signo de los coeficientes e, f, g . La respuesta es afirmativa si tanto S como M son variedades orientables (ver definición 1.2).

A partir de la segunda forma fundamental de una superficie podemos introducir el llamado **endomorfismo de Weingarten**.

Definición 1.28. Sea ξ un campo normal y unitario a S definido en un abierto $U \subset S$. En estas condiciones, definimos el **endomorfismo de Weingarten** asociado a ξ en el punto $p \in U$ como la única aplicación lineal $A_{\xi(p)} : T_p S \rightarrow T_p S$ que verifica

$$\bar{g}_p(A_{\xi(p)}u, v) = \bar{g}_p(\sigma_p(u, v), \xi(p)).$$

Observación 1.29. Es posible definir alternativamente el endomorfismo de Weingarten en función de la conexión $\bar{\nabla}$ de M . Dado $p \in S$, $u \in T_p S$ y $X \in \mathfrak{X}(S)$ un campo tal que $X(p) = u$,

$$A_{\xi(p)}u = -\left(\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\xi\right)_p, \tag{1.5}$$

donde $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ es una extensión de X .

Debido a la simetría de σ_p , se puede deducir que $A_{\xi(p)}$ es un operador autoadjunto. En consecuencia, en todo $p \in S$ existen un par de autovalores $k_1(p), k_2(p)$ de $A_{\xi(p)}$, que llamaremos **curvaturas principales** de S en p . Definimos asimismo las curvaturas **media** $H(p)$ y **extrínseca** $K_e(p)$ como un medio de la traza y el determinante de $A_{\xi(p)}$, esto es,

$$H(p) := \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}, \quad K_e(p) := k_1(p)k_2(p). \tag{1.6}$$

Como comentamos anteriormente, dado $p \in S$, existen dos campos normales y unitarios ξ_1, ξ_2 definidos en un entorno de p . La elección del campo unitario afecta al signo de las curvaturas principales y a la curvatura media, pero no al de la curvatura extrínseca.

Dada una parametrización de S , podemos expresar las curvaturas media y extrínseca a partir de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental:

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}, \quad K_e = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (1.7)$$

También podemos escribir en función de estos coeficientes la **ecuación de líneas de curvatura**. Recordamos que un vector $t \in T_p S$ es solución de esta ecuación si y solo si es un autovector del endomorfismo de Weingarten. Podemos escribir la ecuación de líneas de curvatura como $\Phi(t, t) = 0$, siendo

$$\Phi := (fE - eF)du^2 + (gE - eG)dudv + (gF - fG)dv^2. \quad (1.8)$$

Definición 1.30. Sea U el conjunto de **puntos umbílicos** de S , esto es, el conjunto de puntos donde las curvaturas principales k_1, k_2 coinciden. Dado $p \in U$, la expresión (1.8) pasa a ser 0, y todo vector de $T_p S$ es un autovector del endomorfismo de Weingarten. En el conjunto complementario $S \setminus U$, la ecuación de líneas de curvatura define dos campos de líneas L_1, L_2 , que llamaremos **campos de líneas de curvatura**. Debido a que el endomorfismo de Weingarten es autoadjunto, los campos L_1 y L_2 resultan ser ortogonales.

Por último, veamos a modo de repaso los conceptos estudiados en esta sección para el caso de superficies de \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 1.31. (Superficies en \mathbb{R}^3) Sea (S, \mathbf{X}) una superficie de \mathbb{R}^3 , y consideremos una parametrización (U, φ) , $\varphi = \varphi(u, v)$, de S . Definamos $\mathbf{x} := \mathbf{X} \circ \varphi$. Es posible definir un campo normal y unitario $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$N := \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}, \quad (1.9)$$

donde \times denota el producto vectorial de \mathbb{R}^3 . Antes de seguir, es interesante remarcar que dos parametrizaciones (U_1, φ_1) , (U_2, φ_2) dan lugar al mismo campo normal unitario si y solo si la

reparametrización $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ tiene determinante jacobiano positivo. Esto evidencia que una superficie de \mathbb{R}^3 es orientable si y solo si es posible definir globalmente un campo unitario y normal a la superficie.

A partir de la ecuación (1.3) y teniendo en cuenta que la conexión en \mathbb{R}^n se corresponde con la derivada direccional (ver ejemplo 1.12), es posible deducir que los coeficientes de la segunda forma fundamental vienen dados por

$$\begin{aligned} e &= \langle \mathbf{x}_{uu}, N \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle, \\ f &= \langle \mathbf{x}_{uv}, N \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle, \\ g &= \langle \mathbf{x}_{vv}, N \rangle = -\langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle. \end{aligned}$$

Sea $\xi := N \circ \varphi^{-1}$. A partir de la ecuación (1.5), podemos deducir que para todo $p = \varphi(u, v)$,

$$\begin{aligned} A_{\xi(p)} \partial_u &= -N_u(u, v), \\ A_{\xi(p)} \partial_v &= -N_v(u, v). \end{aligned}$$

Más aún, si en un punto $p_0 = \varphi(u_0, v_0) \in S$ tenemos que ∂_u, ∂_v son autovectores del endomorfismo de Weingarten asociados a curvaturas principales k_1, k_2 , entonces

$$\begin{aligned} -N_u(u_0, v_0) &= k_1 \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \\ -N_v(u_0, v_0) &= k_2 \mathbf{x}_v(u_0, v_0). \end{aligned} \tag{1.10}$$

En particular, esta situación se da en los puntos umbílicos de la superficie.

1.4. Superficies especiales de Weingarten

En esta sección presentaremos las llamadas **superficies especiales de Weingarten** (o **W-superficies especiales**). Esta familia de superficies supone una generalización de las superficies de curvatura media constante y de las superficies de curvatura extrínseca positiva, como veremos

en el ejemplo 1.34.

Definición 1.32. Diremos que una superficie inmersa (S, \mathbf{X}) en una 3-variedad Riemanniana es una **superficie de Weingarten** (o **W-superficie**) si sus curvaturas extrínseca K_e y media H satisfacen una ecuación del tipo

$$F(K_e, H) = 0, \quad (1.11)$$

donde $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F = F(\alpha, \beta)$, es una función de clase C^2 definida en $D := \{(\alpha, \beta) : \alpha \leq \beta^2\}$. Debido a que las curvaturas K_e, H pueden escribirse en función de las curvaturas principales k_1, k_2 mediante las ecuaciones (1.6), es posible escribir alternativamente (1.11) como

$$W(k_1, k_2) = 0, \quad (1.12)$$

donde $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $W(x, y) := F(xy, \frac{x+y}{2})$ es una función de clase C^2 por serlo F . Definiendo $(\alpha, \beta) = (xy, \frac{x+y}{2})$, tenemos que $(x, y) \in W^{-1}(0)$ si y solo si $(\alpha, \beta) \in F^{-1}(0)$.

Además, diremos que S es una W-superficie **especial** (o **elíptica**) si se verifica

$$W_x(x, y)W_y(x, y) > 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in W^{-1}(0), \quad (1.13)$$

o bien, en términos de $F(\alpha, \beta)$ y sus derivadas parciales,

$$\alpha F_\alpha^2(\alpha, \beta) + \frac{1}{4} F_\beta^2(\alpha, \beta) + \beta F_\alpha(\alpha, \beta) F_\beta(\alpha, \beta) > 0 \quad \text{para todo } (\alpha, \beta) \in F^{-1}(0). \quad (1.14)$$

Observación 1.33. Hacemos notar que D no es un abierto de \mathbb{R}^2 . Cuando exigimos que F sea de clase C^2 en D nos referimos a que existe un abierto $G \subset \mathbb{R}^2$ tal que $D \subset G$ y una extensión $\tilde{F} : G \rightarrow \mathbb{R}$ de F (esto es, $\tilde{F}|_D \equiv F$) de clase C^2 en G .

Ejemplo 1.34. Veamos algunos ejemplos de W-superficies especiales. Empecemos con las superficies de curvatura media constante $c \in \mathbb{R}$. Las curvaturas principales de estas superficies verifican

una relación $W(k_1, k_2) = 0$, donde $W(x, y) := \frac{x+y}{2} - c$. Derivando,

$$W_x(x, y)W_y(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > 0.$$

En particular, cuando evaluemos en aquellos puntos (x, y) tales que $W(x, y) = 0$, se verifica la condición (1.13), con lo cual las superficies de curvatura media constante son W-superficies especiales.

Pasemos al caso de las superficies de curvatura extrínseca constante $c \in \mathbb{R}$. Estas superficies verifican una relación $W(k_1, k_2) = 0$ con $W(x, y) := xy - c$, $c \in \mathbb{R}$. Notemos que

$$W_x(x, y)W_y(x, y) = xy.$$

En particular, en aquellos puntos donde $W(x, y) = xy - c = 0$, tenemos que $W_x(x, y)W_y(x, y) = c$. Por tanto, las superficies de curvatura extrínseca constante son W-superficies especiales si y solo si su curvatura es estrictamente positiva.

Observación 1.35. La condición (1.13) implica que el conjunto $W^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2$ es una unión disjunta de curvas diferenciables de la forma $y = f(x)$, donde f está definida en un intervalo abierto (a, b) (ver figura 1.5) Podemos decir algo más sobre estas curvas:

1. f es una función estrictamente decreciente, siendo $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$.
2. $f \circ f = Id$. Este hecho es consecuencia de la simetría de W frente al cambio $(x, y) \rightarrow (y, x)$.
3. Si $a \neq -\infty$, entonces $b = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$.
4. Si $b \neq \infty$, entonces $a = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$.

Una consecuencia de las condiciones 1, 3, 4 es que cada una de las curvas $y = f(x)$ cortan en un único punto a la recta $y = x$ (esto es, existe un único $c \in \mathbb{R}$ tal que $c = f(c)$). La condición 2 implica que en dicho punto la derivada de f es exactamente -1 .

Sea (S, \mathbf{X}) una W-superficie especial con curvaturas principales k_1, k_2 (asumiremos, sin pérdida de generalidad, $k_1 \geq k_2$) y consideremos la aplicación $C : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ que asocia a cada punto $p \in S$ el

par $(k_1(p), k_2(p))$. El conjunto $C(S)$ estará contenido en una de las curvas de $W^{-1}(0)$, de manera que las curvaturas de la superficie satisfarán una relación de la forma $k_2 = f(k_1)$. En particular, todos los puntos umbílicos de la superficie deben tener la misma curvatura: en efecto, si $p, q \in S$ son dos puntos umbílicos, entonces $k_1(p) = k_2(p) = f(k_1(p))$, y $k_1(q) = k_2(q) = f(k_1(q))$. Como existe un único punto $c = f(c)$, entonces $k_1(p) = k_2(p) = k_1(q) = k_2(q)$.

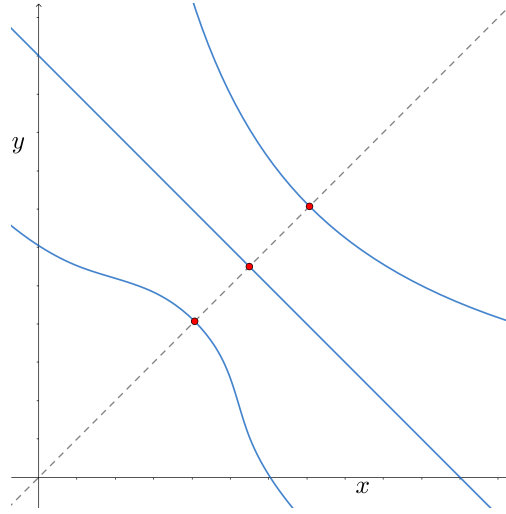


Figura 1.5: En azul, el conjunto $W^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2$, con W una función asociada a una superficie especial de Weingarten. Tenemos varias curvas disjuntas que cortan a la recta $x = y$ (línea discontinua) en un único punto.

Antes de continuar, presentaremos una escritura alternativa de la ecuación (1.11) que nos será de utilidad en el capítulo 3.

Proposición 1.36. *Sea (S, \mathbf{X}) una W -superficie especial. Definiendo $\mu := H^2 - K_e = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4} \geq 0$, escribimos (1.11) como*

$$G(\mu, H) = 0,$$

donde se define $G : [0, \infty) \times \mathbb{R}$, $G(x, y) := F(y^2 - x, y)$. Entonces, se verifica que

$$G_y(x, y) \neq 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in G^{-1}(0) \tag{1.15}$$

Demostración. Por ser F diferenciable, G también lo será. Definiendo $(\alpha, \beta) = (y^2 - x, y)$, tenemos que $(x, y) \in G^{-1}(0)$ si y solo si $(\alpha, \beta) \in F^{-1}(0)$. De (1.14) se deduce que

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{4}F_\beta^2(\alpha, \beta) + \alpha F_\alpha^2(\alpha, \beta) + \beta F_\alpha(\alpha, \beta)F_\beta(\alpha, \beta) \\ &= \left(\frac{1}{2}F_\beta(\alpha, \beta) + \beta F_\alpha(\alpha, \beta)\right)^2 + (\alpha - \beta^2)F_\alpha^2(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

para todo $(\alpha, \beta) \in F^{-1}(0)$. Debido a que $\alpha - \beta^2 = -x \leq 0$, la desigualdad anterior implica que necesariamente $\frac{1}{2}F_\beta(\alpha, \beta) + \beta F_\alpha(\alpha, \beta) \neq 0$ para todo $(\alpha, \beta) \in F^{-1}(0)$. En consecuencia, para todo $(x, y) \in G^{-1}(0)$,

$$G_y(x, y) = 2yF_\alpha(\alpha, \beta) + F_\beta(\alpha, \beta) = 2\beta F_\alpha(\alpha, \beta) + F_\beta(\alpha, \beta) \neq 0,$$

como queríamos probar. □

Desde el punto de vista de la teoría de EDPs, la condición (1.13) (equivalentemente, (1.14)) indica que las W-superficies especiales satisfacen una EDP de segundo orden **absolutamente elíptica**. Definamos primero este concepto.

Definición 1.37. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(r, s, t, p, q, z, x, y)$, una función continua y diferenciable respecto a sus tres primeros argumentos, donde U es un abierto simplemente conexo. Podemos plantear la EDP de segundo orden

$$f(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) = 0, \tag{1.16}$$

definida para aquellas funciones $z : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, siendo V un abierto de \mathbb{R}^2 y $z = z(x, y)$ una función de clase C^2 tal que $(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) \in U$ para todo $(x, y) \in V$. Diremos que (1.16) es una EDP **absolutamente elíptica** si para todo $\omega \in U$ se tiene que la forma cuadrática

$$\Lambda_\omega(\lambda, \mu) := f_r(\omega)\lambda^2 + f_s(\omega)\lambda\mu + f_t(\omega)\mu^2 \tag{1.17}$$

es definida positiva.

