

15 de mayo de 2023

Ecuaciones en derivadas parciales de transporte en teoría cinética y mecánica de fluidos

Acceso libre bajo licencia



Juanjo Nieto & Óscar Sánchez

Índice general

Notación	5
Parte 1. Ecuaciones de Transporte	7
Capítulo 1. Motivación: Ecuaciones de transporte en Física	9
1. Ecuaciones hidrodinámicas: leyes de conservación	9
1.1. Conservación de la masa	10
1.1.1. Ecuación de advección.	11
1.2. Ecuaciones de Euler para gases no viscosos.	11
1.3. Flujos de tráfico	12
1.4. Ecuación de Burgers	12
1.5. Ecuación Renewal o de Von Foerster	13
2. Ecuaciones cinéticas	13
2.1. Ecuación de Liouville	14
2.1.1. Normalización y densidad de masa.	16
2.1.2. Transporte libre.	16
2.2. Modelo coulombiano de Vlasov-Poisson.	16
2.3. Ecuación de Boltzmann.	17
2.4. Teoría cinética de partículas activas.	17
3. Otros modelos de transporte	18
Capítulo 2. La ecuación de transporte lineal	21
1. Formulación general de una ecuación de transporte	21
Forma conservativa y forma no conservativa	21
2. Existencia y unicidad: teoría clásica	22
2.1. Curvas características	23
2.2. Soluciones clásicas de la ecuación de transporte	31
3. Existencia y unicidad: Teoría débil	33
3.1. Las curvas características	34
3.2. Soluciones débiles de la ecuación de transporte lineal	38
Parte 2. Análisis de casos particulares	45
Capítulo 3. La ecuación de Burgers: un ejemplo de transporte no lineal	47
1. Choques: condiciones de Rankine-Hugoniot	49
2. Unicidad (falta de): condiciones de admisibilidad	51
2.1. Viscosidad evanescente	53
2.2. Soluciones entrópicas	56

Capítulo 4. Análisis cualitativo de modelos cinéticos: ecuación de transporte libre y el sistema de Vlasov-Poisson	59
1. Obtención de modelos cinéticos (lineales) por dualidad	59
2. Estimaciones de dispersión para el modelo de transporte libre	60
3. Análisis cualitativo de soluciones del sistema de Vlasov-Poisson	65
3.1. Cantidades conservadas	67
3.2. Identidad de dispersión y Ley Pseudo-conforme	68
3.3. Condición para la dispersión estadística	70
3.4. Dispersión fuerte en el caso electrostático	71
Capítulo 5. Existencia y unicidad de la ecuación de Euler 2-D	75
1. Las ecuaciones de los fluidos: Euler y Navier-Stokes	75
1.1. Primera ecuación de los fluidos: conservación de la masa	75
1.2. Trayectorias, homogeneidad e incompresibilidad	77
1.3. Segunda ecuación de los fluidos: Ley de Newton	78
1.3.1. Derivada material y teorema del Transporte	79
1.3.2. Fuerzas normales y laminares: presión y viscosidad	80
1.3.3. Fluidos laminares vs. turbulentos: número de Reynolds	83
1.4. Rotacional y vorticidad	84
2. Ecuación de Euler 2-D: existencia y unicidad	85
2.1. Formulación vorticidad-velocidad	86
2.2. Teorema de unicidad para EDOs logaritmico-lipschitzianas	88
2.3. Linealización del problema: soluciones aproximadas	89
2.4. Estimaciones a priori y paso al límite	91
2.5. Solución: relaciones y unicidad	93
Parte 3. Apéndices	97
Apéndice A. Nociones de cálculo y análisis	99
1. Resultados clásicos de Ecuaciones Diferenciales	99
2. Nociones de cálculo vectorial	101
3. Espacios L^q y espacios de Sobolev	103
4. Nociones de análisis funcional	110
Apéndice B. Demostraciones	113
1. Demostración del Lema 11	113
2. Demostración de la Proposición 39	116
3. Demostración del Lema 41	121
Bibliografía	125
Índice alfabético	127

Notación

Notación general

\mathbb{R}^N	espacio vectorial euclídeo de dimensión $N \in \mathbb{N}$
t, x, v	tiempo (escalar), espacio y velocidad (vectoriales)
$\nabla_x f(t, x, v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)$	vector gradiente de la función escalar f respecto de la variable x
$a \cdot \nabla_x f = \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x, v)$	producto escalar del vector a y $\nabla_x f$
$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + a \cdot \nabla_x f(t, x)$	derivada material de f (respecto de a)
$\operatorname{div}_x(a(t, x, v)) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(t, x, v)$	divergencia de la función vectorial a resp. de x
$u \otimes v = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \cdots & u_1 v_N \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \cdots & u_2 v_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N v_1 & u_N v_2 & \cdots & u_N v_N \end{pmatrix}$	producto tensorial de los vectores u y v
$T = \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ \vdots \\ T_{N1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1N} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{N1} & T_{N2} & \cdots & T_{NN} \end{pmatrix}$	tensor o función matricial
$\operatorname{Div}(T) = \left(\operatorname{div}(T_1), \dots, \operatorname{div}(T_N) \right)$	vector de divergencias (por filas) del tensor T
$\Delta_x(f(t, x, v)) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(t, x, v)$	laplaciano de la función f respecto de x

Notación para espacios funcionales

$C^m(\Omega)$	funciones (escalares o vectoriales) definidas en el dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ con derivadas continuas hasta el orden $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$C^m(\bar{\Omega})$	funciones de $C^m(\mathbb{R}^N)$ restringidas a Ω
$\mathcal{B}^m(\Omega)$	funciones de $C^m(\Omega)$ con derivadas acotadas
$\mathcal{D}(\Omega)$	funciones test, es decir $\phi \in C^\infty(\Omega)$ y con soporte compacto
$L^p(\Omega)$	funciones f (escalares o vectoriales) con $ f ^p$ integrable, $p \in [1, \infty)$
$L^\infty(\Omega)$	funciones esencialmente acotadas
$W^{m,p}(\Omega)$	espacios de Sobolev ($H^m(\Omega)$ cuando $p = 2$)
$C(0, T; X)$	funciones $a : [0, T] \rightarrow X$ continuas, siendo X un espacio normado
$L^p(0, T; X)$	espacios de Lebesgue-Bochner, i.e., funciones $a : [0, T] \rightarrow X$, tales que $\ a(t)\ _X$ está en $L^p(0, T)$

Parte 1

Ecuaciones de Transporte

Motivación: Ecuaciones de transporte en Física

En la primera parte de estas notas queremos mostrar que el concepto de ecuación de transporte no es más que una estructura matemática subyacente común a gran variedad de modelos que aparecen en física y biología. Para ello primero vamos a poner cara, mediante ejemplos concretos, a este tipo de ecuaciones.

