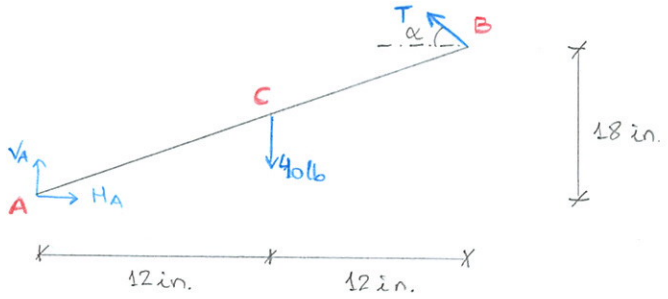
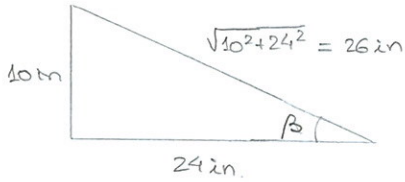
PRIMER PARCIAL MECÁNICA

EJERCICIO 2.1.





$\operatorname{sen}\beta = \frac{10}{26} = 0'385$

$\cos\beta = \frac{24}{26} = 0'923$

Ecuaciones de equilibrio:

$\Sigma F_H = 0;$ $\quad H_A - T\cos\alpha = 0$ ①

$\Sigma F_V = 0;$ $\quad V_A - 40 + T\operatorname{sen}\alpha = 0$ ②

$\Sigma M^{A} = 0;$ $\quad -40\cdot 12 + T\cos\alpha\cdot 18 + T\operatorname{sen}\alpha\cdot 24 = 0$ ③

③ $\frac{336}{13}T - 480 = 0;$ $\quad \boxed{T = \frac{130}{7} = 18'571\,lb}$

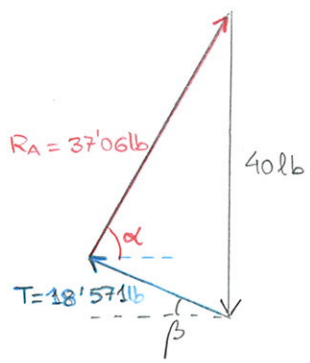
② $V_A = 40 - \frac{130}{7}\cdot\frac{10}{26} = \frac{230}{7} = 32'857\,lb$

① $H_A = \frac{130}{7}\cdot\frac{24}{26} = \frac{120}{7} = 17'143\,lb$

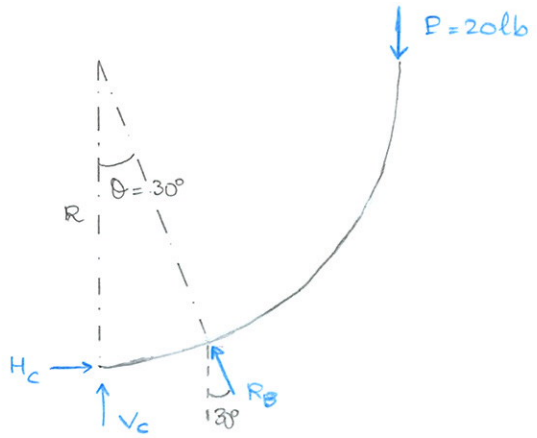
$\boxed{R_A = \sqrt{\left(\frac{230}{7}\right)^2 + \left(\frac{120}{7}\right)^2} = 37'060\,lb}$

$\frac{V_A}{H_A} = \frac{32'857}{17'143} = 1'917 = \operatorname{Arctan}\alpha \longrightarrow \boxed{\alpha = 62'447^\circ}$

Triángulo de fuerzas:



EJERCICIO 2.2.



Equilibrio:

$\Sigma F_H = 0; \quad H_c - R_B \operatorname{sen} 30° = 0 \quad (1)$

$\Sigma F_V = 0; \quad V_c + R_B \cos 30° - P = 0 \quad (2)$

$\Sigma M^{C} = 0; \quad (R_B \cos 30°)(R \operatorname{sen} 30°) + (R_B \operatorname{sen} 30°)(R - R\cos 30°) - P \cdot R = 0 \quad (3)$