Notación 1.38. Dada $z : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, siendo z de clase C^2 , definimos la función continua $[z] : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^8$ como

$$[z](x, y) := (z_{xx}(x, y), z_{xy}(x, y), z_{yy}(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y), z(x, y), x, y).$$

Observación 1.39. Si dada una función f la forma cuadrática (1.17) resulta ser definida negativa, entonces la EDP asociada a la función $-f$ sería definida positiva (algo que a efectos prácticos no afectaría a (1.16)). Es por ello que en realidad podemos entender que una EDP es absolutamente elíptica si la forma cuadrática (1.17) es definida positiva o negativa, esto es, $\Lambda_\omega(\lambda, \mu) \neq 0$ para todo par $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Esta condición equivale a que se verifique la desigualdad

$$4f_r(\omega)f_t(\omega) - f_s(\omega)^2 > 0. \quad (1.18)$$

La demostración de este hecho es sencilla si tenemos en cuenta que $\Lambda_\omega(\lambda, \mu)$ puede escribirse en forma matricial como

$$\Lambda_\omega(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r(\omega) & \frac{1}{2}f_s(\omega) \\ \frac{1}{2}f_s(\omega) & f_t(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Llamemos A la matriz anterior. Por el criterio de Sylvester, A es definida positiva o negativa si y solo si $f_r(\omega) \neq 0$ y $\det(A) > 0$. Notemos que

$$\det(A) = f_r(\omega)f_t(\omega) - \frac{1}{4}f_s^2(\omega),$$

con lo cual todas las matrices definidas positivas o negativas verifican (1.18). Esta desigualdad implica a su vez que $f_r(\omega) \neq 0$, pues en caso contrario llegaríamos a la contradicción

$$0 < 4f_r(\omega)f_t(\omega) - f_s^2(\omega) = -f_s^2(\omega) < 0.$$

De esta observación podemos deducir el siguiente resultado:

Proposición 1.40. *Sea (S, \mathbf{X}) una W -superficie especial inmersa en \mathbb{R}^3 . Dado un punto $p \in S$ cualquiera, siempre podemos escoger un sistema de referencia en \mathbb{R}^3 y una parametrización (U, φ) en un entorno de p tal que la composición $\mathbf{x} = \mathbf{X} \circ \varphi$ verifique $\mathbf{x}(x, y) := (x, y, z(x, y))$, donde $z : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. En estas condiciones, para todo $(x_0, y_0) \in U$ existe un abierto $V \subset U$ tal que $(x_0, y_0) \in V$ y la restricción $z|_V$ satisface una EDP absolutamente elíptica del tipo (1.16), donde f es una función de clase C^2 .*

Demostración. Podemos expresar las curvaturas K_e y H en función de z y sus derivadas parciales (ver [dC76]),

$$K_e = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad (1.19)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.20)$$

donde $(r, s, t, p, q, z, x, y) = [z](x, y)$. Como las curvaturas K_e, H satisfacen una relación de la forma $F(K_e, H) = 0$, deducimos que la función $z(x, y)$ verifica

$$f(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) = 0,$$

donde $f(r, s, t, p, q, z, x, y) := F\left(\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}, \frac{1}{2} \frac{(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$ es una función de clase C^2 . Fijado un punto $(x_0, y_0) \in U$, definamos $\omega_0 = [z](x_0, y_0) = (r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0, x_0, y_0)$ y estudiemos la condición de elipticidad (1.18). Denotemos por α_0, β_0 las curvaturas extrínseca y media respectivamente en el punto (x_0, y_0) . De la definición de F se sigue que $(\alpha_0, \beta_0) \in F^{-1}(0)$. Definiendo $P = 1 + p_0^2 + q_0^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} f_r(\omega_0) &= \frac{t_0}{P^2} F_\alpha(\alpha_0, \beta_0) + \frac{1 + q_0^2}{2P^{\frac{3}{2}}} F_\beta(\alpha_0, \beta_0), \\ f_s(\omega_0) &= -\frac{2s_0}{P^2} F_\alpha(\alpha_0, \beta_0) - \frac{p_0 q_0}{P^{\frac{3}{2}}} F_\beta(\alpha_0, \beta_0), \\ f_t(\omega_0) &= \frac{r_0}{P^2} F_\alpha(\alpha_0, \beta_0) + \frac{1 + p_0^2}{2P^{\frac{3}{2}}} F_\beta(\alpha_0, \beta_0). \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}
4f_r(\omega_0)f_t(\omega_0) - f_s(\omega_0)^2 &= \frac{4}{P^2} \left(\frac{r_0 t_0 - s_0^2}{P^2} F_\alpha^2(\alpha_0, \beta_0) + \frac{1 + p_0^2 + q_0^2}{4P} F_\beta^2(\alpha_0, \beta_0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1 + p_0^2)t_0 + (1 + q_0^2)r_0 - 2p_0q_0s_0}{2P^{\frac{3}{2}}} F_\alpha(\alpha_0, \beta_0)F_\beta(\alpha_0, \beta_0) \right) \\
&= \frac{4}{P^2} \left(\alpha_0 F_\alpha^2(\alpha_0, \beta_0) + \frac{1}{4} F_\beta^2(\alpha_0, \beta_0) + \beta_0 F_\alpha(\alpha_0, \beta_0)F_\beta(\alpha_0, \beta_0) \right) > 0
\end{aligned}$$

como consecuencia de (1.14). Debido a que la aplicación $h(\omega) := 4f_r(\omega)f_t(\omega) - f_s^2(\omega)$ es continua, existe un entorno abierto $W \subset \mathbb{R}^8$ de ω_0 (que podemos tomar simplemente conexo) en el cual $h(\omega) > 0$ para todo $\omega \in W$. Así, la EDP asociada a f es absolutamente elíptica en W , de acuerdo con lo discutido en la observación 1.39. Definiendo $V := [z]^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2$, se deduce que la restricción $z|_V$ satisface la EDP absolutamente elíptica 1.16. \square

1.5. Parametrizaciones isotermas y superficies de Riemann

En esta sección estudiaremos un tipo particular de parametrizaciones sobre superficies Riemannianas, las **parametrizaciones isotermas**. Como veremos, estas permitirán dotar de una estructura compleja adicional a las superficies, hecho que usaremos en la demostración del teorema de Hopf. Comenzaremos introduciendo el concepto de aplicación **conforme**:

Definición 1.41. Diremos que una aplicación $f : M \rightarrow N$ entre variedades Riemannianas (M, g) y (N, h) es **conforme** si existe una función positiva $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)) = \lambda(p)g_p(u, v)$$

para todo $p \in M$ y $u, v \in T_pM$.

Intuitivamente, las aplicaciones conformes son aquellas que preservan *ángulos*, pero no distancias. En el caso particular de una aplicación vectorial $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, F es conforme si y solo si sus derivadas parciales son vectores ortogonales con la misma norma.

Proposición 1.42. Sean $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow O$ aplicaciones conformes. Entonces la composición $g \circ f$ es conforme. Más aún, si f es un difeomorfismo, la inversa f^{-1} también es conforme.

Definición 1.43. Sea (S, g) una superficie Riemanniana. Diremos que una parametrización (U, φ) es **isoterma** si existe una función positiva $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que podemos expresar la métrica como

$$g = \lambda(du^2 + dv^2),$$

esto es, para todo $p \in U$ los vectores ∂_u y ∂_v son ortogonales y poseen la misma norma.

Las parametrizaciones isotermas, vistas como aplicaciones definidas de un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ en S , son un ejemplo de aplicaciones conformes. El siguiente teorema afirma que toda superficie puede ser parametrizada usando únicamente este tipo de parametrizaciones.

Teorema 1.44. ([C55]) Sea S una superficie Riemanniana. Dado $p \in S$, existe una parametrización (U, φ) isoterma tal que $p \in U$. Más aún, si S es orientable, entonces existe un atlas \mathcal{A} formado exclusivamente por parametrizaciones isotermas y tal que todas sus reparametrizaciones tienen determinante jacobiano positivo.

Como veremos a continuación, las parametrizaciones isotermas de superficies están estrechamente relacionadas con la variable compleja. En este contexto, será útil identificar \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} , asociando al par $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ el número complejo $w := u + iv$. Así, cualquier función de dos variables reales $f(u, v)$ puede ser vista como una función de variable compleja, definiendo $\tilde{f}(w) := f(u, v)$. Para simplificar la notación, escribiremos directamente $f(w)$ en vez de $\tilde{f}(w)$. Motivados por esta definición, introducimos las derivadas parciales $f_w = \frac{\partial f}{\partial w}$, $f_{\bar{w}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}$, que definimos como

$$\begin{aligned} f_w &= \frac{1}{2}(f_u - if_v), \\ f_{\bar{w}} &= \frac{1}{2}(f_u + if_v). \end{aligned} \tag{1.21}$$

donde f_u, f_v denotan las derivadas parciales de f respecto a u, v . Una consecuencia inmediata de la definición 1.21 es que una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si y solo si $f_{\bar{w}} \equiv 0$. Además, si f es holomorfa, entonces la derivada compleja f' coincide con f_w .

Proposición 1.45. *Sea S una superficie Riemanniana, y consideremos las parametrizaciones isotermas (U_1, φ_1) , $\varphi_1 = \varphi_1(u, v)$, y (U_2, φ_2) , $\varphi_2 = \varphi_2(x, y)$. Supongamos que $W = \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2) \neq \emptyset$, y que el jacobiano del cambio de parametrización $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ es positivo. En estas condiciones, si definimos $z = x + iy$, $w = u + iv$, la función $z(w)$ es un **biholomorfismo**.*

Demostración. Definamos $F := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$. Bajo la identificación $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, la función $z(w)$, que es una función definida de un abierto de \mathbb{C} en \mathbb{C} , se corresponde con la reparametrización F , definida de un abierto de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , siendo $F = (x, y) = (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$.

Como φ_1 y φ_2 son aplicaciones conformes, entonces la composición F también lo será. Por tanto, las derivadas parciales F_u, F_v serán dos vectores ortogonales con la misma norma, esto es,

$$x_u x_v + y_u y_v = 0,$$

$$x_u^2 + y_u^2 = x_v^2 + y_v^2,$$

de donde deducimos que $(x_v, y_v) = \pm(-y_u, x_u)$. El jacobiano de F vendrá dado por

$$x_u y_v - y_u x_v = \pm(x_u^2 + y_u^2) > 0,$$

de donde deducimos que $(x_v, y_v) = (-y_u, x_u)$. De esta manera,

$$\operatorname{Re}(z)_u = x_u = y_v = \operatorname{Im}(z)_v,$$

$$\operatorname{Re}(z)_v = x_v = -y_u = -\operatorname{Im}(z)_u,$$

que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por tanto, $z(w)$ es holomorfa.

Podemos aplicar un argumento análogo para la inversa $w(z)$, asociada a la reparametrización $F^{-1} = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$, deduciendo que $w(z)$ también es holomorfa y por tanto $z(w)$ define un biholomorfismo entre abiertos de \mathbb{C} . □

Sea S una superficie Riemanniana orientable. El teorema 1.44 afirma que S admite un atlas $\mathcal{A} := \{(U_i, \varphi_i)\}$ formado por parametrizaciones isotermas. Mediante la identificación $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$,

podemos ver U_i como subconjuntos abiertos de \mathbb{C} y φ_i como funciones de variable compleja. La proposición 1.45 permite deducir que las reparametrizaciones de \mathcal{A} serían **biholomorfismos**. De esta manera, las superficies Riemannianas orientables presentan una estructura compleja adicional: son **superficies de Riemann**.

Definición 1.46. Sea S un espacio topológico Hausdorff y 2° numerable. Una **estructura conforme** sobre S es un atlas $\mathcal{A} := \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de dimensión 2 con las siguientes propiedades:

1. Bajo la identificación $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, las reparametrizaciones $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$, vistas como funciones complejas, son **biholomorfismos**.
2. \mathcal{A} es maximal, en el sentido de que si existiese otro atlas \mathcal{B} de manera que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ verifica la propiedad anterior, entonces $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Llamaremos **superficie de Riemann** a toda superficie dotada de una estructura conforme.

Si sobre un espacio topológico S podemos definir un atlas \mathcal{A} verificando la primera propiedad de la definición anterior, entonces existe un único atlas maximal $\langle \mathcal{A} \rangle$ que define una estructura conforme sobre S .

La estructura conforme de las superficies de Riemann motiva la introducción de vectores y 1-formas complejas. Para ello, introducimos en cada punto $p \in S$ de la superficie de Riemann el **espacio tangente complexificado**, definido como

$$T_p^{\mathbb{C}}S := \{\alpha t : \alpha \in \mathbb{C}, t \in T_p S.\}$$

Este conjunto es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión 2. Dada una parametrización $\varphi(w) = \varphi(u, v)$ y una base ∂_u, ∂_v de $T_p S$ (ver notación 1.23), los vectores $\partial_w, \partial_{\bar{w}}$, definidos como

$$\partial_w := \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v), \quad \partial_{\bar{w}} := \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v), \quad (1.22)$$

definen una base (compleja) del espacio $T_p^{\mathbb{C}}S$. De la misma manera, introducimos las 1-formas

complejas $dw = du + idv$, $d\bar{w} = du - idv$ así como las 2-formas

$$dw^2 := dw \odot dw, \quad d\bar{w}^2 := d\bar{w} \odot d\bar{w}, \quad |dw|^2 := \frac{dw \odot d\bar{w} + d\bar{w} \odot dw}{2}.$$

Observación 1.47. Sea Φ una 2-forma simétrica definida en una superficie Riemanniana orientable sobre la que consideramos una estructura conforme $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$. Dada una parametrización isoterma $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$, $\varphi_i = \varphi_i(u, v)$, podemos expresar Φ como

$$\Phi = a_i du^2 + b_i dudv + c_i dv^2, \quad (1.23)$$

donde los coeficientes $a_i, b_i, c_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ son aplicaciones diferenciables dependientes de la parametrización (U_i, φ_i) escogida. Podemos expresar las 1-formas du, dv en función de las 1-formas complejas $dw, d\bar{w}$, siendo

$$du = \frac{dw + d\bar{w}}{2}, \quad dv = \frac{dw - d\bar{w}}{2i}. \quad (1.24)$$

Así, podemos reescribir Φ como

$$\Phi = \tilde{a}_i dw^2 + \tilde{b}_i |dw|^2 + \tilde{c}_i d\bar{w}^2,$$

donde $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{c}_i : U \rightarrow \mathbb{C}$ son ahora funciones complejas. En estas condiciones, la 2-forma compleja Ψ dada por $\Psi \equiv \tilde{a}_i dw^2$ para cada parametrización isoterma $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$ está bien definida, es decir, no depende de la parametrización escogida. De igual manera, también podemos construir 2-formas a partir de $\tilde{b}_i |dw|^2$ y $\tilde{c}_i d\bar{w}^2$. Podemos decir algo más sobre Ψ : dadas dos parametrizaciones (U_1, φ_1) , $\varphi_1 = \varphi_1(w)$, (U_2, φ_2) , $\varphi_2 = \varphi_2(z)$, se cumple que

$$\tilde{a}_1(w) = \tilde{a}_2(z(w))(z'(w))^2. \quad (1.25)$$

Análogamente, dada una parametrización $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$, $\varphi_i = \varphi_i(w)$, podemos expresar cualquier

1-forma Ω en función de $dw, d\bar{w}$ como

$$\Omega \equiv \tilde{a}_i dw + \tilde{b}_i d\bar{w},$$

siendo \tilde{a}_i, \tilde{b}_i funciones complejas diferenciables. Tal y como sucedía en el caso anterior, podemos definir un par de 1-formas complejas a partir de los términos $\tilde{a}_i dw, \tilde{b}_i d\bar{w}$, respectivamente.

Definición 1.48. En relación con lo anterior, diremos que una 2-forma es **holomorfa** si para toda parametrización (U_i, φ_i) , $\varphi_i = \varphi_i(w)$, Φ puede escribirse como $\Phi \equiv f_i(w)dw^2$, siendo f_i una aplicación holomorfa.

Veamos algunos ejemplos de superficies de Riemann. Como fue discutido previamente, toda superficie Riemanniana orientable admite una estructura conforme. En particular, todo abierto U del plano complejo admite de manera trivial una estructura conforme, dada por el atlas $\mathcal{A} := \{(U, i)\}$, donde $i : U \rightarrow \mathbb{C}$ denota la inclusión. Otro ejemplo interesante es la llamada **esfera de Riemann**, dada por $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Una base para la topología de $\overline{\mathbb{C}}$ viene dada por $\tau_{\mathbb{C}} \cup F$, donde $\tau_{\mathbb{C}}$ es la topología de \mathbb{C} y F es la familia

$$F := \left\{ \{\infty\} \cup \left(\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, r)} \right) : r > 0 \right\},$$

donde $\overline{B(0, r)}$ denota la bola cerrada de radio r centrada en el origen. Topológicamente, este espacio es una superficie compacta y de género 0 (es decir, homeomorfo a una esfera). Podemos dotar a $\overline{\mathbb{C}}$ de una estructura conforme a partir del atlas $\{(\mathbb{C}, \varphi_1), (\mathbb{C}, \varphi_2)\}$, donde φ_1 parametriza \mathbb{C} mediante $\varphi_1(w) = w$, y φ_2 parametriza $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ mediante $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$ (entendemos que $\frac{1}{0} = \infty$).

A continuación, presentaremos el llamado **teorema de uniformización para superficies de Riemann**. Para poder enunciarlo, debemos introducir el concepto de superficies conformemente equivalentes:

Definición 1.49. Diremos que dos superficies de Riemann M, N son **conformemente equivalentes** si existe un **biholomorfismo** $F : M \rightarrow N$ entre ellas, esto es, F es un difeomorfismo tal

que para toda parametrización (V, ψ) de N existe una parametrización (U, φ) de M verificando que $F(\varphi(U)) \subset \psi(V)$ y la composición $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ es una aplicación holomorfa.