Además de servirnos como presentación y motivación, estos contenidos tienen otra finalidad: comprender la aplicabilidad de los resultados que obtendremos en capítulos posteriores, donde se tratará el concepto de ecuación de transporte de una forma matemática genérica que, desconectada de su origen, pudiese parecer demasiado abstracta. Se dejará como tarea para el lector la realización de ejercicios donde se propone la particularización de los resultados mostrados persiguiendo un doble objetivo: en primer lugar, comprender mediante la aplicación a casos concretos tanto los resultados como la notación empleada y, en segundo lugar, ser capaces de reinterpretar los resultados en los términos del problema que los motiva.

Vamos a dividir esta sección sobre ejemplos en dos grandes campos: los modelos hidrodinámicos (o de tipo fluido) y los modelos cinéticos. La diferencia física entre ambos tipos es, en esencia, la escala a la que se observa el fenómeno modelado por estas ecuaciones, siendo esta *macroscópica* en el primero de los casos y *microscópica* en el segundo. A nivel descriptivo o matemático, la diferencia es más sutil, pues en los modelos cinéticos¹ la velocidad v aparece como variable independiente (siendo $f(t, x, v, \text{otros})$ la función incógnita, que dependerá además de tiempo t y espacio x , y eventualmente de otras variables) mientras que en los hidrodinámicos la velocidad aparece como variable dependiente (típicamente $u(t, x)$). Obviamente esta descripción es un poco naïf, por lo que estos y otros matices los comprenderemos mejor a lo largo de los ejemplos. En los modelos aquí descritos aparecen operadores matemáticos que han sido descritos en el listado preliminar de Notación en la página 5 por si el lector no estuviese familiarizado con la simbología empleada.

1. Ecuaciones hidrodinámicas: leyes de conservación

Como ya adelantamos antes, en esta sección trataremos ejemplos de modelos de transporte cuya descripción física parta de una escala macroscópica, esto es, no miraremos *de cerca* la dinámica de cada una de las partículas que componen el fenómeno estudiado, sino que lo observaremos *de lejos*, en conjunto, como si fuese un fluido o un medio continuo. Los ejemplos que vamos a presentar se pueden englobar bajo el concepto de **leyes de conservación**, que agrupa diversas ecuaciones que surgen originalmente de principios de conservación físicos (la masa, el momento, la

¹“Que se mueve”, derivado del griego κίνητος (*kinētós*): móvil.

energía...) aunque hoy día se ha extendido su uso a otros problemas propios de la biología o el tráfico de vehículos.

1.1. Conservación de la masa. Comenzamos con el principio de conservación de la masa en un problema unidimensional de dinámica de gases. Partimos de un gas contenido en un tubo y consideraremos que tanto su densidad como su velocidad son constantes a través de cada sección A del tubo; así logramos eliminar dos de las tres dimensiones y obtenemos el modelo unidimensional.

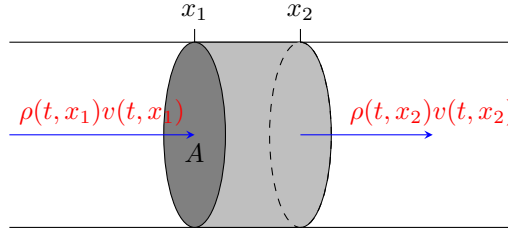


FIGURA 1. Flujo ρv , de un gas en un tubo.

Sea entonces x la posición a lo largo del tubo y llamemos $\rho(t, x)$ y $v(t, x)$ respectivamente a la densidad y velocidad del gas en el punto x y en el instante de tiempo t . La densidad nos permite calcular la masa de gas contenida en una sección del tubo delimitada por dos puntos $x_1 < x_2$, en cada instante de tiempo t , mediante un cálculo simple,

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(t, x) dx,$$

mientras que el producto $\rho(t, x)v(t, x)$ proporciona el *flujo de gas* que pasa a través de un punto x en el instante t . Si se supone que las paredes del tubo son impermeables (el gas ni se crea ni se destruye) entonces el posible *cambio* (la derivada) en la cantidad de masa en esta sección de tubo únicamente vendrá dada por el gas que entra o sale por los extremos de la sección, x_1 y x_2 . Juntando todo lo anterior, el balance de masa en la sección vendrá dado por

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(t, x) dx = \overbrace{\rho(t, x_1)v(t, x_1)}^{\text{gas entrando por } x_1} + \overbrace{-\rho(t, x_2)v(t, x_2)}^{\text{gas saliendo por } x_2}.$$

Esta es la denominada forma integral de la ley de conservación de la masa, en dimensión 1. Si reescribimos el término de la derecha como sigue

$$\rho(t, x_1)v(t, x_1) - \rho(t, x_2)v(t, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (v\rho)(t, x) dx,$$

e integramos en un intervalo de tiempo (t_1, t_2) , obtenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v)(t, x) \right) dx dt = 0.$$

Como esta expresión es válida para cualesquiera intervalos (t_1, t_2) y (x_1, x_2) , se deduce que el integrando ha de ser nulo, esto es,

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v)(t, x) = 0$$

que es propiamente la ecuación diferencial conocida como **ley de conservación de la masa** del problema considerado.

Esta y otras leyes de conservación se pueden aplicar en una gran cantidad de magnitudes, no sólo a la masa y, por supuesto, en dimensiones superiores a 1. En particular en la Sección 1 del Capítulo 5 se generaliza la deducción anterior a dimensión superior. A partir de lo descrito, tal vez sea más fácil entender el concepto general de ley de conservación, que no es más que una ecuación del tipo

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial t} d(t, x) + \operatorname{div}_x(\vec{j}(t, x)) = s(t, x),$$

siendo $d(t, x)$ la densidad de la magnitud estudiada en el lugar x y en el instante de tiempo t , $\vec{j}(t, x)$ el flujo (vectorial) en cada punto de esa magnitud y que aparece en la *parte conservativa de la ecuación*, y $s(t, x)$ una eventual fuente de esa magnitud, que aparecerá cuando haya creación/destrucción de tal magnitud, en caso de producirse, y que representa la *parte no conservativa de la ecuación*.