(3) $R_B (\operatorname{sen} 30° \cos 30° + \operatorname{sen} 30° (1 - \cos 30°)) = P$

$$\boxed{R_B = \frac{P}{\operatorname{sen} 30°} = 2P = 40 \text{ lb}}$$

(1) $H_c = R_B \operatorname{sen} 30° = P = 20 \text{ lb}$

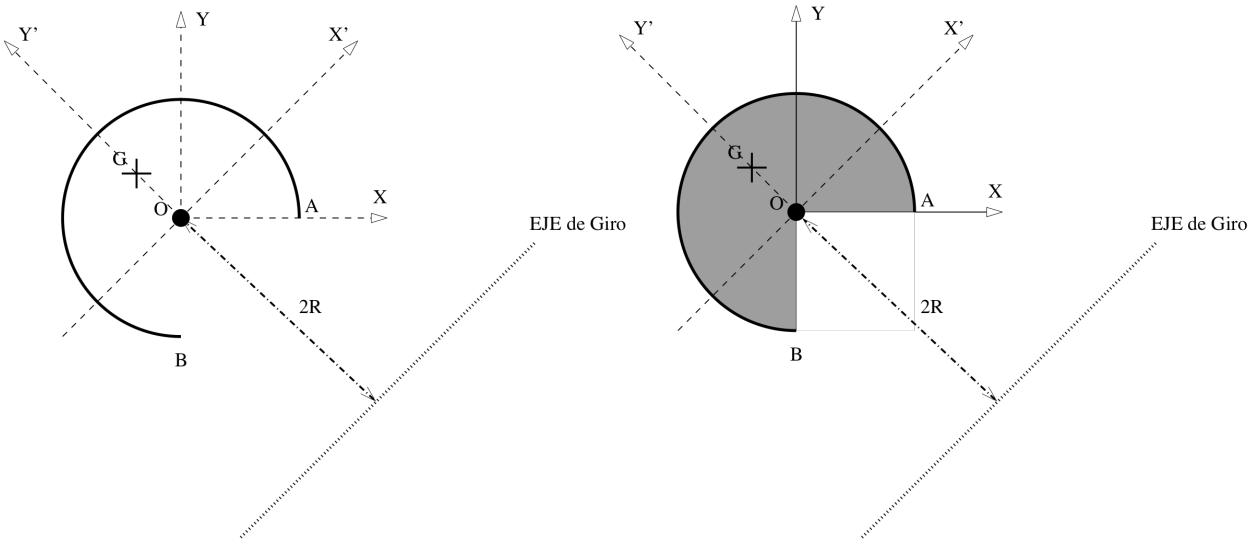
(2) $V_c = P - R_B \cos 30° = P(1 - 2\cos 30°) = -14'641 \text{ lb}$

$$\boxed{R_c = \sqrt{20^2 + 14'641^2} = 24'786 \text{ lb}}$$

$$\operatorname{Arctan} \alpha = \frac{V_c}{H_c} = \frac{-14'641}{20} \Rightarrow \boxed{\alpha = -36'206°}$$

Ejercicio Geometría de Masas:

Sean las piezas planas mostradas en la figura: a) arco de circunferencia AB de densidad constante ρ de radio R. b) círculo de radio R al que se le ha quitado un cuarto. Se pide:



1. Hallar la posición del centro de gravedad G de ambas figuras . Indicar las coordenadas de G respecto de los ejes XY y X'Y'.

Figura de la izquierda:

El problema se resuelve aplicando coordenadas polares donde $x = RCos(\theta)$, $y = RSen(\theta)$ y el diferencial de longitud de arco $dl = Rd\theta$. El arco abarca un ángulo desde 0 radianes a $\frac{3\pi}{2}$

$$X_G = \frac{\int_M xdm}{\int_M dm} = \frac{\int_L \rho xdl}{\int_L \rho dl} = \frac{\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} \rho R^2 Cos(\theta) d\theta}{\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} \rho R d\theta} = \frac{\rho R^2 Sen(\theta)_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}}}{\rho R \frac{3\pi}{2}} = \frac{-2R}{3\pi}$$

$$Y_G = \frac{\int_M ydm}{\int_M dm} = \frac{\int_L \rho ydl}{\int_L \rho dl} = \frac{\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} \rho R^2 Sen(\theta) d\theta}{\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} \rho R d\theta} = \frac{-\rho R^2 Cos(\theta)_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}}}{\rho R \frac{3\pi}{2}} = \frac{2R}{3\pi}$$