Teorema 1.50. (Teorema de uniformización de Riemann, [FK80]) *Sea S una superficie de Riemann simplemente conexa. Entonces S es conformemente equivalente a una de las siguientes superficies de Riemann: el disco unidad $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, el plano complejo \mathbb{C} o la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$.*

Corolario 1.51. *Si S es una superficie de Riemann homeomorfa a una esfera, entonces es conformemente equivalente a la esfera de Riemann.*

Demostración. Ni el disco unidad \mathbb{D} ni \mathbb{C} son superficies compactas, así que necesariamente S debe ser conformemente equivalente a $\overline{\mathbb{C}}$. \square

Una consecuencia interesante de este hecho es el siguiente teorema:

Teorema 1.52. *Si S es una superficie de Riemann homeomorfa a una esfera, entonces la única 2-forma holomorfa Φ definida sobre S es la trivial, $\Phi \equiv 0$.*

Demostración. Por el corolario anterior, S es conformemente equivalente a $\overline{\mathbb{C}}$, de manera que existe un biholomorfismo $F : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow S$. Este biholomorfismo permite estudiar S a partir de la esfera de Riemann: concretamente, un posible atlas para S viene dado por $\{(\mathbb{C}, F \circ \varphi_1), (\mathbb{C}, F \circ \varphi_2)\}$, donde $\varphi_1(w) = w$, $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$.

Sea Φ una 2-forma holomorfa en S , y denotemos por $f(w)dw^2$, $g(z)dz^2$ las expresiones de Φ respecto a las parametrizaciones $(\mathbb{C}, F \circ \varphi_1)$, $(\mathbb{C}, F \circ \varphi_2)$, respectivamente. De acuerdo con la ecuación 1.25, se tiene que $f(w) = g(z(w))z'(w)^2$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Notemos que

$$z(w) = \left((F \circ \varphi_2)^{-1} \circ (F \circ \varphi_1) \right)(w) = (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(w) = \varphi_2^{-1}(w) = \frac{1}{w},$$

con lo cual

$$f(w) = g\left(\frac{1}{w}\right) \frac{1}{w^4}.$$

Tomando límites,

$$\lim_{w \rightarrow \infty} f(w) = g(0) \cdot 0 = 0.$$

En particular, la función holomorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ está acotada. Por el teorema de Liouville, deducimos que $f \equiv 0$. Podemos repetir un argumento similar para la función g , de donde deduciríamos que $g \equiv 0$. En consecuencia, Φ ha de ser la 2-forma trivial. \square

1.6. Espacios homogéneos simplemente conexos

Una pregunta que surge de manera natural en el estudio de teoremas clásicos de teoría de superficies en \mathbb{R}^3 consiste en plantear si estos resultados siguen siendo válidos para superficies inmersas en otras 3-variedades Riemannianas. En este sentido, resulta apropiado estudiar espacios con ciertas propiedades topológicas y geométricas aptas para el desarrollo de herramientas matemáticas.

Una familia interesante de espacios ambiente desde el punto de vista geométrico son los llamados **espacios homogéneos**, esto es, todas aquellas 3-variedades Riemannianas M que verifican la siguiente propiedad: dados $p, q \in M$, existe una isometría $f : M \rightarrow M$ tal que $f(p) = q$.

Dentro de la familia de espacios homogéneos, podemos restringirnos a aquellos que sean **simplemente conexos**. Esta restricción es hasta cierto punto natural, pues podemos estudiar cualquier espacio homogéneo M a través de su **recubridor universal** \tilde{M} , que será una 3-variedad Riemanniana homogénea y simplemente conexa.

Podemos clasificar los espacios homogéneos simplemente conexos en función de la dimensión de su grupo de isometrías³, que puede ser 3, 4 o 6 (ver [S83]):

- Si la dimensión del grupo de isometrías es 6, entonces estamos ante los espacios simplemente conexos de **curvatura seccional constante** $\kappa \in \mathbb{R}$, que denotaremos por $\mathbb{M}^3(\kappa)$. En función del valor de κ , estos espacios son isométricos a la 3-esfera de radio $\frac{1}{\kappa} > 0$, que denotaremos por $\mathbb{S}^3(\kappa)$, al espacio euclídeo \mathbb{R}^3 cuando $\kappa = 0$ o bien al espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3(\kappa)$ si $\kappa < 0$. Además de homogéneos, estos espacios son **isótropos**: dados $p, q \in M$, $u \in T_pM$, $v \in T_qM$, con u, v unitarios, existe una isometría $f : M \rightarrow M$ tal que $f(p) = q$, $df_p(u) = v$.

³Debido a que los espacios homogéneos son variedades Riemannianas, el teorema de Myers-Steenrod [MS39] afirma que su grupo de isometrías admite una estructura de grupo de Lie. En este sentido, podemos hablar de la dimensión de dicho grupo como variedad diferenciable.

- Los espacios homogéneos cuyo grupo de isometría poseen dimensión 4 pueden enmarcarse dentro de una familia 2-paramétrica $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, con $(\kappa, \tau) \in \mathbb{R}^2$, que estudiaremos a continuación.
- Los espacios con grupo de isometría de dimensión 3 se corresponden con grupos de Lie equipados con una métrica invariante a izquierdas.

1.6.1. Los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

Estos espacios son fibraciones sobre una superficie simplemente conexa y homogénea de curvatura constante $\mathbb{M}^2(\kappa)$. En función del valor de κ , estas superficies se corresponden con \mathbb{R}^2 cuando $\kappa = 0$, el plano hiperbólico de curvatura $\kappa < 0$, al que denotaremos $\mathbb{H}^2(\kappa)$, o la esfera de radio $r = \frac{1}{k} > 0$, que denotaremos por $\mathbb{S}^2(\kappa)$. Las *traslaciones* a lo largo de las fibras son isometrías. En este sentido, el campo unitario ξ tangente a las fibras es un **campo de Killing**. El parámetro τ recibe el nombre de **curvatura del fibrado** (*curvature bundle*), y su valor viene dado por la ecuación

$$\bar{\nabla}_X \xi = \tau X \times \xi, \quad (1.26)$$

donde X es un campo cualquiera, $\bar{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita y \times denota el producto vectorial⁴. Podemos clasificar los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ en seis grupos en función del valor de los parámetros (κ, τ) :

	$\kappa > 0$	$\kappa = 0$	$\kappa < 0$
$\tau = 0$	$\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3$	$\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$
$\tau \neq 0$	Esferas de Berger	Grupo de Heisenberg Nil_3	Recubridor universal de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$

⁴Es posible definir de manera natural un producto vectorial en toda variedad Riemanniana de dimensión 3 orientable.

Cuando $\tau = 0$, tenemos los espacios producto $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ equipados con la métrica producto (ver definición 1.10). Las fibras de estos espacios se corresponden con los conjuntos $\{p\} \times \mathbb{R}$, con $p \in \mathbb{M}^2(\kappa)$. A continuación, presentaremos los distintos espacios con $\tau \neq 0$.

Esferas de Berger

Las esferas de Berger son una familia de espacios homeomorfos a \mathbb{S}^3 que podemos describir de varias maneras, entre las que destacamos:

- Algebraicamente, las esferas de Berger se pueden identificar con el grupo de Lie SU_2 equipado con una cierta métrica invariante a izquierdas.
- Geométricamente, podemos definir las esferas de Berger como el recubridor universal del **fibrado unitario tangente** a la esfera $\mathbb{S}^2(\kappa)$ equipado con una **métrica de Sasaki**.

Vamos a estudiar en mayor detalle la segunda construcción, pues también nos servirá para el caso $\kappa < 0$, $\tau \neq 0$.

El fibrado unitario tangente a una variedad Riemanniana (M, g) de dimensión n se define como el conjunto de sus vectores unitarios, esto es,

$$UM := \{(p, v) \in TM : g_p(v, v) = 1\}.$$

UM admite de manera natural una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n - 1$. En nuestro caso particular, $US^2(\kappa)$ es una variedad de dimensión 3.

Por otra parte, dada una variedad Riemanniana (M, g) , siempre es posible definir una métrica \tilde{g} , a la que llamaremos **métrica de Sasaki**, sobre el fibrado tangente TM . Veamos cómo se define: sea $\alpha(t) = (p(t), v(t))$ una curva sobre TM con origen en un punto $(p_0, v_0) \in TM$. En estas condiciones, la norma del vector $V = [\alpha] \in T_{(p_0, v_0)}(TM)$ (ver observación 1.4) en la métrica de Sasaki viene dada por

$$\tilde{g}_{(p_0, v_0)}(V, V) = g_{p_0}(d\pi(V), d\pi(V)) + ag_{p_0}\left(\frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dv}{dt}(0)\right), \quad (1.27)$$

donde $\pi : TM \rightarrow M$ denota la proyección $\pi(p, v) = p$, a es una constante positiva y $\frac{Dv}{dt}$ es la

derivada covariante de v respecto a la conexión de Levi-Civita de M . De esta manera, la métrica de Sasaki *mide* tanto el desplazamiento de la curva $\alpha(t)$ sobre M (mediante el término $d\pi(V)$) como la variación del vector tangente $v(t)$ (a través de su derivada covariante).

En estas condiciones, podemos definir las esferas de Berger con curvatura de la base $\kappa > 0$ como el recubridor universal de $US^2(\kappa)$, que admite de manera natural una estructura de variedad Riemanniana. El valor de la curvatura del fibrado τ dependerá del factor a considerado en la métrica de Sasaki (1.27).

Resulta interesante remarcar que en el caso particular en el que $\kappa = 4\tau^2$, obtenemos una 3-esfera de curvatura seccional constante $\frac{\kappa}{4}$.

Grupo de Heisenberg Nil_3

Podemos definir de manera directa los espacios $\mathbb{E}^3(0, \tau)$ como \mathbb{R}^3 equipado con la métrica

$$\bar{g} = dx_1^2 + dx_2^2 + (\tau(x_2 dx_1 - x_1 dx_2) + dx_3)^2, \quad (1.28)$$

donde por dx_i denotamos las 1-formas definidas a partir de $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$, siendo $\{e_j\}_{j=1}^3$ la base canónica de \mathbb{R}^3 y δ_{ij} la delta de Kronecker.

En el caso $\tau = \frac{1}{2}$, podemos relacionar esta métrica con el grupo de Heisenberg Nil_3 , dado por

$$\text{Nil}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

que podemos parametrizar usando coordenadas exponenciales $\exp : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Nil}_3$,

$$\exp(x_1, x_2, x_3) \equiv \exp \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea g una métrica sobre Nil_3 invariante a izquierdas y tal que en la matriz identidad $Id \in \text{Nil}_3$ se cumpla que

$$g_{Id} = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Bajo estas hipótesis, la métrica g queda determinada y su expresión coincide con (1.28) para $\tau = \frac{1}{2}$.

En este caso, no es posible realizar una construcción geométrica como la seguida en el caso de las esferas de Berger: si equipamos al fibrado unitario $U\mathbb{R}^2$ con una métrica de Sasaki, su recubridor universal resultaría ser \mathbb{R}^3 con una métrica \tilde{g} dada por

$$\tilde{g} = dx_1^2 + dx_2^2 + adx_3^2,$$

con a una constante positiva.

Recubridor universal de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Esta familia de espacios puede construirse tomando el recubridor universal del grupo especial proyectivo lineal de matrices 2×2 reales $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ equipado con una cierta métrica invariante a izquierdas. Recordamos que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ se define como el grupo cociente

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \{Id, -Id\},$$

donde $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ denota al grupo de matrices reales 2×2 con determinante 1 e Id denota la aplicación identidad.

Al igual que en el caso de las esferas de Berger, podemos construir geoméricamente la familia $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ con $\kappa < 0$, $\tau \neq 0$: estos espacios se corresponden con el recubridor universal de $U\mathbb{H}^2(\kappa)$ equipado con una métrica de Sasaki (1.27). El factor a en esta métrica determinará el valor de la curvatura de fibrado τ .

1.6.2. Modelo general para los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

En esta sección presentaremos un modelo desarrollado por Benoît Daniel (ver [D07]) que nos permitirá *parametrizar* los distintos espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.

Sea $\mathbb{D}(r)$ el disco abierto de \mathbb{R}^2 centrado en el origen de radio r . Para $\kappa \geq 0$, (respectivamente,

$\kappa < 0$) consideremos \mathbb{R}^3 (respectivamente, $\mathbb{D}(\frac{2}{\sqrt{-\kappa}}) \times \mathbb{R}$) equipado con la siguiente métrica:

$$\bar{g} = \lambda^2(dx_1^2 + dx_2^2) + (\tau\lambda(x_2dx_1 - x_1dx_2) + dx_3)^2, \quad \text{donde } \lambda = \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{4}(x_1^2 + x_2^2)}. \quad (1.29)$$

En estas condiciones,

- Si $\kappa \leq 0$, este espacio es isométrico al correspondiente $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.
- Si $\kappa > 0$ y $\tau = 0$, el espacio es isométrico a $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ menos una fibra.
- Si $\kappa > 0$ y $\tau \neq 0$, el espacio es isométrico al recubridor universal de la esfera de Berger correspondiente menos una fibra⁵.

Podemos así parametrizar de forma general los diferentes espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Es interesante remarcar que en el caso particular $\tau = 0$, la expresión de g se reduce a

$$\bar{g} = \lambda^2(dx_1^2 + dx_2^2) + dx_3^2.$$

Así, \bar{g} puede descomponerse como la métrica producto $g_1 \oplus g_2$, donde g_1 es la métrica asociada al plano de parámetros (x_1, x_2) , que *parametriza* el espacio base $\mathbb{M}^2(\kappa)$, y g_2 es la métrica euclídea sobre la recta asociada al parámetro x_3 , que *parametriza* la fibra.

1.6.3. Grupos de isometrías de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

En esta sección comentaremos algunos aspectos sobre los grupos de isometría de los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. El estudio de estos grupos nos permitirá adquirir cierto conocimiento sobre la estructura de estos espacios y observar similitudes y diferencias entre ellos. Para ello, nos apoyaremos en el modelo general presentado en la sección anterior.

Bajo este modelo, las fibras vienen dadas por las rectas $\{x_1 \equiv a, x_2 \equiv b\}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Las traslaciones a lo largo de las fibras $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, x_3 + c)$, con $c \in \mathbb{R}$, son siempre isometrías. De esta forma, el vector unitario e_3 define un **campo de Killing**. Más aún: las *rotaciones* respecto a

⁵Si extraemos una fibra a una esfera de Berger, obtenemos un espacio homeomorfo a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.

las fibras también son isometrías. Como ejemplo, las rotaciones respecto a la fibra $\{x_1 \equiv 0, x_2 \equiv 0\}$ vienen dadas por

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (\cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2, \sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2, x_3), \quad \text{con } \theta \in \mathbb{R}.$$

Para un análisis más detallado de los grupos de isometrías de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, debemos considerar diferentes posibilidades:

1. Cuando $\kappa = \tau = 0$, estamos en el caso de \mathbb{R}^3 , cuyo grupo de isometrías es de dimensión 6: tenemos traslaciones y rotaciones respecto a todos los ejes. Asimismo, podemos realizar reflexiones, que dividen el grupo en dos componentes conexas: existen tanto isometrías que *mantienen* la orientación del espacio como isometrías que la *invierten*.
2. Si $\kappa \neq 0, \tau = 0$, estamos ante un espacio producto $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$. Podemos considerar las siguientes isometrías:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow (-x_1, x_2, x_3) \\ (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow (x_1, x_2, -x_3) \end{aligned} \tag{1.30}$$

La primera aplicación es una reflexión respecto al plano $\{x_1 \equiv 0\}$. Intuitivamente, esta isometría *invierte* la orientación de la base (asociada al plano (x_1, x_2)) pero mantiene invariante la orientación de la fibra, asociada al parámetro x_3 . Por el contrario, la segunda aplicación es una reflexión respecto al plano $\{x_3 \equiv 0\}$, que *invierte* la orientación de la fibra y no modifica la orientación de la base. En consecuencia, el grupo de isometrías de estos espacios posee cuatro componentes conexas, en función de si estas invierten (o no) la orientación de la fibra y/o la base.

3. En el caso $\tau \neq 0$ y $\kappa = 4\tau^2$, tenemos la 3-esfera de radio $\frac{1}{\kappa}$. El grupo de isometrías de esta esfera es el grupo ortogonal $O(4)$, de dimensión 6. Al igual que sucede con \mathbb{R}^3 , podemos realizar reflexiones, que dividen el grupo en dos componentes conexas.
4. Por último, si $\tau \neq 0$ y $\kappa \neq 4\tau^2$, las transformaciones (1.30) no son isometrías. Sí lo es, no

obstante, la aplicación

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (-x_1, x_2, -x_3),$$

que invierte tanto la orientación de la base como la de la fibra. En este caso, el grupo de isometrías contiene dos componentes conexas: las isometrías pueden mantener la orientación de la fibra y la base o bien invertir ambas orientaciones a la vez. En cualquier caso, las isometrías deben mantener la orientación global del espacio.