1.1.1. Ecuación de advección. Un caso especialmente sencillo y en el que se pueden hacer cálculos explícitos es el de la ecuación de advección:

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) + a \frac{\partial}{\partial x} \rho(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R},$$

que se obtiene a partir de (1) cuando la velocidad es constante ($v(t, x) = a$). Como veremos en la Proposición 1, esta ecuación se resuelve explícitamente como

$$\rho(t, x) = \rho_0(x - at),$$

siendo $\rho(0, t) = \rho_0(x)$ la condición inicial que se supone conocida.

Veamos otros ejemplos de leyes de conservación que surgen en ambientes tan aparentemente distintos como son las dinámicas de fluidos, el tráfico de vehículos o las poblaciones.

1.2. Ecuaciones de Euler para gases no viscosos. Si en el problema anterior aplicamos, además, la conservación del momento lineal y de la energía del sistema, podemos llegar al siguiente sistema de ecuaciones de Euler (que presentaremos y estudiaremos más extensamente en el Capítulo 5):

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}_x(\rho v) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \operatorname{Div}_x(\rho v \otimes v) + \nabla p &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \operatorname{div}_x(\rho E v + p v) &= 0, \end{aligned}$$

donde ρ y v son de nuevo la densidad de masa y velocidad del sistema, $E = e + v^2/2$ es la densidad de energía por unidad de masa siendo e la energía interna, y finalmente p representa la presión; todas ellas dependientes de la posición x y el instante de tiempo t . El sistema ha de *cerrarse* (nótese que tenemos seis incógnitas: ρ , $v = (v_1, v_2, v_3)$, e y p , y sólo cinco ecuaciones) por ejemplo con una *relación constitutiva* de la forma $p = p(\rho, e)$, dando la presión en función de la densidad y de la energía interna. La forma particular de p depende del gas en consideración. Véase por ejemplo [16] para una lectura profunda sobre este y otros modelos semejantes.

1.3. Flujos de tráfico. Si se considera que un conjunto de vehículos viajan a lo largo de una misma autopista, se puede describir la densidad de coches en un instante t y en un punto x de la autopista mediante una función de densidades $\rho = \rho(t, x)$ (por ejemplo número de coches por cada 100 metros, ver figura 2). En este caso el modelo de Lighthill-Whitham [34, 49] describe la evolución de ρ mediante la ley de conservación

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v(\rho))(t, x) = 0$$

donde $v = v(t, x; \rho)$ es una función decreciente que determina como varía la velocidad de los coches con la densidad. Nótese el parecido con (1), siendo la principal diferencia el hecho que la velocidad dependa de la densidad, lo que hace que este modelo sea no lineal.



FIGURA 2. Imagen aérea de tráfico.

En [42] se propone una propuesta para la función velocidad dando lugar al conocido como modelo de Lighthill-Whitham-Richards. En este caso se asume que la velocidad de cada coche individual depende del espacio entre vehículos que hay a su alrededor. Más concretamente asume una dependencia lineal

$$v = v(\rho) = V_{max} \left(1 - \frac{\rho(t, x)}{\rho_{max}} \right)$$

donde V_{max} y ρ_{max} son respectivamente la velocidad y densidad máxima admitidas por la vía.

1.4. Ecuación de Burgers. En esta misma línea, uno de los ejemplos más simples, aunque no por ello exento de complejidad y que estudiaremos más en profundidad en el Capítulo 3, consiste en considerar el caso particular de velocidad dependiente de ρ en la forma $v(\rho) = \rho(t, x)/2$. La ecuación obtenida se conoce como ecuación de Burgers:

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \rho^2(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}.$$

En este caso, puesto que es no lineal, las cuestiones de existencia de solución requerirán un refinamiento del concepto de solución: la solución en sentido débil, ya que las soluciones clásicas, como veremos, pueden desarrollar de forma espontánea saltos o discontinuidades. Con este modelo ilustraremos muchos de los contenidos de este curso.

1.5. Ecuación Renewal o de Von Foerster. El siguiente ejemplo surge en el modelado de poblaciones donde es determinante la distribución por edad. Para describir como se distribuyen de los miembros de una población por edades consideramos $N(t, a)$ que nos indica el número de miembros con edad menor o igual a a en el instante de tiempo t donde a y t toman valores positivos. Entonces, el ratio de individuos que, en el instante de tiempo t , tiene edad a viene descrito por

$$n(t, a) = \frac{\partial N}{\partial a}(t, a).$$

En especies como la humana, los ratios de nacimientos y fallecimientos evidentemente dependen de la edad, por lo que estos han de venir descritos mediante funciones $b(a)$ y $\mu(a)$ dependientes de a . De esta forma el ratio de individuos muertos con edades comprendidas entre dos valores $a_1 < a_2$ por unidad de tiempo viene descrito por

$$\int_{a_1}^{a_2} \mu(a)n(t, a)da,$$

mientras que el ratio de individuos recién nacidos por unidad de tiempo es

$$n(t, 0) = \int_0^{\infty} b(a)n(t, a)da.$$

En este caso, la ley de conservación reza que: la variación de la población con edades comprendidas entre a_1 y a_2 , por unidad de tiempo, se ve incrementada por la ratio de individuos con edad a_1 (los que *entran* en ese rango) y disminuida tanto por la ratio de individuos con edad a_2 (los que *salen* de ese rango) como por la ratio de individuos que mueren, esto es:

$$\frac{d}{dt} \int_{a_1}^{a_2} n(t, a)da = n(t, a_1) - n(t, a_2) - \int_{a_1}^{a_2} \mu(a)n(t, a)da.$$

Razonando como en la sección 1.1, se deduce la siguiente ecuación de transporte

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t} n(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} n(t, a) = -\mu(a)n(t, a) \quad t > 0, \quad a > 0.$$

Notamos que, en este caso, la variable a no está en \mathbb{R} sino en $(0, \infty)$, por lo que hay que añadir una *condición de contorno* en $a = 0$; por suerte, el ratio de individuos recién nacidos por unidad de tiempo nos la proporciona de forma inmediata:

$$n(t, 0) = \int_0^{\infty} b(a)n(t, a)da.$$

Véase [26, 33, 37] para profundizar en la deducción y análisis de esta ecuación.

2. Ecuaciones cinéticas

La teoría cinética constituye el marco para modelar el comportamiento de un gas, esto es, una colección de partículas mediante su espacio de fases (tiempo, espacio, velocidad,...). Hacemos notar que por *colección de partículas* podemos entender tanto el aire encerrado en una habitación (del orden de 10^{24} moléculas, pensando en el número de Avogadro), como las estrellas que constituyen una galaxia (10^{12} estrellas como en el caso de la galaxia Andrómeda, ver Fig. 3) o los electrones que se mueven en un dispositivo conductor (plasma). La primera ecuación básica a estudiar en estos contextos es la ecuación de Liouville.



