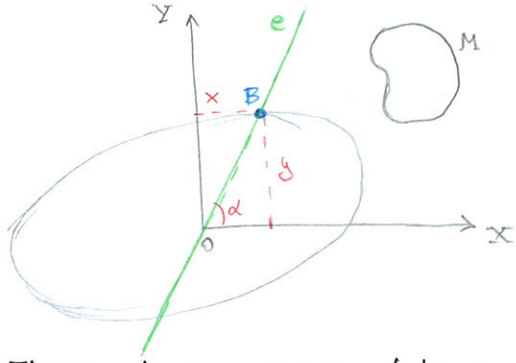
9.4. ELIPSE Y ELIPSOIDE DE INERCIA

ELIPSE DE INERCIA: Permite entender cómo varía el momento de inercia de un sistema material respecto de un eje cualquiera que pasa por un punto O, cuando variamos la orientación del eje. Elipse 2D – elipsoide 3D.



Tomo B tal que $OB = \frac{1}{\sqrt{I_e}}$

$I_e = \frac{1}{OB^2}$

Si I_e es grande ⇒ OB es pequeño y 'e' es un eje que tiene la masa alejada.

Elipse de inercia: es el lugar geométrico de los puntos B de las diferentes direcciones de los ejes que pasan por O.

Escribimos los cosenos directores del eje en función de x e y:

$$\cos\alpha = \frac{x}{OB} = x\sqrt{I_e}$$

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{OB} = y\sqrt{I_e}$$

$$I_e = (\cos\alpha \quad \operatorname{sen}\alpha)\begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} = (x\sqrt{I_e} \quad y\sqrt{I_e})\begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\sqrt{I_e} \\ y\sqrt{I_e} \end{pmatrix}$$

$$I_e = (x\sqrt{I_e} \quad y\sqrt{I_e})\begin{pmatrix} x I_x\sqrt{I_e} - y P_{xy}\sqrt{I_e} \\ -x P_{xy}\sqrt{I_e} + y I_y\sqrt{I_e} \end{pmatrix} =$$

$$I_e = x\sqrt{I_e}\left(x I_x\sqrt{I_e} - y P_{xy}\sqrt{I_e}\right) + y\sqrt{I_e}\left(-x P_{xy}\sqrt{I_e} + y I_y\sqrt{I_e}\right)$$

$$I_e = I_e\left(x^2 I_x - xy P_{xy} + y^2 I_y - xy P_{xy}\right)$$

$$\boxed{I_x x^2 + I_y y^2 - 2xy P_{xy} = 1}$$

Los ejes de la elipse son los de momento de inercia máximo y mínimo.

Eje mayor: OB máximo ⇒ I_e mínimo ⇒ masa más cerca.

Para los ejes principales de inercia:

$$\boxed{I_x^p x^2 \quad I_y^p y^2 = 1}$$

En 3D:

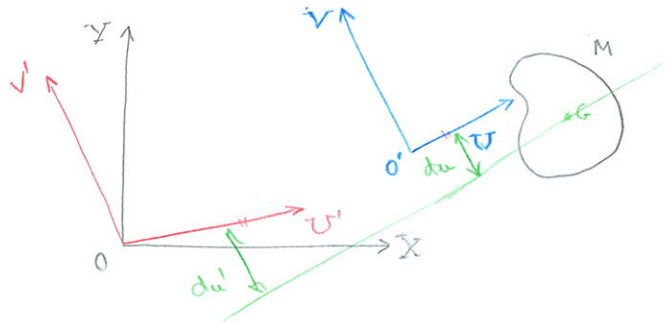
$$OB = \frac{1}{\sqrt{I_e}} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{OB} \qquad \cos\beta = \frac{y}{OB} \qquad \cos\gamma = \frac{z}{OB}$$

$$I_e = (\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma) \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2P_{xy}\, xy - 2P_{yz}\, yz - 2P_{xz}\, xz = 1$$

$I_x^P x^2 + I_y^P y^2 + I_z^P z^2 = 1$ para los ejes principales de inercia.

9.5. MOMENTOS DE INERCIA RESPECTO DE UN SISTEMA DE REFERENCIA TRASLADADO.



1º Hallamos el tensor de inercia respecto de $OU'V'$: $I_O(OU'V') = \mathcal{E}^T_{uv'}\, I_O\, \mathcal{E}_{uv'}$

2º Aplicamos el teorema de Steiner para obtener el tensor en O'.

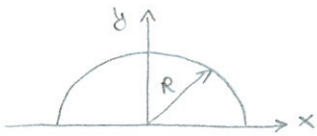
$$\left.\begin{aligned} I_u &= I_{uG} + M d_u^2 \\ I_{u'} &= I_{uG} + M d_{u'}^2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} I_u = I_{u'} &= M d_u^2 - M d_{u'}^2 \\ I_{u'} &= I_u + M(d_{u'}^2 - d_u^2) \end{aligned}$$

Igual para $I_{v'} = I_v + M(d_{v'}^2 - d_v^2)$

Y para los productos de inercia:

$$\left.\begin{aligned} P_{uv} &= P_{uvG} + M d_u d_v \\ P_{u'v'} &= P_{uvG} + M d_{u'} d_{v'} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} P_{uv} - P_{u'v'} &= M(d_u d_v - d_{u'} d_{v'}) \\ P_{u'v'} &= P_{uv} + M(d_{u'} d_{v'} - d_u d_v) \end{aligned}$$

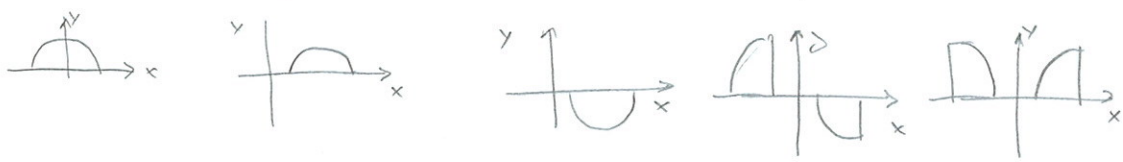
IMPLICACIONES DEL CUADRADO DE LA DISTANCIA



$I_x = I_y = \frac{1}{4} M R^2$

$P_{xy} = 0$

$I_x = I_y$



$I_x =$