Capítulo 2

Teorema de Hopf clásico para superficies de CMC en \mathbb{R}^3

Nuestro objetivo en este capítulo es demostrar la versión clásica del teorema de Hopf, que caracteriza las esferas de \mathbb{R}^3 con curvatura media constante (CMC). A lo largo de esta memoria, llamaremos **esfera** a toda superficie compacta de género 0, y **esfera redonda** a cualquier subconjunto de \mathbb{R}^3 de la forma

$$\{(x, y, z) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2\}, \quad (2.1)$$

para todo $r > 0$ y $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Estos conjuntos definen de manera natural superficies inmersas en \mathbb{R}^3 con curvatura media constante¹ $H = \frac{1}{r} > 0$.

El motivo de la distinción entre esfera y esfera *redonda* se debe a que en capítulos posteriores trabajaremos en los espacios $\mathbb{M}^3(\kappa)$ y $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, donde la definición 2.1 carece a priori de sentido. Como veremos, en estos espacios las esferas redondas serán sustituidas por esferas totalmente umbílicas y esferas de curvatura media constante con ciertas propiedades de simetría, respectivamente.

Teorema 2.1. (Teorema de Hopf, [H47]) *Si (S, \mathbf{X}) es una esfera inmersa en \mathbb{R}^3 con curvatura media constante, entonces el conjunto $\mathbf{X}(S) \subset \mathbb{R}^3$ es una esfera redonda.*

El matemático alemán Heinz Hopf demostró mediante dos estrategias diferentes este teorema. En ambos casos, la clave consistió en estudiar los puntos umbílicos de la superficie, que pueden ser vistos como los ceros de una cierta aplicación ϕ que definiremos en (2.6). Una de las demostraciones irá encaminada a estudiar los campos de líneas de curvatura de S (ver definición 1.30), que podremos expresar en función de ϕ . En la segunda demostración, probaremos que ϕ induce una 2-forma

¹Recordamos que la curvatura media está definida salvo signo.

holomorfa Φ sobre S , la llamada **diferencial de Hopf**. En ambos casos, concluiremos que toda la superficie está formada por puntos umbílicos, obteniendo así que $\mathbf{X}(S)$ debe ser una esfera redonda.

2.1. Resultados previos

A lo largo de esta sección, probaremos algunos resultados comunes a ambas demostraciones del teorema de Hopf. Mediante el uso de parametrizaciones isotermas, podremos definir (en principio, localmente) una aplicación cuyos ceros coinciden con los puntos umbílicos de una superficie. El estudio de esta aplicación nos dará las claves necesarias para abordar el teorema.

Por comodidad, usaremos la identificación $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, de manera que en ocasiones consideraremos las parametrizaciones (U, φ) como aplicaciones complejas, identificando $\varphi(u, v) \equiv \varphi(w)$, con $w = u + iv$. Además, haremos uso de las derivadas respecto a los parámetros complejos w, \bar{w} , definidas en (1.21).

Proposición 2.2. *Sea (S, \mathbf{X}) una superficie inmersa en un espacio M y (U, φ) , $\varphi = \varphi(u, v)$ una parametrización isoterma. Denotemos por E, F, G y e, f, g los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de S , respectivamente. En estas condiciones, las curvaturas extrínseca K_e y media H vienen dadas por*

$$K_e = \frac{eg - f^2}{E^2}, \quad H = \frac{e + g}{2E}. \quad (2.2)$$

Por otra parte, la ecuación de líneas de curvatura se reduce a

$$-fdu^2 + (e - g)dudv + fdv^2 = 0. \quad (2.3)$$

Además, en el caso particular en el que el espacio ambiente es \mathbb{R}^3 , se verifican las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{(e - g)_u}{2} + f_v &= EH_u, \\ \frac{(e - g)_v}{2} - f_u &= -EH_v. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Demostración. Las expresiones para K_e , H y las líneas de curvatura son consecuencia inmediata de (1.7) y (1.8) teniendo en cuenta que las parametrizaciones isotermas verifican $E = G$ y $F = 0$.

Las ecuaciones (2.4) pueden demostrarse a partir de las **ecuaciones de Codazzi**. Comentaremos brevemente cómo deducirlas en el caso de \mathbb{R}^3 . Sea $\mathbf{x} := \varphi \circ \mathbf{X}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, y denotemos por $N(u, v)$ el vector normal a la superficie dado por la ecuación (1.9). Para todo $(u, v) \in U$, podemos expresar las derivadas segundas de \mathbf{x} en función de la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$, siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + eN, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + fN, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + gN, \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde llamamos a los coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$, **símbolos de Christoffel**. En el caso particular de una parametrización isoterma, los símbolos de Christoffel adquieren una expresión sencilla:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u}{2E}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v}{2E}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{-E_u}{2E}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-E_v}{2E}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{E_u}{2E}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{E_v}{2E}. \end{aligned}$$

A partir de (2.5) podemos calcular las derivadas terceras de \mathbf{x} . Las ecuaciones de Codazzi pueden obtenerse calculando las derivadas mixtas y tomando parte normal, es decir, $\langle \mathbf{x}_{uuv}, N \rangle = \langle \mathbf{x}_{uvu}, N \rangle$, $\langle \mathbf{x}_{vvv}, N \rangle = \langle \mathbf{x}_{vvu}, N \rangle$, de donde obtenemos

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= e \frac{E_v}{2E} + g \frac{E_v}{2E} = E_v H, \\ f_v - g_u &= -e \frac{E_u}{2E} - g \frac{E_u}{2E} = -E_u H. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $EH = \frac{e+g}{2}$, podemos sustituir $E_v H = -EH_v + \frac{(e+g)_v}{2}$, $E_u H = -EH_u + \frac{(e+g)_u}{2}$ en las expresiones anteriores, de donde se deduce (2.4). \square

Proposición 2.3. *Dada una parametrización local isoterma (U, φ) , $\varphi = \varphi(u, v)$, de una superficie*

en \mathbb{R}^3 , definimos la función compleja $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\phi := \frac{e-g}{2} - if, \quad (2.6)$$

donde $e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ son los coeficientes de la segunda forma fundamental. Si denotamos por k_1, k_2 las curvaturas principales de la superficie, entonces

$$\frac{|\phi|^2}{E^2} = H^2 - K_e = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4}. \quad (2.7)$$

En particular, los ceros de ϕ se corresponden con los puntos umbílicos de la superficie. La ecuación de líneas de curvatura viene dada por

$$\text{Im}(\phi dw^2) = 0. \quad (2.8)$$

Por último, las ecuaciones de Codazzi se reducen a

$$\phi_{\bar{w}} = EH_w. \quad (2.9)$$

Demostración. Para comprobar (2.7), basta tener en cuenta que $(k_1 - k_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 - 4k_1k_2 = 4(H^2 - K)$ y usar las expresiones de K_e, H en parametrizaciones isotermas (2.2),

$$4(H^2 - K_e) = \frac{(e+g)^2}{E^2} - 4\frac{eg-f^2}{E^2} = \frac{(e-g)^2 + 4f^2}{E^2} = 4\frac{|\phi|^2}{E^2}.$$

Respecto a la ecuación (2.8), tenemos que

$$\text{Im}(\phi dw^2) = \text{Im}\left(\left(\frac{e-g}{2} - if\right)(du^2 - dv^2 + 2idudv)\right) = -fdu^2 + (e-g)dudv + fdv^2.$$

Por último, para demostrar la expresión de Codazzi, usaremos (2.4),

$$\phi_{\bar{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{(e-g)_u}{2} + f_v\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{(e-g)_v}{2} - f_u\right) = \frac{1}{2}(EH_u - iEH_v) = EH_w,$$

quedando probada la identidad. \square

Corolario 2.4. *Una superficie (S, \mathbf{X}) de \mathbb{R}^3 es de curvatura media constante si y solo si para toda parametrización isoterma (U, φ) la aplicación ϕ definida en (2.6) es holomorfa.*

Demostración. Supongamos que la superficie es de curvatura media constante, y sea (U, φ) una parametrización isoterma cualquiera. Debido a que $H_w = \frac{1}{2}(H_u - iH_v) \equiv 0$, entonces $\phi_{\bar{w}} \equiv 0$, con lo cual ϕ es holomorfa.

Recíprocamente, tomemos un punto $p \in S$ cualquiera, y sea $\alpha = H(p)$. Por ser la curvatura media una función continua, el conjunto $H^{-1}(\alpha) \subset S$ debe ser un conjunto cerrado (no vacío). Veamos que además $H^{-1}(\alpha)$ es abierto. Para ello, probemos que todo $q \in H^{-1}(\alpha)$ es un punto interior. Consideremos una parametrización isoterma (U, φ) definida en un entorno de q . Como suponemos que la función ϕ asociada a esta parametrización es holomorfa, entonces $\phi_{\bar{w}} \equiv 0$, con lo cual $0 \equiv H_w = \frac{1}{2}(H_u - iH_v)$. Esto implica que las derivadas parciales H_u, H_v son constantemente nulas en U , de donde deducimos que $H = \alpha$ en el abierto $\varphi(U) \subset S$. En consecuencia, $\varphi(U) \subset H^{-1}(\alpha)$, con lo cual q es un punto interior. Por ser $H^{-1}(\alpha)$ abierto y cerrado y S una superficie conexa, deducimos que $H^{-1}(\alpha) = S$, con lo cual la superficie posee curvatura media constante α . \square

Por último, enunciaremos un lema que caracteriza las superficies **totalmente umbílicas** de \mathbb{R}^3 , es decir, aquellas superficies cuyos puntos son todos umbílicos. La demostración de este resultado puede verse en [dC76].

Lema 2.5. *Sea (S, \mathbf{X}) una superficie de \mathbb{R}^3 totalmente umbílica. Entonces el conjunto $\mathbf{X}(S)$ es o bien un trozo de esfera redonda o bien un trozo de plano. En particular, si S es una superficie compacta, entonces $\mathbf{X}(S)$ es una esfera redonda.*

2.2. Primera demostración: campos de líneas de curvatura

En esta primera demostración, estudiaremos los campos de líneas de curvatura de la esfera S , que fueron definidos en 1.30. Recordamos que, en general, los campos de líneas de curvatura

de una superficie están definidos salvo en el conjunto de sus puntos umbílicos. En este sentido, demostraremos que las superficies de CMC en \mathbb{R}^3 son o bien totalmente umbílicas o bien sus puntos umbílicos son aislados y el índice de los campos de líneas de curvatura en estos puntos es negativo, donde recordamos que el índice fue definido en 1.16.

Proposición 2.6. *Sea (S, \mathbf{X}) una superficie de \mathbb{R}^3 de curvatura media constante y denotemos por $U \subset S$ al conjunto de puntos umbílicos de la superficie. Entonces o bien $U = S$ o bien U es un conjunto de puntos aislados y el índice de los campos de líneas de curvatura es negativo en todo $p \in U$.*

Demostración. Para demostrar este resultado, probaremos primero que los puntos umbílicos de la superficie deben ser o bien aislados o bien puntos interiores de U .

Si U es un conjunto vacío, no hay nada que probar. En caso contrario, sea $p \in U$ un punto umbílico, y tomemos una parametrización isoterma (V, φ) de un entorno de p de manera que $\varphi(0) = p$. Por el corolario 2.4, sabemos que $\phi(w)$ es una función holomorfa que se anula en $w = 0$. Esto nos da dos posibilidades:

1. $\phi \equiv 0$, con lo cual existe un entorno de p formado por puntos umbílicos. Por tanto, p es punto interior de U .
2. ϕ tiene un cero aislado en $w = 0$, con lo cual p es un punto umbílico aislado.

Si todos los puntos de U son aislados, entonces estamos en las condiciones de la proposición. Supongamos, en caso contrario, que existe un punto interior de U , y probemos que $U = S$. Para ello, demostraremos que el conjunto abierto no vacío $\text{Int}(U)$ es además cerrado. Veamos que los puntos de acumulación de $\text{Int}(U)$ pertenecen a dicho conjunto. Sea q un punto de acumulación. Debido a que U es cerrado (pues se corresponde con el conjunto de ceros de la función continua $K - H^2$), deducimos que $q \in U$. Por ser punto de acumulación, q no puede ser un punto aislado de U , así que necesariamente $q \in \text{Int}(U)$. De esta manera, $\text{Int}(U)$ es abierto y cerrado, y como $\text{Int}(U) \neq \emptyset$, entonces $U = S$.

Una vez visto cómo puede ser el conjunto $U \subseteq S$, estudiemos el índice de los campos de líneas de

curvatura en los puntos umbílicos aislados. Sea $p \in U$ aislado, y consideremos una parametrización isoterma (V, φ) tal que $\varphi(0) = p$.

Como p es un punto umbílico aislado, entonces ϕ tiene un cero aislado en $w = 0$. Tomando un desarrollo en serie, tenemos que $\phi(w) = cw^n + o(w^n)$, donde $c \neq 0$, $n \geq 1$ y $o(w^n)$ denota a los términos de orden superior. Para calcular el índice en p , debemos estudiar la ecuación (2.8) en un entorno de $w = 0$. Tomando un entorno suficientemente pequeño de este punto, podremos despreciar el término $o(w^n)$: en efecto, el índice de los campos de líneas de curvatura en p coincide con el índice de los campos dados por

$$\operatorname{Im}(cw^n dw^2) = 0. \quad (2.10)$$

Sea $c = |c|e^{i\alpha}$ y expresemos w en coordenadas polares como $w = \rho e^{i\theta}$. Podemos escribir $\operatorname{Im}(cw^n dw^2)$ como

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(cw^n dw^2) &= \operatorname{Im}\left(|c|\rho^n e^{i(\alpha+n\theta)}(du^2 - dv^2 + 2idudv)\right) \\ &= |c|\rho^n \left(2 \cos(\alpha + n\theta)dudv + \sin(\alpha + n\theta)(du^2 - dv^2)\right). \end{aligned}$$

Sea $\cos(\beta)\partial_u + \sin(\beta)\partial_v$ solución de la ecuación (2.10). Deducimos que β debe verificar

$$2 \cos(\alpha + n\theta) \sin(\beta) \cos(\beta) + \sin(\alpha + n\theta) (\cos^2(\beta) - \sin^2(\beta)) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\sin(n\theta + \alpha + 2\beta) = 0.$$

Tenemos dos posibles valores de β , $\beta_1 = -\frac{n\theta+\alpha}{2}$, $\beta_2 = -\frac{n\theta+\alpha+\pi}{2}$. De esta forma, en el punto $q = \varphi(\rho e^{i\theta})$, los campos asociados a (2.10) vienen dados por

$$L_1(q) := \operatorname{span}\left(\cos(\beta_1)\partial_u + \sin(\beta_1)\partial_v\right),$$

$$L_2(q) := \operatorname{span}\left(\cos(\beta_2)\partial_u + \sin(\beta_2)\partial_v\right).$$

Debido a que hemos estado trabajando con parametrizaciones isotermas, $\varphi(w)$ es una aplicación compleja. Sin embargo, para seguir los pasos de la definición de índice 1.16 resulta conveniente usar la identificación $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ y ver φ como una aplicación definida en un abierto de \mathbb{R}^2 , siendo $\varphi(u, v) = \varphi(u + iv)$. De esta manera, los campos L_1, L_2 inducen de manera natural un par de campos \tilde{L}_1, \tilde{L}_2 en \mathbb{R}^2 mediante la diferencial $d\varphi^{-1}$. Como $\rho e^{i\theta} \equiv (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$, entonces \tilde{L}_1, \tilde{L}_2 vienen dados por

$$\begin{aligned}\tilde{L}_1((\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))) &:= \text{span}((\cos(\beta_1), \sin(\beta_1))), \\ \tilde{L}_2((\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))) &:= \text{span}((\cos(\beta_2), \sin(\beta_2))).\end{aligned}$$

Estos campos son un caso particular del campo L estudiado en el ejemplo 1.17, tomando como α una función constante. Así, podemos concluir que el índice de los campos de líneas de curvatura en p es $-\frac{n}{2} < 0$. \square

Primera demostración del teorema de Hopf 2.1. Sea U el conjunto de puntos umbílicos de S , y consideremos sobre $S \setminus U$ los campos de líneas de curvatura. Por ser S una esfera, sabemos que estos campos deben poseer alguna singularidad (corolario 1.19), con lo cual $U \neq \emptyset$. Más aún, el conjunto U debe ser infinito: si fuese finito, sabemos por el teorema de Hopf-Poincaré (ver ecuación (1.2)) que el campo de líneas de curvatura tendría que tener índice positivo en algún punto umbílico, algo contradictorio con la proposición 2.6. Por la compacidad de S , U debe tener un punto de acumulación. Por definición, dicho punto no puede ser aislado, así que deducimos nuevamente por la proposición 2.6 que $U = S$. Como S es una superficie compacta y totalmente umbílica, entonces $\mathbf{X}(S)$ es una esfera redonda (lema 2.5). \square

2.3. Segunda demostración: diferencial de Hopf

A continuación, probaremos que la aplicación ϕ dada por (2.6) induce un objeto definido globalmente en todas las superficies orientables. Más específicamente, veremos que ϕ induce una 2-forma compleja, la llamada **diferencial de Hopf**, que tendrá la propiedad de ser holomorfa en las superficies de curvatura media constante. El teorema de Hopf será consecuencia inmediata de este

hecho.