FIGURA 3. Imagen de la galaxia Andrómeda. Fuente Wikipedia

2.1. Ecuación de Liouville. Este es el primer ejemplo de ecuación de transporte que vamos a presentar pues, además de lo descrito, contiene casi todos los ingredientes que analizaremos posteriormente de forma genérica. Como adelantábamos, queremos modelar la dinámica de un conjunto de N partículas (piénsese que N es un número *muy grande*) a partir de las leyes de la física que la rige. En el caso de electrones o átomos (partículas con carga eléctrica) su movimiento estará regido por la electrodinámica clásica (si se consideran como partículas clásicas) mientras que en el caso de las estrellas que constituyen una galaxia o moléculas (partículas con masa), serán las leyes clásicas quienes determinen el movimiento (leyes de Newton). Por simplificar, nos centraremos en el segundo caso.

En general, la dinámica de un conjunto de N masas puntuales con masa m se puede determinar a partir de la segunda Ley de Newton: la famosa “fuerza = masa \times aceleración”. Si decimos que $x_i(t)$ y $v_i(t)$ son respectivamente la posición y velocidad en el instante t , con $i = 1, \dots, N$, obtendremos la siguiente descripción *microscópica*:

$$(7) \quad \begin{cases} x'_i(t) = v_i(t) : & \text{velocidad} = \text{derivada del espacio respecto al tiempo,} \\ m v'_i(t) = F_i : & \text{fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración,} \end{cases}$$

siendo F_i la fuerza que actúa sobre la partícula i -ésima. Esta fuerza puede depender de muchos factores (del tiempo, de las posiciones de todas las demás partículas o sólo de algunas, de sus velocidades,...) y cada caso determinará un modelo diferente. En nuestra primera aproximación, la ecuación de Liouville, supondremos que esta fuerza sólo depende del lugar en que se encuentra la partícula (piénsese, por ejemplo, en un campo gravitatorio), esto es: $F_i = F(x_i(t))$.

La cuestión clave es que N es muy grande, lo que supone que el sistema (7) sea inmanejable (¡por no hablar del problema que supondría describir las $2N$ condiciones iniciales!); sin embargo, este mismo hecho es el que permite adoptar una *descripción estadística* del sistema. Esto consiste en considerar que la distribución de las partículas, en lugar de venir dada de forma *determinista* por las posiciones y

velocidades *exactas* de las partículas, venga dada por una *función de distribución* $f(t, x, v)$ de manera que el número de partículas que se encuentren en cada recinto $\Omega_x \subset \mathbb{R}^3$ y cuya velocidad esté contenida en $\Omega_v \subset \mathbb{R}^3$ en un instante de tiempo t vendrá dado por la cantidad

$$\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} f(t, x, v) dx dv,$$

y así, el número total de partículas vendrá dado por

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dx dv = N.$$

También es habitual interpretar $f(t, x, v)$ como la probabilidad de encontrar una partícula en el instante t , en la posición x y con velocidad v , por lo que, evidentemente, esta función f toma valores no negativos. Con estos elementos vamos a tratar de deducir intuitivamente **qué ecuación debería cumplir** $f(t, x, v)$. Si, como acabamos de comentar, $f(t, x, v)$ debe medir la probabilidad de encontrar partículas en el estado (t, x, v) , en el caso de conocer exactamente sus posiciones y velocidades, $x_i(t)$ y $v_i(t)$ dadas por (7), nuestra probabilidad f debería ser 1 sobre los puntos donde haya partículas, esto es, de la forma $(t, x_i(t), v_i(t))$ y cero en el resto y, en particular, $f(t, x_i(t), v_i(t))$ sería constante para cada trayectoria $(x_i(t), v_i(t))$. Bien, como no tenemos esta exactitud, lo razonable entonces parece ser que esta probabilidad, aunque no sea 1, sí se mantenga constante cuando nos movamos por estas trayectorias teóricas, esto es:

$$\frac{d}{dt} \left(f(t, x_i(t), v_i(t)) \right) = 0, \text{ para cada } i = 1, \dots, N.$$

El desarrollo de esta derivada (nótese la formalidad, pues lo anterior es intuitivo y nadie ha dicho que f sea derivable) nos daría, usando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, x_i(t), v_i(t)) + x'_i(t) \cdot \nabla_x f(t, x_i(t), v_i(t)) + v'_i(t) \cdot \nabla_v f(t, x_i(t), v_i(t)) \\ &\stackrel{(7)}{=} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x_i(t), v_i(t)) + v_i(t) \cdot \nabla_x f(t, x_i(t), v_i(t)) + \frac{F(x_i(t))}{m} \cdot \nabla_v f(t, x_i(t), v_i(t)) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \frac{F(x)}{m} \cdot \nabla_v f \right) \Big|_{(t,x,v)=(t,x_i(t),v_i(t))}. \end{aligned}$$

Ahora, el hecho de que N sea grande, se convierte en una *ventaja*, pues esta ecuación se cumpliría solo sobre los puntos barridos por alguna de las trayectorias, pero al ser muchos, podemos considerar que lo hace en todo punto, deduciendo finalmente la **ecuación de Liouville**:

$$(8) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{F(x)}{m} \cdot \nabla_v f = 0.$$

Hay que decir que pese a la formalidad de la deducción (que incluso se podría decir que esta mal) la ecuación deducida sí es correcta. Mostrarlo de forma rigurosa requiere más herramientas matemáticas de las que debemos usar en esta motivación, por lo que lo haremos en el Capítulo 4.

La idea básica del enfoque estadístico es simple: si el conocimiento exacto de las posiciones y velocidades de las partículas nos lleva a una distribución que cumple (8), cuando la distribución estadística $f(t, x, v)$ sea solo aproximada, lo más sensato será obligarla a que cumpla esta misma Ley, es decir, a que verifique la ecuación de Liouville (8).

2.1.1. Normalización y densidad de masa. Usualmente, bien se considera la masa $m = 1$ o bien se reescala esta función $f \mapsto mf$ de manera que su integral represente la masa total del sistema $M := mN$, que es el observable físico básico. Así, también es usual llamar a f *función de distribución de masas* y definir la función de densidad (de masas) del sistema como

$$\rho(t, x) := \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv,$$

que, notemos, constituye un objeto macroscópico.