La figura es simétrica con respecto al eje Y', luego X'G=0 y simplemente la posición de la coordenada Y'G se calcula por geometríaa según la figura.

$$X'_G = 0; Y'_G = \sqrt{\left(\frac{-2R}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{2R}{3\pi}\right)^2} = \frac{2R\sqrt{2}}{3\pi}$$

Figura de la derecha:

El problema se resuelve aplicando coordenadas polares donde $x = rCos(\theta)$, $y = rSen(\theta)$ y el diferencial de área de círculo es $dA = rd\theta dr$. El área se integra desde r=0 hasta el perímetro exterior r=R, y abarca un ángulo desde 0 a $\frac{3\pi}{2}$.

$$X_G = \frac{\int_M xdm}{\int_M dm} = \frac{\int_A \rho x dA}{\int_A \rho dA} = \frac{\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} \rho r^2 Cos(\theta) d\theta dr}{\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} \rho r d\theta dr} = \frac{\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} \rho \frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=R} Cos(\theta) d\theta}{\rho \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=R} \theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}}} = \frac{\rho \frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=R} Sin(\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}}}{\rho \frac{3\pi R^2}{4}} = \frac{-\rho \frac{R^3}{3}}{\rho \frac{3\pi R^2}{4}}$$

$$X_G = \frac{-4R}{9\pi}$$

$$Y_G = \frac{\int_M ydm}{\int_M dm} = \frac{\int_A \rho y dA}{\int_A \rho dA} = \frac{\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} \rho r^2 Sen(\theta) d\theta dr}{\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} \rho r d\theta dr} = \frac{\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} \rho \frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=R} Sen(\theta) d\theta}{\rho \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=R} \theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}}} = \frac{-\rho \frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=R} Cos(\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}}}{\rho \frac{3\pi R^2}{4}} = \frac{\rho \frac{R^3}{3}}{\rho \frac{3\pi R^2}{4}}$$

$$Y_G = \frac{4R}{9\pi}$$

$$X'_G = 0; Y'_G = \sqrt{\left(\frac{-4R}{9\pi}\right)^2 + \left(\frac{4R}{9\pi}\right)^2} = \frac{4R\sqrt{2}}{9\pi}$$

2. Hallar la superficie generada por el arco de circunferencia de la figura a) al girar alrededor del eje que dista del centro O una distancia 2R.

Aplicando el primer teorema de Pappus Guldin, la superfície S generada por el arco de la figura de la izquierda al girar alrededor de eje indicado en la figura que dista 2R, es:

$$S = 2\pi L d$$

Donde L es la longitud del arco obtenida por el denominador de la expresión del centro de gravedad :

$$L = \int_L dl = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} R d\theta = R\frac{3\pi}{2}$$

Y d es la distancia existente entre el eje y el centro de gravedad G, que es igual a la suma de la distancia del eje al punto O más la suma de la distancia del punto O al G.

$$d = \left(\frac{2R\sqrt{2}}{3\pi} + 2R \right)$$

Por tanto la superficie obtenida es:

$$S = 2\pi L d = 2\pi \frac{3\pi R}{2} \left(\frac{2R\sqrt{2}}{3\pi} + 2R \right) = 6\pi^2 R^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{3\pi} + 1 \right)$$

3. Hallar el volumen generado por el trozo de círculo de la figura b) al girar alrededor del eje que dista del centro O una distancia 2R.

   Aplicando el segundo teorema de Pappus Guldin, el volumen V generado por la figura de la derecha al girar alrededor de eje indicado en la figura que dista 2R, es:

   $$V = 2\pi A d$$

   Donde A es el área de la figura obtenida por el denominador de la expresión del centro de gravedad

   $$\boxed{A = \int_A dA = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} r d\theta dr = \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=R} \theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi R^2}{4}}$$

   Y d es la distancia existente entre el eje y el centro de gravedad G, que es igual a la suma de la distancia del eje al punto O más la suma de la distancia del punto O al G.

   $$d = \left(\frac{4R\sqrt{2}}{9\pi} + 2R \right)$$

   $$V = 2\pi A d = 2\pi \frac{3\pi}{4} R^2 \left(\frac{4R\sqrt{2}}{9\pi} + 2R \right) = 3\pi^2 R^3 \left(\frac{2\sqrt{2}}{9\pi} + 1 \right)$$