Sea (S, \mathbf{X}) una superficie de \mathbb{R}^3 . Si suponemos que S es orientable, entonces podremos dotarla de una estructura conforme formada por parametrizaciones isotermas. Además, podremos fijar un vector normal unitario a la superficie $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ y definir globalmente la 2-forma $\tilde{\sigma}$ asociada a la segunda forma fundamental de S (ver observación 1.27).

Sea (U, φ) , $\varphi = \varphi(w)$, una parametrización isoterma de S , siendo $w = u + iv$. Es posible reformular la expresión de la segunda forma fundamental $\tilde{\sigma}$ (1.4) escribiendo las 1-formas du , dv en términos de dw , $d\bar{w}$ (ver (1.24)). De esta manera, se deduce que

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{4}(e - g - 2if)dw^2 + \frac{1}{2}(e + g)|dw|^2 + \frac{1}{4}(e - g + 2if)d\bar{w}^2,$$

o, equivalentemente,

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}\phi dw^2 + EH|dw|^2 + \frac{1}{2}\bar{\phi}d\bar{w}^2,$$

donde ϕ es la aplicación dada por (2.6) y H es la curvatura media de la superficie. Gracias a la observación 1.47 deducimos que $\Phi = \phi dw^2$ es una 2-forma compleja definida globalmente sobre la superficie.

Definición 2.7. Llamaremos a la 2-forma compleja Φ **diferencial de Hopf**. Como consecuencia del corolario 2.4, la diferencial de Hopf es holomorfa en toda superficie de curvatura media constante.

Segunda demostración del Teorema de Hopf 2.1. Consideremos la diferencial de Hopf Φ sobre S . Debido a que la superficie es de curvatura media constante, Φ es holomorfa. Gracias al teorema 1.52, podemos deducir que Φ debe ser la 2-forma nula. Esto implica que la superficie debe ser totalmente umbílica, pues para toda parametrización isoterma (U, φ) la aplicación ϕ definida en 2.6 debe ser constantemente 0. Como S es compacta y totalmente umbílica, entonces $\mathbf{X}(S)$ es una esfera redonda (lema 2.5). \square

Capítulo 3

Generalización para W -superficies especiales en \mathbb{R}^3

En 1954, los matemáticos Philip Hartman y Aurel Wintner publicaron una demostración que extendía el teorema clásico de Hopf a **W -superficies especiales** de \mathbb{R}^3 (ver sección 1.4). Hasta el momento, solo se había logrado esta generalización añadiendo hipótesis restrictivas: Hopf [H47] demostró el resultado bajo la condición de que en un entorno de los puntos umbílicos de S la superficie fuera analítica. Por otra parte, S. S. Chern concluyó el resultado bajo la hipótesis adicional de que la curvatura gaussiana de S fuera positiva, esto es, que S fuera un **ovaloide** (ver [dC76]).

En este capítulo, expondremos la demostración original propuesta por Hartman y Wintner [HW54] con algunas simplificaciones. Además, mostraremos una demostración alternativa basada en algunas herramientas del análisis complejo, propuesta por S. S. Chern [C55-2].

Debido a que trabajaremos con W -superficies especiales, no podremos asegurar que la diferencial de Hopf sea holomorfa (esto solo ocurre en el caso particular de superficies de CMC), con lo cual no podremos aplicar la estrategia seguida en la segunda demostración del teorema clásico de Hopf (sección 2.3). No obstante, podremos realizar un estudio analítico de los campos de líneas de curvatura que nos permitirá seguir un esquema similar al de la primera demostración (sección 2.2)

Teorema 3.1. (Teorema de Hopf para W -superficies especiales en \mathbb{R}^3 , [HW54]) Sea (S, \mathbf{X}) una W -superficie especial de \mathbb{R}^3 . Si S es una esfera, entonces el conjunto $\mathbf{X}(S) \subset \mathbb{R}^3$ es una esfera redonda.

Recordamos que por *esfera* entendemos una superficie compacta de género 0, y por *esfera redonda* un conjunto de la forma (2.1).

3.1. Primera demostración del teorema 3.1

El objetivo principal de esta sección consiste en demostrar que las W-superficies especiales son o bien totalmente umbílicas o bien sus puntos umbílicos son aislados y el índice de los campos de líneas de curvatura es negativo en dichos puntos, de forma similar a como hicimos en la primera demostración del teorema clásico de Hopf (ver proposición 2.6). Una vez demostrado este resultado, el teorema 3.1 se deduce de forma inmediata.

Necesitaremos hacer uso de un teorema de tipo analítico sobre soluciones de ecuaciones en derivadas parciales elípticas. En este sentido, recordamos que las W-superficies especiales son localmente *soluciones* de una EDP absolutamente elíptica, de acuerdo con lo visto en la proposición 1.40. Introducimos la siguiente notación:

Notación 3.2. Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y)$, $g(x, y)$ dos funciones continuas definidas en un abierto U tal que $(0, 0) \in U$. Dado $\rho > 0$, definimos la función continua

$$h(\rho) = \max_{x^2+y^2=\rho^2} |f(x, y) - g(x, y)|.$$

En estas condiciones, la notación $f(x, y) = g(x, y) + o(\rho^n)$, $n \in \mathbb{N}$, significa que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{h(\rho)}{\rho^n} = 0.$$

Teorema 3.3. ([HW53]) Sean $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ dos funciones de clase C^3 definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ que satisfacen la EDP absolutamente elíptica

$$f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) = 0,$$

donde f es una función de clase C^2 . Sea $u(x, y) := z_2(x, y) - z_1(x, y)$. Supongamos que $(0, 0) \in U$ y $u(0, 0) = u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$ pero la función $u(x, y)$ no es constantemente 0. Entonces existen un natural $n \geq 0$ y unas constantes $a, a' > 0$ y $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ tales que, si expresamos (x, y) en

coordenadas polares como $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$, se tiene

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y) &= a' \rho^{n+1} \cos(n\theta - \alpha') + o(\rho^{n+1}), \\
 u_y(x, y) &= -a' \rho^{n+1} \sin(n\theta - \alpha') + o(\rho^{n+1}), \\
 u_{xx}(x, y) &= a \rho^n \cos(n\theta - \alpha) + o(\rho^n), \\
 u_{xy}(x, y) &= -a \rho^n \sin(n\theta - \alpha) + o(\rho^n), \\
 u_{yy}(x, y) &= -a \rho^n \cos(n\theta - \alpha) + o(\rho^n).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Observación 3.4. La demostración del resultado anterior hace uso del hecho general de que, dadas dos soluciones $z_1, z_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de una EDP absolutamente elíptica, la diferencia $u := z_1 - z_2$ satisface a su vez una EDP absolutamente elíptica, **lineal** y **homogénea**, esto es, u satisface una ecuación del tipo

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0,$$

donde $a, b, c, d, e, f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y a, b, c son funciones de clase C^1 tales que, para todo $(x, y) \in U$,

$$4a(x, y)c(x, y) - b^2(x, y) > 0.$$

Estamos en condiciones de probar el teorema principal de esta sección, que supone una generalización de la proposición 2.6 para el caso de W-superficies especiales. Una vez demostrado este resultado, la demostración del teorema de Hopf 3.1 es inmediata: basta seguir paso por paso la primera demostración del teorema clásico de Hopf substituyendo la proposición 2.6 por el siguiente teorema:

Teorema 3.5. ([HW54]) *Sea (S, \mathbf{X}) una W-superficie especial inmersa en \mathbb{R}^3 y sea $U \subset S$ el conjunto de puntos umbílicos. Entonces o bien $U = S$ o bien U es un conjunto de puntos aislados y el índice de los campos de líneas de curvatura es negativo en todo $p \in U$.*

Demostración. Probaremos primero que los puntos de U son o bien interiores o bien aislados. Siguiendo el mismo argumento expuesto en la proposición 2.6, se deduce que o bien todos los

puntos de U son aislados o bien $U = S$. Después, calcularemos el índice de los campos de líneas de curvatura en los puntos umbílicos aislados.

Si U es el conjunto vacío, no hay nada que probar. En caso contrario, sea $p \in U$. Sea (U, φ) una parametrización en un entorno de p tal que la composición $\mathbf{x} = \mathbf{X} \circ \varphi$ pueda escribirse como el grafo de una función diferenciable, esto es, $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, donde $z(0, 0) = z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0$ y $\mathbf{x}(0, 0) = \mathbf{X}(p)$. Por la proposición 1.40, sabemos que, al menos en un entorno del $(0, 0)$, z satisface una EDP absolutamente elíptica de la forma (1.16).

Estudiaremos dos casos por separado, en función de si la curvatura extrínseca K_e en el punto umbílico p es nula o positiva¹.

Caso 1: Curvatura extrínseca $K_e(0, 0)$ nula.

Como el punto p es umbílico, entonces la curvatura media H verifica $H^2(0, 0) = K_e(0, 0) = 0$. S es una W-superficie, de manera que hay una función F tal que $F(K_e(x, y), H(x, y)) = 0$. En particular, $F(0, 0) = F(K_e(0, 0), H(0, 0)) = 0$. Esto quiere decir que el plano dado por la parametrización $\mathbf{y}(x, y) = (x, y, 0)$ también es una W-superficie especial para la misma función F . En consecuencia, la función z_P dada por $z_P(x, y) := 0$ es solución de la misma EDP absolutamente elíptica que $z(x, y)$. Si $z \equiv z_P$, entonces la proposición es cierta trivialmente: la superficie S sería un trozo de plano en un entorno del punto p y por tanto dicho punto sería umbílico interior. Supongamos entonces que $z \neq z_P$. Podemos hacer uso del teorema 3.3 y deducir que las derivadas de la diferencia $u := z - z_P \equiv z$ vienen dadas por (3.1) para algún $n \geq 0$. Más aún: n debe ser estrictamente positivo, pues $z_{xx}(0, 0) = z_{xy}(0, 0) = z_{yy}(0, 0) = 0$. Veámoslo: por un lado, sabemos que $K(0, 0) = H(0, 0) = 0$ y que $z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0$. Si sustituimos en la expresión de K_e y H dada por (1.19), (1.20), obtenemos

$$0 = z_{xx}(0, 0)z_{yy}(0, 0) - z_{xy}(0, 0)^2,$$

$$0 = z_{xx}(0, 0) + z_{yy}(0, 0),$$

de donde se deduce rápidamente que las tres derivadas parciales segundas de z deben ser nulas en

¹Recordamos que la curvatura extrínseca siempre es no negativa en los puntos umbílicos.

el origen. Notemos, no obstante, que

$$z_{xx}(x, y)z_{yy}(x, y) - z_{xy}^2(x, y) = -a^2\rho^{2n} + o(\rho^{2n}),$$

con lo cual existe un entorno punteado del $(0, 0)$ para el cual la expresión anterior es estrictamente negativa. De acuerdo con la fórmula de la curvatura extrínseca (1.19), concluimos que $K_e(x, y) < 0$ en dicho entorno. Como los puntos umbílicos tienen siempre curvatura extrínseca no negativa, entonces el punto umbílico p debe ser aislado. Estudiemos el índice de los campos de líneas de curvatura en p . La ecuación (1.8) puede expresarse en función de z y sus derivadas parciales como

$$(z_{xy}(1 + z_x^2) - z_{xx}z_xz_y)du^2 + (z_{yy}(1 + z_x^2) - z_{xx}(1 + z_y^2))dudv + (z_{yy}z_xz_y - z_{xy}(1 + z_y^2))dv^2 = 0. \quad (3.2)$$

Las expresiones dadas por (3.1) implican que $z_x = o(\rho^n)$, $z_y = o(\rho^n)$. Así, la ecuación (3.2) se puede reescribir como

$$(z_{xy} + o(\rho^n))du^2 + (z_{yy} - z_{xx} + o(\rho^n))dudv - (z_{xy} + o(\rho^n))dv^2 = 0. \quad (3.3)$$

Para simplificar la escritura, denotemos $o'(\rho^n) := o(\rho^n)du^2 + o(\rho^n)dudv + o(\rho^n)dv^2$. Si ahora sustituimos el valor de las derivadas segundas de z , obtenemos

$$-a\rho^n \sin(n\theta - \alpha)du^2 - 2a\rho^n \cos(n\theta - \alpha)dudv + a\rho^n \sin(n\theta - \alpha)dv^2 + o'(\rho^n) = 0.$$

Para calcular el índice en p , debemos estudiar la ecuación anterior en un entorno del $(0, 0)$. Si tomamos un entorno suficientemente pequeño, podremos despreciar el efecto del término $o'(\rho^n)$, pues el índice de los campos de líneas de curvatura en p coincidirá con el índice de los campos dados por

$$-a\rho^n \sin(n\theta - \alpha)du^2 - 2a\rho^n \cos(n\theta - \alpha)dudv + a\rho^n \sin(n\theta - \alpha)dv^2 = 0. \quad (3.4)$$

Estudiemos el índice de estos campos en p . Sea $\cos(\beta)\partial_u + \sin(\beta)\partial_v$ solución de la ecuación

anterior. Entonces,

$$-a\rho^n \sin(n\theta - \alpha) \cos(\beta)^2 - 2a\rho^n \cos(n\theta - \alpha) \cos(\beta) \sin(\beta) + a\rho^n \sin(n\theta - \alpha) \sin(\beta)^2 = 0. \quad (3.5)$$

Podemos simplificar la expresión anterior, llegando a

$$-a\rho^n \sin(n\theta - \alpha) \cos(2\beta) - a\rho^n \cos(n\theta - \alpha) \sin(2\beta) = 0,$$

y, finalmente,

$$-a\rho^n \sin(n\theta - \alpha + 2\beta) = 0. \quad (3.6)$$

Tenemos dos posibles valores de β , $\beta_1 = \frac{\alpha - n\theta}{2}$, $\beta_2 = \frac{\alpha - n\theta + \pi}{2}$. Así, en el punto $q = \varphi(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ los campos asociados a la ecuación (3.4) vienen dados por

$$L_1(q) := \text{span}(\cos(\beta_1)\partial_u + \sin(\beta_1)\partial_v),$$

$$L_2(q) := \text{span}(\cos(\beta_2)\partial_u + \sin(\beta_2)\partial_v).$$

Estos campos inducen en \mathbb{R}^2 un par de campos \tilde{L}_1, \tilde{L}_2 mediante la diferencial $d\varphi^{-1}$,

$$\tilde{L}_1((\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))) := \text{span}((\cos(\beta_1), \sin(\beta_1))),$$

$$\tilde{L}_2((\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))) := \text{span}((\cos(\beta_2), \sin(\beta_2))),$$

que son un caso particular del campo estudiado en el ejemplo 1.17, con α una función constante. De esta manera, el índice de los campos de líneas de curvatura en p es $-\frac{n}{2} < 0$.

Antes de pasar al caso $K_e(0, 0) > 0$, vamos a presentar una prueba alternativa para demostrar que el punto p es un punto umbílico aislado. Esta demostración podrá aplicarse al caso $K_e(0, 0) > 0$ y nos permitirá abordarlo simplificando la demostración original de Hartman y Wintner, que requería la introducción de resultados más avanzados.

Nos basamos en la siguiente observación: un punto es umbílico si y solo si la ecuación de líneas de curvatura (3.3) es trivial, es decir, todo vector $t = a\partial_u + b\partial_v$, con $a, b \in \mathbb{R}$, es solución de la

ecuación. Para probar que p es un punto umbílico aislado, demostraremos que la ecuación (3.3) no es trivial en un entorno punteado del $(0, 0)$.

Podemos escribir (3.3) en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = 0, \quad (3.7)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} z_{xy} + o(\rho^n) & c \\ c & -z_{xy} + o(\rho^n) \end{pmatrix}, \quad \text{siendo } c = \frac{z_{yy} - z_{xx}}{2} + o(\rho^n).$$

Debido a que $z_{xx} = -z_{yy} + o(\rho^n)$, podemos expresar c como $c = z_{yy} + o(\rho^n)$.