2.1.2. Transporte libre. En el caso particular de partículas no sujetas a fuerza alguna, esto es $F \equiv 0$, obtenemos una ecuación simplificada que representa (como no podía ser de otro modo según la primera Ley de Newton) el movimiento rectilíneo uniforme o transporte libre, determinado únicamente por la condición inicial:

$$(9) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = 0 \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3.$$

Pero además de este caso particular tan trivial, existen numerosos modelos cinéticos que tienen como base la ecuación de Liouville, bien concretando el campo F de fuerzas, bien añadiendo otros efectos sobre las partículas como choques o *ruído*. Veamos por encima algunos de ellos.

2.2. Modelo coulombiano de Vlasov-Poisson. Un caso habitual es aquel en el que la fuerza proviene del efecto gravitacional (o electrostático) que unas partículas ejercen sobre otras. Estas fuerzas de tipo coulombiano se caracterizan por ser inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia separa las partículas, como es el caso de las galaxias o los plasmas (y proporcionales al producto de sus masas o cargas que, recordemos, hemos normalizado a 1). En este caso, la descripción vectorial de la fuerza que recibe una partícula en la posición x_i de otra que se encuentra en la posición x_j adopta la siguiente expresión *conservativa*:

$$F_{i,j} = -C \frac{1}{|x_i - x_j|^2} \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} = -\nabla V_j(x_i)$$

donde $|\cdot|$ denota la norma vectorial euclídea, C es una constante que depende sólo de la naturaleza de la fuerza (positiva si las fuerzas son atractivas y negativa para fuerzas repulsivas), y V_j es la función *potencial* dada por

$$(10) \quad V_j = -C/|x - x_j|.$$

Por el principio de superposición, admitido por lo general en estos ambientes, se tendría que la fuerza total columbiana ejercida sobre la partícula i es

$$F_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} \nabla V_j(x_i).$$

No sin esfuerzo, pasando al modelo estadístico, podemos obtener un sistema acoplado en el que, además de Liouville (que en este caso también recibe el nombre de ecuación de Vlasov), aparece una segunda ecuación que proporciona el campo de fuerzas a partir de la propia distribución de masas ρ ; es el denominado *sistema de Vlasov-Poisson*:

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_v f = 0, \\ \Delta_x V = 4\pi\gamma\rho, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(t, x) = 0. \end{cases}$$

Concretamente, la segunda ecuación es la llamada *ecuación de Poisson* y proporciona, a partir de la densidad de partículas ρ , el potencial V cuyo gradiente (cambiado de signo) será la fuerza. El potencial V así construido es una *aproximación de campo medio*, y proviene directamente del principio de superposición antes mencionado. La constante γ es simplemente un signo que toma el valor 1 si las fuerzas son atractivas y -1 si son repulsivas. En [8] se puede ver una deducción del modelo de Vlasov-Poisson (bajo la nomenclatura de *collisionless Boltzmann equation*) en el ambiente gravitacional, mientras que en [27] se pueden encontrar modelos similares para plasmas sin colisiones.

2.3. Ecuación de Boltzmann. Otro modelo relevante con grandes repercusiones tanto físicas como matemáticas (que puede ser consultado por ejemplo en como [15, 19, 48, 46]) en la ecuación de Boltzmann. Este describe, en mecánica estadística del no equilibrio, el comportamiento promedio de un fluido fuera del equilibrio compuesto por partículas que, además de estar sometidas a un campo de fuerzas F pueden chocar entre sí de dos en dos. Una descripción análoga (no necesariamente trivial) a la realizada que se ha hecho para Liouville, permite llegar a que la función de distribución ha de verificar la denominada *ecuación de Boltzmann*,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F(t, x) \cdot \nabla_v f = B(f, f), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{R}^3,$$

donde F representa de nuevo el campo de fuerzas que actúa sobre las partículas y $B(f, f)$ es el *término de colisiones* de Boltzmann, que cuantifica el efecto sobre la dinámica de las colisiones binarias entre las partículas. Por lo tanto, la deducción de este término requiere una descripción más detallada del modo en que las partículas chocan entre sí y que no es el objetivo de estas notas.

2.4. Teoría cinética de partículas activas. Al modelar sistemas de partículas que, además de estar sometidos a las leyes de la mecánica, constituyen un sistema biológico (crecimiento de tejidos, proliferación/destrucción, enjambres, aglomeraciones, morfogénesis, pandemias, mutaciones,...), se hace necesario introducir en las descripciones cinéticas microscópicas elementos que reflejen tanto la complejidad debida al carácter *vivo* de estas partículas como las interacciones entre ellas, normalmente no lineales, que se desprenden de esta dimensión adicional. Algunos de estos elementos son la heterogeneidad intrínseca de estos sistemas vivos, el hecho que su “estado” es mecánico pero también biológico y las decisiones que toma cada individuo no están sujetas (solo) a leyes físicas, por lo que sus interacciones afectan a la biología y viceversa, en particular producen fenómenos de creación/destrucción, haciendo además que sus propiedades biológicas evolucionen en tiempo.

La reciente teoría cinética de las partículas activas (KTAP), propone un marco cinético que permite en cierta medida reflejar estos fenómenos. De forma muy simplificada, la función de distribución f incorpora una nueva variable $u \in \mathbb{R}^m$ denominada *actividad*, es decir $f = f(t, x, v; u)$, que añade una variable biológica al estado microscópico mecánico (t, x, v) que ya conocemos; esto permite, mediante términos de tipo Liouville y Boltzmann actuando sobre la variable u , describir multitud de interacciones biológicas que se añaden a la dinámica mecánica usual.

De forma más o menos genérica, este modelo se puede leer como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_u(Hf) = G_u(f, f) \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}^m$$

donde $H(t, x, v, u)$ refleja los cambios continuos en el microestado u mientras que el término $G_u(f, f)$ de *tipo Boltzmann*, modela los cambios puntuales o saltos en el microestado. Se pueden encontrar diversos ejemplos en [4] y un amplio resumen en [7] y las referencias contenidas. También se puede consultar en [17], una revisión sobre la gran variedad modelos cinéticos originados en sistemas biológicos existentes en la literatura.

3. Otros modelos de transporte

A continuación vamos a enumerar de forma muy somera algunos modelos en derivadas parciales que encajan en el marco de ecuación de transporte o, al menos, contienen una parte de transporte en su estructura. El objetivo es proporcionar un amplio abanico de modelos para que los estudiantes puedan desarrollar las ideas aprendidas en estas notas a través de algunos de ellos. El orden en que aparecen es absolutamente arbitrario.

El sistema de Vlasov-Maxwell, cuya descripción y análisis en el caso de dominios acotados puede ser encontrada en [22], guarda un relativo parecido con el de Vlasov-Poisson descrito en la sección 2.2, en el sentido que el campo lo producen las propias partículas a través, en este caso, de las ecuaciones de Maxwell, pero tiene otras particularidades, como un campo dependiente de la velocidad.

El modelo de Wigner representa un modelo cuántico de transporte que es equivalente a la paradigmática ecuación de Schrödinger de la física cuántica; se podría decir que es una ecuación de Liouville (8), pero con un campo de fuerza *un poco especial* que hace que la función de distribución pueda tomar valores negativos (aunque, por supuesto, la densidad de masas asociada siga siendo no negativa). Un buen comienzo para tratar esta ecuación puede ser [20].

Otro modelo que podemos considerar tiene su origen en la ecuación de coagulación-fragmentación de Smoluchowski, que es un modelo más parecido al de Boltzmann antes presentado (pues incluye términos integrales) y homogéneo. En este caso las variables son tiempo y tamaño/masa de las partículas. Al introducir el espacio como variable, aparecen algunos modelos cinéticos de difusión y otros de transporte que podemos encontrar por ejemplo en [6].

El transporte de neutrones es otro ejemplo interesante de ecuación cinética de transporte para poder incluir en esta sección. Quizás la particularidad matemática más reseñable es el hecho de que la celeridad (el módulo de la velocidad) es constante o, a lo sumo, comprendido entre dos valores finitos (véase [32, §4]).

También en teoría de semiconductores es posible encontrar modelos de transporte que incluyen una pérdida de energía por difusión en velocidad, que se pueden trabajar en este curso, como por ejemplo el modelo de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck estudiado en [38], aunque en estos casos predominan los efectos parabólicos regularizantes del término de Fokker-Planck sobre los hiperbólicos de transporte, y su tratamiento se aleja un poco de lo pretendido en estas notas.

Podemos encontrar un *extraño* modelo de transporte (también con difusión) en el modelado del proceso de separación de las hebras de la doble hélice de la molécula de ADN en el trabajo [13], donde los roles de posición y velocidad son *suplantados* por otras variables menos intuitivas como la función de partición y la energía libre.

También en el modelado de bandadas de pájaros o bancos de peces es posible encontrar interesantes modelos de transporte; referimos por ejemplo el modelo de Cucker-Smale cuya formulación cinética puede ser encontrada por ejemplo en [23].

Finalmente, al igual que hemos deducido la ecuación de Liouville, a partir del modelo de Kuramoto para osciladores acoplados es posible derivar una ecuación de transporte cuando el número de osciladores es muy elevado, cuya deducción rigurosa y estudio puede ser encontrado en un reciente trabajo [35].

La ecuación de transporte lineal

1. Formulación general de una ecuación de transporte

Observemos que todos los modelos anteriores responden a la siguiente formulación genérica

$$(11) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^N a_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) + a_0(t, x) u(t, x) = f(t, x),$$

que es la estructura general que denominaremos *ecuación de transporte*, donde las funciones a_0 , $a = (a_1, \dots, a_N)$ y f eventualmente pueden depender de $t \in [0, T]$ y de $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, ¡e incluso de la propia u ! Esta formulación básica se ha de completar con condiciones iniciales, y dependiendo del dominio de la variable x , con condiciones de frontera, como en el caso de la ecuación Renewal (6). A su vez, esta ecuación puede estar acoplada con otras como ocurre en los modelos de Vlasov-Poisson o de Euler. Por lo tanto, pese a la generalidad de la estructura, podemos observar una gran variedad según condiciones extra exigidas.

Pese a que estas condiciones extra (condiciones de frontera, acoplamiento con otras ecuaciones, no linealidades,...) se han de tratar en cada caso concreto, por lo general debemos distinguir siempre entre ecuaciones **lineales** y **no lineales**, ya que el comportamiento de las soluciones es totalmente distinto y, por lo tanto, su tratamiento matemático también. Recordemos que una ecuación es lineal cuando cualquier combinación convexa de soluciones vuelve a ser una solución y, en el caso que nos ocupa, esto se verifica siempre que las funciones a_0 , a y f sean independientes de u . Precisamente este es el objeto de estudio de este segundo tema: buen planteamiento (existencia, unicidad y regularidad de soluciones) del problema de valores iniciales asociado a la ecuación de transporte lineal.

Forma conservativa y forma no conservativa. Comenzamos modificando sutilmente la ecuación (11) para que tenga un aspecto *conservativo*; así, por **ecuación de transporte lineal en forma conservativa** entenderemos la siguiente **ecuación hiperbólica lineal de primer orden**:

$$(12) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}_x(u a) + \tilde{a}_0 u = f,$$

donde, como ya comentamos, los coeficientes a_i y f no dependen de u , aunque sí lo pueden hacer de $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^N$. Se dice que esta ecuación está escrita en *forma conservativa* debido a que las derivadas espaciales están escritas en forma de divergencia, mientras que (11) está escrita en **forma no conservativa**. En

realidad, ambas expresiones son equivalentes, pues basta realizar el cambio

$$\tilde{a}_0 \rightarrow a_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = a_0 + \operatorname{div}_x(a),$$

para pasar (siempre realizando los cálculos *formalmente*) de una a otra. Las ecuaciones anteriores se han de complementar con una condición inicial apropiada

$$(13) \quad u(0, x) = u_0(x).$$

Es posible considerar un intervalo temporal cualquiera $[t_0, T]$, aunque en estas notas se opta por tomar la condición inicial en $t = 0$ por simplicidad.

Como observaremos a lo largo de estas notas, en el caso de la ecuación lineal, nuestra respuesta al buen planteamiento de estos problemas será proporcional a la “calidad” de los datos que los definen, es decir, los coeficientes a_0 , a y f que determinan la ecuación y la condición inicial u_0 . Este mismo patrón no se va a respetar necesariamente en el caso no lineal, como veremos en capítulos posteriores.