Por definición, la matriz $A = (a_{ij})$ es simétrica. Si la ecuación (3.7) se verificase para todo vector, entonces A sería nula: tomando $t = \partial_u$, se deduce $0 = a_{11}$. Tomando $t = \partial_v$, concluimos $0 = a_{22}$. Por último, tomando $t = \partial_u + \partial_v$, llegamos a $0 = a_{11} + a_{22} + 2a_{12} = 2a_{12} = 2c$. En particular, el determinante de A sería nulo. No obstante,

$$\det(A) = -z_{xy}^2 - z_{yy}^2 + o(\rho^{2n}) = -a^2 \rho^{2n} + o(\rho^{2n}).$$

De esta manera, existe un entorno punteado del $(0, 0)$ para el cual la ecuación (3.7) es no trivial, de donde deducimos que p debe ser un punto umbílico aislado.

Caso 2: Curvatura extrínseca $K_e(0, 0)$ positiva.

La estrategia a seguir es similar al caso anterior, aunque deberemos realizar algunos cálculos adicionales. Escogemos un vector unitario normal $N(x, y)$ a S de manera que $H(0, 0) \geq 0$, y fijamos un sistema de referencia tal que $N(0, 0) = (0, 0, 1)$. Como el punto p es umbílico, entonces $H(0, 0) = \sqrt{K(0, 0)} > 0$. Sea $r = \frac{1}{H(0, 0)} > 0$. Como S es una W-superficie, existe una función F tal que $F(K(x, y), H(x, y)) = 0$. En particular, $F(\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r}) = F(K(0, 0), H(0, 0)) = 0$. Esto significa que las esferas de radio r también son W-superficies asociadas a la función F . Tomemos entonces una esfera $\mathbb{S}^2(r)$ de radio r tangente a S en $\mathbf{x}(0, 0)$. Parametrizamos localmente la esfera como el grafo de una función diferenciable, esto es, $\mathbf{y}(x, y) = (x, y, s(x, y))$, donde $\mathbf{y}(0, 0) = \mathbf{x}(0, 0)$. La función

$s(x, y)$ es analítica, pues viene dada por

$$s(x, y) = r - \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.$$

Además, las derivadas parciales de s verifican

$$\begin{aligned} |s_x(x, y)| &= \left| \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \right| \leq \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, \\ |s_y(x, y)| &= \left| \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \right| \leq \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Si $z \equiv s$, entonces la proposición es cierta: S sería un trozo de esfera en un entorno del punto p y por tanto dicho punto sería umbílico interior. Supongamos entonces que $z \neq s$. Podemos aplicar el teorema 3.3 y deducir que $u := z - s$ satisface las ecuaciones (3.1) para algún $n \geq 0$. Probemos que, de hecho, $n \geq 1$. Para ello, demostraremos que las derivadas segundas de z y s coinciden en el punto $(0, 0)$. Si tenemos en cuenta que $z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0$, entonces las curvaturas extrínseca y media en $(0, 0)$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} &= K_e(0, 0) = z_{xx}(0, 0)z_{yy}(0, 0) - z_{xy}^2(0, 0), \\ \frac{1}{r} &= H(0, 0) = \frac{z_{xx}(0, 0) + z_{yy}(0, 0)}{2}. \end{aligned}$$

Debido a que $H^2(0, 0) = K_e(0, 0)$,

$$4z_{xx}(0, 0)z_{yy}(0, 0) - 4z_{xy}^2(0, 0) = z_{xx}^2(0, 0) + z_{yy}^2(0, 0) + 2z_{xx}(0, 0)z_{yy}(0, 0),$$

es decir,

$$-4z_{xy}^2(0, 0) = z_{xx}^2(0, 0) + z_{yy}^2(0, 0) - 2z_{xx}(0, 0)z_{yy}(0, 0) = (z_{xx}(0, 0) - z_{yy}(0, 0))^2.$$

La igualdad anterior implica que un número no positivo equivale a uno no negativo, así que ambos

deben ser 0. Por tanto, $z_{xy}(0,0) = 0$ y $z_{xx}(0,0) = z_{yy}(0,0)$. De la ecuación de $H(0,0)$ deducimos que de hecho $z_{xx}(0,0) = z_{yy}(0,0) = \frac{1}{r}$.

Por otra parte, es inmediato comprobar a partir de la expresión de $s(x,y)$ que las derivadas segundas de s coinciden con las de z en el punto $(0,0)$. Así, las derivadas segundas de $u = z - s$ en dicho punto deben ser nulas, de donde se deduce que las ecuaciones (3.1) se dan para algún $n \geq 1$.

Vamos a estudiar el campo de líneas de curvatura de la superficie S . Al igual que en el caso anterior, partimos de la ecuación (3.2). De la definición de u se sigue que $z = s + u$. A partir de (3.1) y (3.8), es sencillo deducir que $u_x = o(\rho^n)$, $u_y = o(\rho^n)$ y además los productos $u_{ij}s_k s_l$, con $i, j, k, l = x, y$, verifican $u_{ij}s_k s_l = o(\rho^n)$. De esta manera,

$$\begin{aligned} z_{xy}(1 + z_x^2) - z_{xx}z_x z_y &= (s_{xy} + u_{xy})(1 + s_x^2 + o(\rho^n)) - (s_{xx} + u_{xx})(s_x + o(\rho^n))(s_y + o(\rho^n)) \\ &= s_{xy}(1 + s_x^2) - s_{xx}s_x s_y + u_{xy} + o(\rho^n), \\ z_{yy}(1 + z_x^2) - z_{xx}(1 + z_y^2) &= (s_{yy} + u_{yy})(1 + s_x^2 + o(\rho^n)) - (s_{xx} + u_{xx})(1 + s_y^2 + o(\rho^n)) \\ &= s_{yy}(1 + s_x^2) - s_{xx}(1 + s_y^2) + u_{yy} - u_{xx} + o(\rho^n), \\ z_{yy}z_x z_y - z_{xy}(1 + z_y^2) &= (s_{yy} + u_{yy})(s_x + o(\rho^n))(s_y + o(\rho^n)) - (s_{xy} + u_{xy})(1 + s_y^2 + o(\rho^n)) \\ &= s_{yy}s_x s_y - s_{xy}(1 + s_y^2) - u_{xy} + o(\rho^n). \end{aligned}$$

Teniendo esto en cuenta, la ecuación de líneas de curvatura resulta ser en este caso

$$\begin{aligned} &(s_{xy}(1 + s_x^2) - s_{xx}s_x s_y)du^2 + (s_{yy}(1 + s_x^2) - s_{xx}(1 + s_y^2))dudv + (s_{yy}s_x s_y - s_{xy}(1 + s_y^2))dv^2 \\ &+ (u_{xy} + o(\rho^n))du^2 + (u_{yy} - u_{xx} + o(\rho^n))dudv - (u_{xy} + o(\rho^n))dv^2 = 0. \end{aligned}$$

La primera línea de la expresión anterior es exactamente 0: en efecto, esa es la ecuación de líneas de curvatura para la esfera $\mathbb{S}^2(r)$, y todos los puntos de la esfera son umbílicos. Respecto a la segunda línea, obtenemos a una expresión análoga a (3.3), estudiada en el caso anterior. De esta ecuación se puede deducir primeramente que el punto umbílico p es aislado, pues existe un entorno punteado

del $(0,0)$ para el cual la matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} u_{xy} + o(\rho^n) & c \\ c & u_{xy} + o(\rho^n) \end{pmatrix}, \quad \text{con } c = u_{yy} + o(\rho^n)$$

tiene determinante no nulo.

Finalmente, podemos repetir los cálculos realizados en el caso anterior y llegar nuevamente a la expresión (3.6), que permite concluir que el índice es $-\frac{n}{2} < 0$. \square

Observación 3.6. La definición de W-superficie dada en 1.32 exige que se verifique la condición de elipticidad (1.13) en todo punto de la superficie. No obstante, es interesante remarcar que la demostración del resultado anterior tan solo hace uso de la condición de elipticidad en un entorno de los puntos umbílicos. De esta manera, la proposición sigue siendo cierto para todas aquellas superficies cuyas curvaturas principales satisfagan una relación del tipo $W(k_1, k_2) = 0$ y tales que $W_x(t, t)W_y(t, t) > 0$ para todo $(t, t) \in W^{-1}(0)$.

3.2. Segunda demostración del teorema 3.1

En esta sección estudiaremos una demostración alternativa del teorema 3.5, de donde podemos deducir nuevamente el teorema de Hopf para W-superficies especiales inmersas en \mathbb{R}^3 . Esta demostración fue propuesta por S. S. Chern [C55-2]. Necesitaremos el siguiente resultado auxiliar:

Lema 3.7. ([J91]) *Sea $f : B(0, r) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(w)$ una aplicación de clase C^1 . Supongamos que existe una constante $M > 0$ tal que*

$$|f_{\bar{w}}(w)| \leq M|f(w)| \quad \text{para todo } w \in B(0, r).$$

Entonces existen dos funciones $s, h : B(0, r) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$f(w) = e^{s(w)}h(w),$$

donde $s(w)$ es continua y verifica $|s(w)| \leq 4Mr$ para todo $w \in B(0, r)$ y $h(w)$ es una función holomorfa.

Demostración alternativa del teorema 3.5. Al igual que en la demostración anterior, probaremos que todo punto umbílico es o bien aislado o bien pertenece al interior de U . De aquí se puede deducir que o bien U es un conjunto de puntos aislados o bien $U = S$.

Si $U = \emptyset$, no hay nada que probar. Sea entonces $p \in U$. Tomamos una parametrización isoterma (V, φ) , $\varphi = \varphi(w)$ definida en un entorno del punto p de manera que $p = \varphi(0)$. Denotemos por K_e , H las curvaturas extrínseca y media de la superficie. Como S es una W-superficie, la proposición 1.36 afirma que las funciones $\mu := H^2 - K_e$ y H verifican una relación del tipo $G(\mu, H) = 0$ así como la condición (1.15). En virtud del teorema de la función implícita, esta condición implica que existe una función diferenciable f tal que $H(w) = f(\mu(w))$.

Consideremos la función $\phi(w)$ definida en (2.6). Recordamos que los ceros de ϕ se corresponden con los puntos umbílicos de S , con lo cual $\phi(0) = 0$. De acuerdo con la ecuación (2.7), tenemos que $\mu = H^2 - K_e = \frac{|\phi|^2}{E^2}$. A partir de (2.9), podemos deducir

$$\begin{aligned} |\phi_{\bar{w}}| &= |EH_w| \\ &= \left| E \frac{\partial f(\mu)}{\partial w} \right| \\ &= |Ef'(\mu)\mu_w| \\ &= |Ef'(\mu)| \left| \frac{\phi_{\bar{w}}}{E^2} + \frac{\phi_w \bar{\phi}}{E^2} - 2E_w \frac{\phi \bar{\phi}}{E^3} \right| \\ &\leq |Ef'(\mu)| \left(\left| \frac{\bar{\phi}_w}{E^2} \right| + \left| \frac{\phi_w}{E^2} \right| + \left| 2E_w \frac{\phi}{E^3} \right| \right) |\phi|. \end{aligned}$$

Sea $r > 0$ tal que la bola cerrada $C := \bar{B}(0, r)$ esté contenida en V . Por ser C compacto, la función continua

$$|Ef'(\mu)| \left(\left| \frac{\bar{\phi}_w}{E^2} \right| + \left| \frac{\phi_w}{E^2} \right| + \left| 2E_w \frac{\phi}{E^3} \right| \right)$$

alcanzará un máximo en C , que denotaremos por M . De esta manera, en la bola abierta $B(0, r)$ tenemos que $|\phi_{\bar{w}}| \leq M|\phi|$. Podemos aplicar el lema 3.7 para deducir que existen una función continua y acotada $s(w)$ y una función holomorfa $h(w)$ tales que $\phi(w) = e^{s(w)}h(w)$. Notemos que $e^{s(w)} \neq 0$ para todo $w \in B(0, r)$, lo cual quiere decir que $\phi(w) = 0$ si y solo si $h(w) = 0$. Como p es un punto umbílico, entonces $h(0) = \phi(0) = 0$. Tenemos dos opciones:

1. $h \equiv 0$ en $B(0, r)$, con lo cual $\phi \equiv 0$. En consecuencia, p es un punto interior de U .
2. $h(w)$ tiene un cero aislado en $w = 0$, y por tanto el punto umbílico p es aislado.

Pasemos entonces a estudiar el índice en los puntos umbílicos aislados. Debido a que $h \not\equiv 0$, existen un natural $n \geq 1$ y $c \neq 0$ tal que $\phi(w) = ce^{s(w)}w^n + o(w^n)$, donde $o(w^n)$ es el producto de $e^{s(w)}$ por los términos de orden superior de $h(w)$. Para calcular el índice en p , estudiaremos la ecuación (2.8) en un entorno de $w = 0$. Si tomamos un entorno suficientemente pequeño, podemos *despreciar* el término $o(w^n)$, pues el índice de los campos de líneas de curvatura en p coincidirá con el de los campos dados por

$$\operatorname{Im}(e^{s(w)}cw^n dw^2) = 0. \quad (3.9)$$

Podemos tratar esta ecuación de manera similar a como hicimos con (2.10) en la proposición 2.6. Denotemos $c = |c|e^{i\alpha_0}$. Podemos expresar el producto $e^{s(w)}c$ como $g(w)e^{i\alpha(w)}$, donde $g(w) = |c|e^{\operatorname{Re}(s(w))}$ es una función positiva y $\alpha(w) = \operatorname{Im}(s(w)) + \alpha_0$. Es posible demostrar que $\alpha(w)$ es una función diferenciable en un entorno punteado de $w = 0$ (lo probaremos posteriormente). Expresando w en coordenadas polares, $w = \rho e^{i\theta}$, podemos escribir $\operatorname{Im}(e^{s(w)}cw^n dw^2)$ como

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(e^{s(\rho e^{i\theta})}cw^n dw^2\right) &= \operatorname{Im}\left(g(\rho e^{i\theta})\rho^n e^{i(\alpha(\rho e^{i\theta})+n\theta)}(du^2 - dv^2 + 2idudv)\right) \\ &= g(\rho e^{i\theta})\rho^n \left(2 \cos(\alpha(\rho e^{i\theta}) + n\theta)dudv + \sin(\alpha(\rho e^{i\theta}) + n\theta)(du^2 - dv^2)\right). \end{aligned}$$

Esta expresión es exactamente la misma que obtuvimos en la proposición 2.6 con la única diferencia de que ahora α no es una constante, sino una función diferenciable. En el ejemplo 1.17 ya consideramos esta posibilidad, con lo cual podemos asegurar que el índice de los campos de líneas de curvatura en p es $-\frac{n}{2} < 0$.

Para concluir, demostremos que efectivamente $\alpha(w)$ es diferenciable en un entorno punteado de $w = 0$. Basta observar que, como $h(w)$ tiene un cero aislado en $w = 0$, entonces existe un entorno punteado W en el cual $h(w)$ no se anula. Por tanto, podemos expresar

$$e^{s(w)} = \frac{\phi(w)}{h(w)}.$$

Como ϕ y h son diferenciables, entonces también lo será $s(w)$, y por tanto $\text{Im}(s(w))$, de donde se sigue la diferenciable de $\alpha(w)$. □

Capítulo 4

Generalización para superficies de CMC en espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

En el capítulo 2 definimos sobre toda superficie inmersa y orientable una 2-forma compleja, la **diferencial de Hopf**, que resultaba ser holomorfa para las superficies de CMC en \mathbb{R}^3 . Este hecho era consecuencia directa de la ecuación de Codazzi (2.9), y fue clave para demostrar el teorema clásico de Hopf.

En realidad, la ecuación (2.9) no es exclusiva de \mathbb{R}^3 , sino que sigue siendo válida en todos los espacios de curvatura seccional constante $\mathbb{M}^3(\kappa)$. Como comentaremos al final del capítulo, esto permite generalizar de manera natural el teorema de Hopf para superficies de CMC en $\mathbb{M}^3(\kappa)$: tan solo necesitaríamos caracterizar las esferas totalmente umbílicas de estos espacios, en consonancia con lo estudiado en el lema 2.5 para el caso particular de \mathbb{R}^3 .