El problema aquí planteado puede parecer un mero tecnicismo matemático sin repercusión alguna más allá de estas aulas. Sin embargo, hay que señalar que dependiendo de su naturaleza las soluciones de este tipo de ecuaciones describen fenómenos físicos observables. Es decir, el mismo modelo matemático (la misma ecuación) representará la fenomenología que lo ha motivado dependiendo del tipo de soluciones que busquemos. Es aquí donde el análisis matemático se cruza en el camino del modelado a través de la siguiente cuestión: si un modelo matemático no representa algunos fenómenos que lo motivan, ¿esto implica que haya necesariamente que cambiar el modelo? La respuesta que pretendemos transmitir es que tal vez haya que profundizar en el análisis que se ha hecho de dicho modelo.

El alumno que comienza este curso por lo general ha estudiado ecuaciones diferenciales en sus diversas versiones: ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales, problemas de valores iniciales o de frontera, etc... Sin embargo, y como no puede ser de otra forma, en estos cursos se estudian técnicas de cálculo y análisis de soluciones clásicas, es decir, soluciones con la regularidad necesaria que les permita verificar las ecuaciones punto a punto. Uno de los objetivos de estas notas es mostrar que existen otros conceptos más débiles de solución de una ecuación diferencial y, sobre todo, que en problemas concretos es imprescindible emplear estas versiones debilitadas respecto de la teoría clásica.

Nuestro análisis comenzará con el estudio de la existencia y unicidad de soluciones clásicas de los problemas de valores iniciales (12)-(13) y (11)-(13) para, inmediatamente después, presentar la teoría débil.

2. Existencia y unicidad: teoría clásica

El objeto de esta sección es determinar bajo qué hipótesis, tanto sobre los coeficientes de la ecuación como sobre la condición inicial, podremos asegurar la existencia y unicidad de solución clásica de la ecuación lineal de transporte.

Antes de avanzar en nuestro estudio hagamos un breve recorrido por la notación usual y resultados básicos que emplearemos. Por **definición**, diremos que una función $u(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es una **solución clásica** del problema de Cauchy conservativo (12)-(13) (resp. del no conservativo (11)-(13)) si satisface

$$u \in C([0, T] \times \mathbb{R}^N) \cap C^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$$

y verifica dichas ecuaciones punto a punto.

Tal vez la peculiaridad más interesante de las ecuaciones de transporte es que, aunque se trata de **ecuaciones en derivadas parciales**, su resolución va a ser equivalente a la de una **ecuación diferencial ordinaria**. Este hecho no debe de sorprendernos mucho si recordamos nuestro primer ejemplo cinético, donde las ecuaciones ordinarias (7) eran equivalentes al modelo de transporte (8) que obtuvimos después. Por lo tanto, emplearemos resultados clásicos de ecuaciones diferenciales ordinarias, como el teorema de Picard-Lindelöf, (véase Teorema 43 en el Apéndice A) que nos asegura la existencia y unicidad de solución de problemas de Cauchy (también llamados problemas de valores iniciales, o PVI) asociados a una ecuación diferencial ordinaria.

Por último, nuestra ecuación ordinaria va a ser (en principio) lineal, por lo que nos será útil la **fórmula de variación de las constantes** (véase Teorema 45 en el Apéndice A) que nos permitirá escribir explícitamente nuestras soluciones de transporte.

2.1. Curvas características. Como acabamos de adelantar, toda ecuación de transporte está vinculada a una ecuación diferencial ordinaria, la que da nombre a esta sección. Aunque es la misma ecuación tanto para el caso conservativo como para el no conservativo (pues viene determinada por el *término de transporte*), para comenzar establecemos este vínculo desde el modelo de transporte más simple: el **transporte puro** (que no es más que la ecuación de transporte lineal en forma no conservativa y homogénea, o sea (11) con $a_0 = f = 0$):

$$(14) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \cdot \nabla_x u = 0, \quad u(0, x) = u_0(x),$$

donde suponemos que el campo $a(t, x) = (a_1(t, x), \dots, a_N(t, x))$ está definido como

$$a : [0, T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad \text{para cierto } T > 0,$$

que es continuo y con derivadas respecto a x acotadas, esto es: $a \in \mathcal{C}(0, T, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^N))^N$.

Para comenzar, vamos a suponer que la solución $u(t, x)$ de (14) existe, y que es suficientemente regular. A continuación nos vamos a plantear la siguiente cuestión: ¿existirán alguna curva $X(t)$ en \mathbb{R}^N , tal que dicha solución sea constante a lo largo de esa curva, es decir, tal que $u(t, X(t))$ sea una función constante en la variable temporal? Obsérvese que, en caso de existir, estas curvas deberían verificar:

$$(15) \quad 0 = \frac{d}{dt} [u(t, X(t))] = \frac{\partial u}{\partial t}(t, X(t)) + X'(t) \cdot \nabla_x u(t, X(t)).$$

Comparando la ecuación (14) con la condición (15), deducimos que una tal curva debería verificar:

$$X'(t) = a(t, X(t)).$$

Esto motiva la siguiente definición: llamamos **sistema característico** o **ecuación de las curvas características asociada al campo de transporte a** al PVI (vectorial) siguiente:

$$(16) \quad \begin{cases} X'(t) = a(t, X(t)), & t \in (0, T), \\ X(s) = x, & (s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N \text{ fijo,} \end{cases}$$

o simplemente a la ecuación ordinaria sin condiciones iniciales. Nuestro primer paso es constatar que existen soluciones del PVI (16) lo que es aplicación directa del Teorema de Picard-Lindelöf, pues dado que $a \in \mathcal{C}(0, T, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^N))^N$ (por lo que

es globalmente lipschitziana) entonces, para cada condición inicial $x(s) = x$, existe una única solución del sistema característico (16) que notaremos $X(t; s, x)$ definida para todo $t \in [0, T]$. Esta notación pone de relieve la dependencia de X respecto de los parámetros s y x que determinan sus condiciones iniciales y proporciona una “fórmula” que, aunque trivial, nos ayudará en lo que sigue:

$$X(s; s, x) = x, \quad \forall s \in [0, T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Cuando las ecuaciones (16) se puedan resolver explícitamente se puede observar dicha dependencia, como por ejemplo las curvas características de la ecuación de advección (3) correspondientes a un campo $a(t, x) \equiv a$ constante, donde:

$$X(t; s, x) = x + a(t - s),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $s \in [0, T]$, o las de la ecuación de transporte libre (9),

$$(17) \quad X(t; s, (x, v)) = (x + v(t - s), v),$$

donde $x, v \in \mathbb{R}^3$ y $s \in [0, T]$. En este último caso observamos que las características describen el movimiento rectilíneo y uniforme propio de cualquier partícula no sujeta a fuerzas. No obstante, observemos que la condición sobre a es una condición suficiente, aunque no necesaria, como se puede ver en algunos ejercicios propuestos.