Una vez probado el teorema de Hopf en los espacios de curvatura seccional constante, resulta natural pasar a estudiar el problema en la familia $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ (ver sección 1.6). En este caso, encontramos una dificultad: la ecuación (2.9) deja de ser válida, y por tanto la diferencial de Hopf no tiene por qué ser holomorfa para superficies de CMC. No fue hasta el año 2004 cuando los matemáticos Uwe Abresch y Harold Rosenberg lograron definir sobre toda superficie de CMC inmersa en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ una 2-forma holomorfa, la **diferencial de Abresch-Rosenberg**.

El hecho de que la diferencial de Abresch-Rosenberg sea holomorfa en esferas de CMC no implica que estas sean totalmente umbílicas. Sin embargo, sí es posible demostrar que dichas esferas son invariantes ante rotaciones alrededor de una fibra de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Esto nos bastará, pues las esferas de CMC con esta propiedad son únicas (salvo isometría).

Definición 4.1. Diremos que una superficie (S, \mathbf{X}) inmersa en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ es **rotacional** si el conjunto $\mathbf{X}(S)$ es invariante ante rotaciones alrededor de una fibra de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.

Teorema 4.2. ([AEG08, FMP99, T10]) *Si $\kappa - 4\tau^2 > 0$, entonces para cada $H \in \mathbb{R}$ existe una esfera (S, \mathbf{X}) inmersa en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, rotacional y con curvatura media constante H . Además, el conjunto $\mathbf{X}(S)$ es único salvo isometría.*

Por otra parte, si $\kappa - 4\tau^2 \leq 0$, entonces para cada valor de H tal que $H^2 > -\frac{\kappa}{4}$ existe una esfera inmersa en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, rotacional y con curvatura media constante H , única salvo isometría. Si $H^2 < -\frac{\kappa}{4}$, entonces no existen esferas rotacionales de CMC.

Este resultado puede demostrarse de forma directa: el estudio de superficies rotacionales y de curvatura media constante se traduce al análisis de una cierta ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. En este sentido, las esferas rotacionales de CMC han sido calculadas explícitamente en todos los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ (ver [AEG08, FMP99, T10]). Cuando $\kappa = \tau = 0$ (el caso de \mathbb{R}^3), estas esferas se corresponden con las esferas redondas definidas en (2.1).

Podemos enunciar el teorema de Hopf para superficies de CMC en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$:

Teorema 4.3. (Teorema de Hopf para superficies de CMC en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ [AR04, AR05]) *Si (S, \mathbf{X}) es una esfera inmersa en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ con curvatura media constante, entonces es una esfera rotacional.*

Dicho de otra forma, el teorema de Hopf caracteriza las esferas rotacionales como las únicas esferas de curvatura media constante en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.

A continuación, presentaremos los aspectos principales de la demostración del teorema 4.3. Para ello, introduciremos las llamadas ecuaciones de compatibilidad en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, que nos permitirán estudiar las superficies inmersas en estos espacios, y posteriormente definiremos la diferencial de Abresch-Rosenberg. A partir de este objeto, podremos concluir en la sección 4.3 el teorema de Hopf. Finalmente, en la sección 4.4 estudiaremos cómo la segunda demostración del teorema clásico de Hopf (sección 2.3) puede extenderse a los espacios de curvatura seccional constante $\mathbb{M}^3(\kappa)$.

4.1. Ecuaciones de compatibilidad en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

En esta sección presentaremos una serie de ecuaciones que deben satisfacer todas las superficies inmersas en los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, y que nos serán de utilidad en la demostración del teorema

4.3. También veremos que estas ecuaciones definen condiciones *suficientes* para la existencia de superficies inmersas en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, en un sentido que detallaremos posteriormente (ver teorema 4.5).

Sea (S, \mathbf{X}) una superficie inmersa y orientable en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ sobre la que consideramos una estructura conforme \mathcal{A} formada por parametrizaciones isotermas. Si denotamos por \bar{g} a la métrica en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ y por \times el producto vectorial, es posible definir sobre toda la superficie un vector normal y unitario N tal que para cualquier parametrización isoterma $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $\varphi = \varphi(u, v)$ se cumpla que

$$N := \frac{\partial_u \times \partial_v}{E}, \quad (4.1)$$

siendo $E = \bar{g}(\partial_u, \partial_u)$ el coeficiente de la primera forma fundamental (recordamos que $F = 0$ y $E = G$ en parametrizaciones isotermas). Asimismo, definimos en U las siguientes aplicaciones:

$$\nu := \bar{g}(N, \xi), \quad p := \frac{\phi}{2}, \quad A := \bar{g}(\xi, \partial_w), \quad (4.2)$$

donde ϕ es la aplicación asociada a la diferencial de Hopf (ver 2.6), ξ es el campo unitario tangente a las fibras de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ (ver subsección 1.6.1), y los vectores $\partial_w, \partial_{\bar{w}}$ fueron definidos en 1.22.

Gracias a que el vector normal N está globalmente definido, la aplicación ν también lo estará, mientras que las aplicaciones p y A dependen explícitamente de la parametrización escogida. No obstante, estas aplicaciones inducen respectivamente una 2-forma y una 1-forma globalmente definidas (de hecho, la 2-forma dada por $2pdw^2 = \phi dw^2$ se corresponde con la diferencial de Hopf).

Definición 4.4. Llamaremos **datos fundamentales** de la inmersión (S, \mathbf{X}) a la tupla $(\Psi, \nu, H, \Phi, \Omega)$, donde H es la curvatura media de la superficie, Φ es la diferencial de Hopf y Ψ y Ω son las formas definidas a partir de $\Psi \equiv E|dw|^2$, $\Omega \equiv Adw$, para toda parametrización isoterma $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $\varphi = \varphi(w)$.

Para demostrar que las formas Ψ y Ω están bien definidas, podemos realizar un argumento análogo al que seguimos para construir la diferencial de Hopf mediante la segunda forma fundamental (ver sección 2.3 y observación 1.47): en efecto, Ψ se corresponde con la métrica g expresada

en parámetros isotermos:

$$g = E(du^2 + dv^2) = E|dw|^2,$$

y Ω puede definirse a partir del término en dw de la 1-forma h dada por $h(X) = \bar{g}(\xi, X)$ para todo campo $X \in \mathfrak{X}(S)$.

Presentamos el resultado principal de esta sección, las ecuaciones de compatibilidad en los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Estas ecuaciones fueron obtenidas originalmente por Benoît Daniel (ver [D07]), y definen una serie de condiciones necesarias y suficientes para que una superficie Riemanniana se encuentre inmersa en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Recordamos que, en \mathbb{R}^3 , son las ecuaciones de Gauss y Codazzi las que juegan el papel de ecuaciones de compatibilidad (ver [dC76]). Sin embargo, en el caso de superficies inmersas en una 3-variedad Riemanniana M cualquiera, estas ecuaciones son solo necesarias, es decir, toda superficie inmersa en M debe satisfacer las ecuaciones de Gauss y Codazzi (ver [dC92]).

Teorema 4.5. (Ecuaciones de compatibilidad de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ [D07, FM07]) *Dada una parametrización isoterma (U, φ) , $\varphi = \varphi(w)$ de una superficie (S, \mathbf{X}) inmersa en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, se verifican las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{cases} \text{(C.1)} & p\bar{w} & = & \frac{E}{2}(H_w + \nu A(\kappa - 4\tau^2)). \\ \text{(C.2)} & A\bar{w} & = & \frac{\nu E}{2}(H + i\tau). \\ \text{(C.3)} & \nu_w & = & -(H - i\tau)A - \frac{2p}{E}\bar{A}. \\ \text{(C.4)} & \frac{4|A|^2}{E} & = & 1 - \nu^2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Recíprocamente, sea (S, g) una superficie Riemanniana simplemente conexa sobre la que consideramos una estructura conforme A . Supongamos que en S se encuentran definidas unas funciones ν, H , una 1-forma Ω y un par de 2-formas Φ, Ψ tales que en toda parametrización $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ podemos expresar

$$\Phi \equiv 2pdw^2, \quad \Psi \equiv E|dw|^2, \quad \Omega \equiv Adw,$$

donde E es el coeficiente de la primera forma fundamental de la parametrización y A, p son funciones diferenciables cualesquiera. En estas condiciones, si se verifican las ecuaciones (4.3), entonces

existe una inmersión $\mathbf{X} : S \rightarrow \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ tal que la métrica g coincide con el pullback $\mathbf{X}^*\bar{g}$ (ver proposición 1.22) y la tupla $(\Psi, \nu, H, \Phi, \Omega)$ se corresponde con los datos fundamentales de la inmersión. Además, la aplicación \mathbf{X} es única salvo isometría: cualquier otra inmersión $\tilde{\mathbf{X}} : S \rightarrow \mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ debe verificar $\tilde{\mathbf{X}} = h \circ \mathbf{X}$, donde h es una isometría de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.

4.2. Diferencial de Abresch-Rosenberg

A partir de los objetos definidos en la sección anterior podemos construir la diferencial de Abresch-Rosenberg. Sea (S, \mathbf{X}) una superficie orientable inmersa en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ que dotamos de una estructura conforme \mathcal{A} formada por parametrizaciones isotermas. A partir de las parametrizaciones de \mathcal{A} , podemos definir globalmente sobre S un vector unitario N mediante (4.1). Dada $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $\varphi = \varphi(w)$, definimos la aplicación $Q : U \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$Q := 2(H + i\tau)p - (\kappa - 4\tau^2)A^2. \quad (4.4)$$

donde H es la curvatura media y p, A vienen dadas por (4.2).

Definición 4.6. Definimos la **diferencial de Abresch-Rosenberg** como la 2-forma compleja $\tilde{\Phi}$ que en cada parametrización isoterma (U, φ) , $\varphi = \varphi(w)$ puede escribirse como $\tilde{\Phi} \equiv Qdw^2$, donde Q viene dada por (4.4). Alternativamente, podemos definir $\tilde{\Phi}$ como

$$\tilde{\Phi} := (H + i\tau)\Phi - (\kappa - 4\tau^2)\Omega \odot \Omega,$$

donde Φ es la diferencial de Hopf y Ω viene dada por la definición 4.4.

Proposición 4.7. *La diferencial de Abresch-Rosenberg es holomorfa en superficies de curvatura media constante inmersas en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.*

Demostración. Para ver que la diferencial es holomorfa, basta comprobar que $Q_{\bar{w}} \equiv 0$. Este hecho es inmediato a partir de las ecuaciones de compatibilidad (4.3): en efecto, la derivada $Q_{\bar{w}}$ viene dada por

$$Q_{\bar{w}} = 2(H + i\tau)p_{\bar{w}} - 2(\kappa - 4\tau^2)AA_{\bar{w}},$$

pues $H_{\bar{w}} = 0$. Si sustituimos los valores de $p_{\bar{w}}$ y $A_{\bar{w}}$, se deduce que $Q_{\bar{w}} \equiv 0$. \square

4.3. Demostración del teorema 4.3

La demostración del teorema de Hopf para superficies de CMC en los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ motivó el estudio y desarrollo de nuevas herramientas en estos espacios, que eventualmente permitieron simplificar la prueba original de Abresch y Rosenberg. En esta sección, expondremos las líneas generales de una demostración posterior del teorema de Hopf 4.3, propuesta por Benoît Daniel, Lauren Hauswirth y Pablo Mira [DHM09].

El hecho de que la diferencial de Abresch-Rosenberg sea holomorfa (y por tanto, nula) en esferas de CMC no implica de manera directa ninguna propiedad geométrica, sino que será necesario hacer uso de dos resultados adicionales. El primero permite concluir que las esferas de CMC en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ se mantienen *invariantes* ante un grupo uniparamétrico de isometrías en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ (ver definición 4.8 y lema 4.9). El segundo resultado nos permitirá concluir que dicho grupo uniparamétrico es exactamente un grupo de rotaciones a lo largo de una fibra (teorema 4.10), de donde concluiremos el teorema de Hopf.

Definición 4.8. Sea (G, \cdot) un grupo de Lie con una operación \cdot y sea $\psi : \mathbb{R} \rightarrow G$ una curva diferenciable sobre G . Diremos que el conjunto imagen $\psi(\mathbb{R}) \subset G$ es un **grupo uniparamétrico** si ψ es un homomorfismo de grupos, es decir, $\psi(a + b) = \psi(a) \cdot \psi(b)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, y además ψ no es la aplicación constante $\psi \equiv e$, donde $e \in G$ denota al elemento neutro.

De la definición anterior se deduce que $\psi(\mathbb{R})$ es un subgrupo de G . Además, $\psi(\mathbb{R})$ debe estar contenido en la componente conexa en la que se encuentra el elemento neutro, pues ψ es una aplicación continua y $\psi(0) = e$.

Lema 4.9. ([DHM09, dCF09, ER11]) *Sea (S, \mathbf{X}) una esfera inmersa en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ con curvatura media constante. Entonces el conjunto $\mathbf{X}(S)$ es invariante ante un grupo uniparamétrico del grupo de isometrías de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.*

Es interesante remarcar que la demostración de este resultado se basa en el estudio de la aplicación ν definida en (4.2). Se distinguen dos posibilidades: si ν fuese constante, entonces es posible deducir que $\nu \equiv \pm 1$, de donde se puede extraer, haciendo uso de las ecuaciones de compatibilidad (4.3), que $H = \tau = 0$. Esto implica que $\mathbf{X}(S)$ debe ser una *sección* de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, es decir, un conjunto de la forma $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \{t\}$ con $t \in \mathbb{R}$, que es invariante ante rotaciones alrededor de cualquier fibra.

Si ν no es constante, entonces es posible definir en todo punto de la superficie una parametrización isoterma (U, φ) , $\varphi = \varphi(u, v)$ con la propiedad de que las funciones asociadas a los datos fundamentales de la superficie (ver definición 4.4) tan solo dependen del parámetro u . El hecho de que estos datos no dependan de v permite construir, gracias al teorema de las ecuaciones de compatibilidad 4.5, un grupo uniparamétrico de isometrías de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ que deja al conjunto $\mathbf{X}(S)$ invariante.

Para concluir el teorema 4.3 faltaría por tanto demostrar que el grupo uniparamétrico de isometrías que deja invariante a las esferas de CMC es un grupo de rotaciones alrededor de una fibra.

Teorema 4.10. ([DHM09, AR04, AR05]) *Sea (S, \mathbf{X}) una esfera inmersa en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ tal que el conjunto $\mathbf{X}(S)$ se mantiene invariante ante un grupo uniparamétrico de isometrías G . Entonces $\mathbf{X}(S)$ es una esfera rotacional.*

Salvo en el caso $\kappa > 0$, $\tau \neq 0$ (esferas de Berger), este teorema puede demostrarse de forma directa estudiando caso por caso los distintos grupos de isometría que actúan sobre los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$: el hecho de que el conjunto $\mathbf{X}(S)$, que es compacto, se mantenga invariante ante las isometrías de G implica que dicho grupo es un grupo de rotaciones alrededor de una fibra de $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.

Las esferas de Berger requieren un tratamiento diferente: estos espacios son en sí mismos conjuntos compactos, y podemos encontrar grupos uniparamétricos de isometrías que no se corresponden con rotaciones alrededor de una fibra. No obstante, si G no fuese un grupo de rotaciones, sería posible definir un campo vectorial X a partir de G (X sería un **campo de Killing**) sin ceros en

$\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Este campo induciría en la esfera S un campo de líneas sin singularidades, algo imposible por el teorema de Poincaré (ver corolario 1.19).

Demostración del teorema 4.3 (Teorema de Hopf en los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$)

A partir de los resultados anteriores, la demostración del teorema de Hopf es inmediata: consideremos sobre S la diferencial de Abresch-Rosenberg $\tilde{\Phi}$. Como S es de curvatura media constante, entonces $\tilde{\Phi}$ es la 2-forma holomorfa, y por tanto debe ser la 2-forma nula (ver teorema 1.52). El lema 4.9 afirma que el conjunto $\mathbf{X}(S)$ debe ser invariante ante un grupo uniparamétrico de isometrías, y por ser S una esfera podemos concluir que dicho grupo es un grupo de rotaciones alrededor de una fibra (ver teorema 4.10). Concluimos así que la esfera es rotacional. \square

4.4. Sobre el teorema de Hopf en $\mathbb{M}^3(\kappa)$

Como ya comentamos al principio del capítulo, la segunda demostración del teorema clásico de Hopf (sección 2.3) permite generalizar de forma natural el resultado al caso de superficies de CMC en los espacios de curvatura seccional constante $\mathbb{M}^3(\kappa)$. En efecto, en estos espacios la ecuación de Codazzi (2.9) sigue siendo válida, con lo cual la diferencial de Hopf se anula en esferas de curvatura media constante. De este hecho podremos deducir que dichas esferas son totalmente umbílicas. Pero las esferas con esta propiedad son únicas salvo isometría:

Lema 4.11. ([S70]) *Para cada $H \in \mathbb{R}$ tal que $H^2 > -\kappa$ existe una esfera inmersa en $\mathbb{M}^3(\kappa)$ totalmente umbílica y con curvatura media constante H . Además, el conjunto $\mathbf{X}(S)$ es único salvo isometría. Si $H^2 \leq -\kappa$, entonces no existen esferas totalmente umbílicas de CMC.*

En relación con este resultado, remarcamos que toda esfera totalmente umbílica inmersa en $\mathbb{M}^3(\kappa)$ tiene diferencial de Hopf nula (en particular, holomorfa) y por tanto posee curvatura media constante.

Podemos dar una expresión explícita de las esferas totalmente umbílicas en los espacios $\mathbb{M}^3(\kappa)$. Salvo homotecias, podemos asumir que $\kappa = -1, 0, 1$. En el caso euclídeo ($\kappa = 0$), estas esferas son

las esferas redondas (2.1). Respecto al caso $\kappa = 1$, podemos ver la 3-esfera de radio unidad $\mathbb{S}^3(1)$ como un subconjunto de \mathbb{R}^4 ,

$$\mathbb{S}^3(1) := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

De esta forma, para cada $r_0 \in [0, 1)$, las esferas dadas por

$$\{(x_1, x_2, x_3, r_0) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - r_0^2\} \quad (4.5)$$

son totalmente umbílicas. Si $r_0 = 0$, obtenemos una esfera mínima (curvatura media 0).

Por último, si $\kappa = -1$, podemos estudiar el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3(-1)$ mediante el modelo de la **bola de Poincaré**: consideremos la bola unidad de \mathbb{R}^3 equipada con la métrica

$$\bar{g} := 4 \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{(1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2))^2}.$$

En estas condiciones, para cada $r_0 \in (0, 1)$, las esferas dadas por

$$\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r_0^2\} \quad (4.6)$$

son totalmente umbílicas.

Teorema 4.12. (Teorema de Hopf para superficies de CMC en $\mathbb{M}^3(\kappa)$, [H47]) *Si (S, \mathbf{X}) es una esfera inmersa en $\mathbb{M}^3(\kappa)$ con curvatura media constante, entonces es una esfera totalmente umbílica.*

Combinando los resultados del lema 4.11 y el teorema 4.12, deducimos que para cada valor de H tal que $H^2 > -\kappa$ existe una única esfera de CMC (salvo isometría), que además es totalmente umbílica. Si $H^2 \leq -\kappa$, entonces no hay esferas de CMC.

Capítulo 5

W-superficies en los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

En capítulos anteriores, estudiamos dos generalizaciones del teorema clásico de Hopf: en primer lugar, expusimos la extensión al caso de W-superficies especiales (ver definición 1.32) en \mathbb{R}^3 . Posteriormente, tratamos la generalización a los espacios $\mathbb{M}^3(\kappa)$ y $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ pero restringiéndonos nuevamente al caso de superficies de CMC. Llegados a este punto, resulta natural plantear si es posible extender el teorema de Hopf al caso más general de W-superficies especiales inmersas en espacios homogéneos. Como veremos a continuación, la respuesta es afirmativa para los espacios de curvatura seccional constante $\mathbb{M}^3(\kappa)$, mientras que para casi todos los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ el problema de Hopf permanece abierto.

5.1. Sobre el teorema de Hopf para W-superficies especiales en $\mathbb{M}^3(\kappa)$

Para abordar este resultado, recurriremos a las demostraciones del teorema de Hopf para W-superficies en \mathbb{R}^3 , estudiadas en el capítulo 3. En principio, la demostración original de Hartman y Wintner (ver sección 3.1) hace uso de que la esfera se encuentra en \mathbb{R}^3 , pues esta se parametriza como el grafo de una función diferenciable. En consecuencia, la generalización de su prueba a otros espacios ambiente no parece inmediata. Sin embargo, la demostración propuesta por S. S. Chern (sección 3.2) tan solo hace uso de la ecuación de Codazzi (2.9), que como ya comentamos sigue siendo válida en los espacios $\mathbb{M}^3(\kappa)$. De esta forma, toda esfera en $\mathbb{M}^3(\kappa)$ debe ser totalmente umbílica, lo que nos permite extender el teorema de Hopf a los espacios de curvatura seccional constante:

Teorema 5.1. (Teorema de Hopf para W-superficies especiales en $\mathbb{M}^3(\kappa)$, [C55-2]) *Sea (S, \mathbf{X}) una W-superficie especial inmersa en $\mathbb{M}^3(\kappa)$. Si S es una esfera, entonces es una esfera totalmente umbílica.*

En relación con este resultado, recordamos que en cualquier ecuación especial de Weingarten $W(k_1, k_2) = 0$ es posible encontrar valores $c \in \mathbb{R}$ tales que $W(c, c) = 0$ (ver observación 1.35). De esta manera, el teorema 5.1 afirma que toda esfera de Weingarten en $\mathbb{M}^3(\kappa)$ debe ser una esfera totalmente umbílica con curvatura media constante $H \in \mathbb{R}$ tal que $W(H, H) = 0$.

5.2. El problema de Hopf para W-superficies especiales en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$

Como vimos en el capítulo anterior, Abresch y Rosenberg probaron que toda esfera inmersa en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ con curvatura media constante debía ser rotacional. Este hecho motivó la búsqueda de una posible extensión del teorema de Hopf al caso de W-superficies especiales en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Se plantea así el siguiente problema:

Problema de Hopf. *Sea (S, \mathbf{X}) una W-superficie especial de Weingarten en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. Si S es una esfera, ¿entonces es rotacional?*

A día de hoy, el problema de Hopf permanece abierto. No obstante, en los últimos años se han realizado varios avances que comentaremos a continuación.

En 2009, José M. Espinar, José A. Gálvez y Harold Rosenberg demostraron que las únicas esferas con curvatura extrínseca constante y positiva inmersas en los espacios producto $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ eran rotacionales (recordamos que las superficies con $K_e = \text{cte} > 0$ son un caso particular de W-superficies especiales). Más específicamente, probaron el siguiente resultado:

Teorema 5.2. ([EGR09]) *Para cada $K_e > 0$ existe una esfera rotacional inmersa en $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ con curvatura extrínseca constante K_e , que además es única salvo isometría. Más aún: si (S, \mathbf{X}) es una esfera inmersa en $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ con curvatura extrínseca constante y positiva, entonces es una esfera rotacional.*

Recientemente, en 2021, José A. Gálvez y Pablo Mira [GM21] probaron una condición suficiente para abordar el problema de Hopf. Para enunciarlo correctamente, recordamos que en cualquier ecuación de Weingarten especial (1.12) el conjunto $W^{-1}(0)$ es una unión disjunta de curvas $\{C_i\}_{i \in I}$

de la forma $C_i := \{y = f_i(x)\}$, siendo f_i funciones diferenciables (ver observación 1.35). Esto implica que las curvaturas principales de cualquier W-superficie especial deben verificar una relación del tipo $k_2 = f_i(k_1)$, es decir, están *asociadas* a alguna curva C_i .

Resulta conveniente tratar por separado curvas del conjunto $W^{-1}(0)$ puesto que, en general, podemos encontrar esferas diferentes como solución de una misma ecuación de Weingarten. A modo de ejemplo, consideremos en \mathbb{R}^3 la ecuación $W(k_1, k_2) = 0$, donde W viene dada por

$$W(x, y) := (x + y - 1)(x + y - 2).$$

La ecuación posee como solución tanto las esferas redondas de radio 1 como las de radio 2, que no son isométricas entre sí. Este fenómeno sucede porque el conjunto $W^{-1}(0)$ es la unión de las curvas $C_1 := \{x + y = 2\}$, $C_2 := \{x + y = 1\}$, estando las esferas de radio 1 asociadas a C_1 y las de radio 2 a C_2 .

Proposición 5.3. ([GM21]) *Sea (1.12) una ecuación de Weingarten especial en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, y consideremos una curva $C := \{y = f(x)\} \subseteq W^{-1}(0)$. Entonces existe una W-superficie (S, \mathbf{X}) rotacional asociada a C con las siguientes propiedades:*

- Denotando por Γ a la fibra respecto a la cual la superficie es rotacional, el conjunto $\mathbf{X}(S)$ corta ortogonalmente a Γ .
- La superficie es *inextensible*, es decir, no existe ninguna otra superficie $(\tilde{S}, \tilde{\mathbf{X}})$ tal que $\mathbf{X}(S) \subsetneq \tilde{\mathbf{X}}(\tilde{S})$.

Además, esta superficie es única salvo isometría.

Los autores llamaron a esta superficie **ejemplo canónico rotacional**. A partir de este resultado, pudieron probar la condición suficiente para abordar el problema de Hopf.

Teorema 5.4. ([GM21]) *Sea (1.12) una ecuación de Weingarten especial en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, y consideremos una curva $C := \{y = f(x)\} \subseteq W^{-1}(0)$. Supongamos que el ejemplo canónico rotacional asociado a C tiene segunda forma fundamental acotada¹. En estas condiciones,*

¹Esto es, la segunda forma fundamental $\tilde{\sigma}$ (ver (1.4)) aplicada a cualquier par de vectores unitarios es una función acotada. Esto es equivalente a que las curvaturas principales de la superficie estén acotadas.

1. Si el ejemplo canónico es compacto, entonces es una esfera rotacional. Más aún: es la única esfera (salvo isometría) asociada a C .
2. Si el ejemplo canónico no es compacto, entonces no existen esferas asociadas a C .

En particular, toda esfera de Weingarten asociada a C es rotacional, respondiendo afirmativamente al problema de Hopf.

Cabe remarcar que si existiese una esfera no rotacional que fuese solución de una ecuación de Weingarten especial en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, entonces deducimos del teorema 5.4 que la segunda forma fundamental del ejemplo canónico rotacional no podría estar acotada. Por tanto, no podríamos asegurar que dicha esfera fuese única (salvo isometría). Dicho esto, a día de hoy se desconocen ejemplos de esferas de Weingarten no rotacionales en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$.

Como hemos comentado, si se dan las condiciones para aplicar el teorema 5.4 a una cierta ecuación de Weingarten especial en algún espacio $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, entonces podemos demostrar el teorema de Hopf para ese caso. Gracias a ello, Gálvez y Mira pudieron extender el teorema 5.2 a todos los espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$:

Teorema 5.5. ([EGR09, GM21]) *Para cada $K_e > 0$ existe una esfera rotacional inmersa en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ con curvatura extrínseca constante K_e , que además es única salvo isometría. Más aún: si (S, \mathbf{X}) es una esfera inmersa en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$ con curvatura extrínseca constante positiva, entonces es una esfera rotacional.*

Asimismo, demostraron el teorema de Hopf para W-superficies especiales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$:

Teorema 5.6. (Teorema de Hopf para W-superficies especiales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ [GM21]) *Sea (S, \mathbf{X}) una W-superficie especial inmersa en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Si S es una esfera, entonces es una esfera rotacional.*

5.3. Problemas abiertos

Más allá de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, el problema de Hopf permanece abierto en el resto de espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$. En [GM21] se encontraron ecuaciones especiales de Weingarten en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ para las cuales la segunda

forma fundamental del ejemplo canónico no estaba acotada. De este hecho se deduce que no puede haber esferas rotacionales: si las hubiese, serían el ejemplo canónico, y la segunda forma fundamental de cualquier esfera debe estar acotada por compacidad. No obstante, no podemos excluir la posibilidad de que existan esferas no rotacionales asociadas a tales ecuaciones, así que no es posible dar una respuesta concluyente al problema de Hopf. La cuestión a resolver sería sería la siguiente:

Problema de Hopf en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. *Dada una ecuación especial de Weingarten en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ cuyo ejemplo canónico rotacional no tenga segunda forma fundamental acotada, ¿podemos deducir que no existen esferas de Weingarten?*

Respecto a los espacios con $\tau \neq 0$, se desconoce si el ejemplo canónico rotacional tiene segunda forma fundamental acotada. El primer paso para resolver el problema de Hopf sería abordar esta cuestión.

Problema en espacios $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, $\tau \neq 0$. *¿Es cierto que para toda ecuación especial de Weingarten en $\mathbb{E}^3(\kappa, \tau)$, $\tau \neq 0$, el ejemplo canónico rotacional tenga segunda forma fundamental acotada?*

Bibliografía

- [AR04] Abresch, U., Rosenberg, H. *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* . Acta Math., 193(2):141–174, 2004.
- [AR05] Abresch, U., Rosenberg, H. *Generalized Hopf differentials*. Mat. Contemp., 28:1–28, 2005.
- [AEG08] Aledo, J., Espinar, J., Gálvez, J. *Height estimates for surfaces with positive constant mean curvature in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$* . Illinois J. Math., 52(1):203–211, 2008.
- [C55] Chern, S. S. *An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), pp. 771-782.
- [C55-2] Chern, S. S. *On special W-surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), pp. 783-786.
- [D07] Daniel, B. *Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds*. Comment. Math. Helv., 82(1):87–131, 2007.
- [DHM09] Daniel, B., Hauswirth, L., Mira, P. *Constant mean curvature surfaces in homogenous manifolds*. Korea Institute for Advanced Study, 2009.
- [dC76] do Carmo, M. P. *Differential geometry of curves and surfaces*, Dover Books on Mathematics (1976).
- [dC92] do Carmo, M. P. *Riemannian Geometry*, Birkhäuser (1992).
- [dCF09] do Carmo, M. P., Fernández, I. *Rotationally invariant cmc disks in product spaces*. Forum Math., 21(6):951–963, 2009.
- [EGR09] Espinar, J., Gálvez, J. A., Rosenberg, H. *Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces*. Comment. Math. Helv., 84:351–386, 2009.
- [ER11] Espinar, J., Rosenberg, H. *Complete constant mean curvature surfaces in homogeneous spaces*. Comment. Math. Helv., 86, 659–674, 2011.
- [FK80] Farkas, H. M., Kra, I. *Riemann surfaces*, Springer-Verlag New York (1980).

- [FM07] Fernández, I., Mira, P. *A characterization of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds*. Diff. Geom. Appl., 25:281–289, 2007.
- [FMP99] Figueroa, C., Mercuri, F., Pedrosa, R. *Invariant surfaces of the Heisenberg groups*. Ann. Mat. Pura Appl. (4), 177:173–194, 1999.
- [GM21] Gálvez, J. A., Mira, P. *Rotational symmetry of Weingarten spheres in homogeneous three-manifolds*. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), no. 773, 2021, pp. 21-66., 2021.
- [HW53] Hartman, P., Wintner, A. *On the local behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations*, American Journal of Mathematics, Vol. 75, (1953), pp. 449-476.
- [HW54] Hartman, P., Wintner, A. *Umbilical points and W-Surfaces*, American Journal of Mathematics, Vol. 76, No. 3 (1954), pp. 502-508.
- [H47] Hopf, H. *Differential geometry in the large*. Springer-Verlag (1947).
- [J91] Jost, J. *Two-Dimensional Geometric Variational Problems*, Wiley (1991).
- [MR04] Meeks, W., Rosenberg, H. *Stable minimal surfaces in $M \times \mathbb{R}$* . J. Differential Geom., 68(3):515–534, 2004.
- [MR05] Meeks, W., Rosenberg, H. *The theory of minimal surfaces in $M \times \mathbb{R}$* . Comment. Math. Helv., 80(4):811–858, 2005.
- [MS39] Myers, S. B., Steenrod, N. E. *The group of isometries of a Riemannian manifold*. Ann. of Math., 2, 40 (2): 400–416, 1939.
- [N53] Nirenberg, L. *On nonlinear partial differential equations and Hölder continuity*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 6, (1953), pp. 103-156.
- [R02] Rosenberg, H. *Minimal surfaces in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$* . Illinois J. Math., 46(4):1177–1195, 2002.
- [S83] Scott, P. *The geometries of 3-manifolds*. Bull. London Math. Soc., 15(5):401–487, 1983.

-
- [S70] Spivak, M. *A comprehensive introduction to differential geometry, Vol 3 and 4*. Publish or Perish, 1970.
- [T10] Torralbo, F. *Rotationally invariant constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds*. *Diff. Geo. Appl.*, 28(5), 2010, 593—607.
- [W61] Weingarten, J. *Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen*. *J. Reine Angew. Math.* 59, 382–393, 1861.
- [W63] Weingarten, J. *Ueber die Flächen, derer Normalen eine gegebene Fläche berühren*. *J. Reine Angew. Math.* 62, 61–63, 1863.