Aunque en principio no parece importante, la unicidad de las curvas características jugará un papel muy relevante en nuestro análisis. En particular, implica que dos características distintas no se pueden cruzar o, dicho a la inversa, en el caso en que dos características $X(t; s_1, x_1)$ y $X(t; s_2, x_2)$ tuviesen un punto en común, es decir, $X(t^*; s_1, x_1) = X(t^*; s_2, x_2)$ para algún $t^* \in [0, T]$, entonces la unicidad implica que ambas curvas han de ser iguales, esto es $X(t; s_1, x_1) = X(t; s_2, x_2)$ para todo $t \in [0, T]$.

Jugando con este argumento, vamos a deducir a continuación la **fórmula de la “traslación característica”**. Para ello, simplemente fijamos un punto del espacio

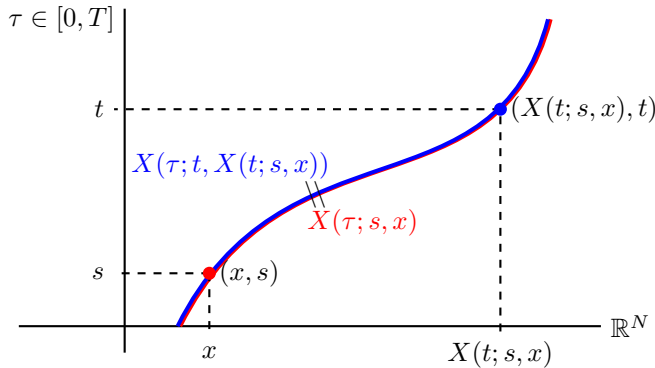


FIGURA 1. Fórmula de la traslación característica a partir de la unicidad.

$x \in \mathbb{R}^N$ y dos instantes $t, s \in [0, T]$, y a partir de la unicidad de solución de la ecuación (16) obtenemos (véase Figura 1) que la curva azul $X(\tau; t, X(t; s, x))$ es la (única) solución (en la variable τ) que en el instante t toma el valor $X(t; s, x)$, y como justamente la curva roja $X(\tau; s, x)$ es “otra” solución que toma el mismo valor en el mismo instante, han de ser iguales, esto es:

$$(18) \quad X(\tau; t, X(t; s, x)) = X(\tau; s, x), \quad \forall t, \tau, s \in [0, T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

En particular, tomando $\tau = s$, obtendremos,

$$(19) \quad X(s; t, X(t; s, x)) = X(s; s, x) = x \quad \forall t, s \in [0, T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

La fórmula (19) tiene una interesante interpretación gráfica. Si pensamos que los dos instantes de tiempo t y $s \in [0, T]$ están fijos, y lo que movemos es el punto $x \in \mathbb{R}^N$, podemos interpretar el nuevo punto $X(t; s, x) \in \mathbb{R}^N$ como la posición que tendrá en el instante t el punto que en el instante s estaba en la posición x , esto es, **el transporte del punto x mediante el campo a desde el instante s al instante t** . Vamos a definir en la Figura 2 una “nueva” aplicación para visualizarlo mejor: Ahora la igualdad (19) se reescribe como $F_{t \rightarrow s}(F_{s \rightarrow t}(x)) = x$, es decir,

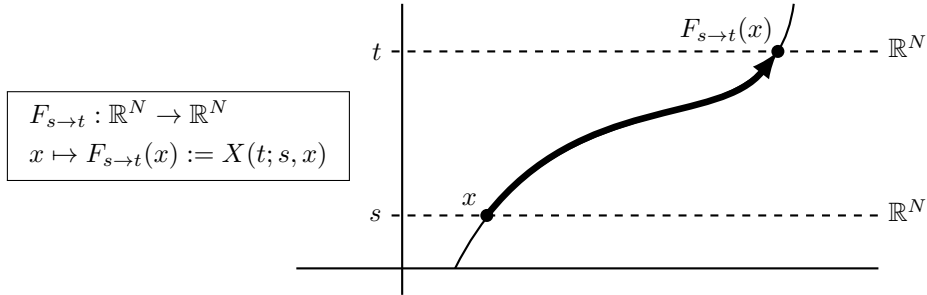


FIGURA 2. Transporte característico visto como biyección sobre \mathbb{R}^N .

que la aplicación $F_{s \rightarrow t}$ es una biyección en \mathbb{R}^N y su inversa es $F_{s \rightarrow t}^{-1} = F_{t \rightarrow s}$. Como consecuencia también se deduce que la regularidad de X respecto a s es exactamente la misma que con respecto a t . Estas biyecciones constituyen lo que se denomina el transporte a lo largo de las características.

Recordemos que estamos buscando una solución u de la ecuación de transporte puro (14) tal que $u(t, X(t))$ cumpla (15), es decir, que sea una función constante en tiempo, lo que nos ha llevado a la búsqueda de las curvas características (16). Por lo tanto, una vez encontradas estas características, podemos afirmar que una tal solución verifica

$$u(t, X(t; 0, y)) = u(0, X(0; 0, y)) = u(0, y) = u_0(y), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall y \in \mathbb{R}^N,$$

para toda solución de (16), lo que se suele interpretar como que **la condición inicial es transportada a lo largo de las características**. Ahora bien, establecida la biyección anterior, podemos invertir esta fórmula como sigue

$$x = F_{0 \rightarrow t}(y) = X(t; 0, y) \Leftrightarrow y = F_{0 \rightarrow t}^{-1}(x) = F_{t \rightarrow 0}(x) = X(0; t, x),$$

y deducir finalmente que la solución $u(t, x)$ de la ecuación de transporte puro (14) vendría dada por:

$$(20) \quad u(t, x) = u_0(X(0; t, x)).$$

Por lo tanto, esta expresión nos proporciona un candidato a solución y nos quedará por analizar bajo qué hipótesis sería efectivamente solución (regularidad de a y de u_0). Vamos a recoger en la siguiente proposición estas hipótesis y el resultado de existencia.

Proposición 1. *Supongamos que $a \in C^1((0, T) \times \mathbb{R}^N)$ con derivadas acotadas, y que la condición inicial $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Entonces, tomando $X(t; s, x)$ las soluciones*

de (16) para cada condición $s \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}^N$, existe una única solución de la ecuación de transporte puro (14) dada por (20).

Demostración. Primero recordamos que, bajo estas hipótesis sobre a , existen las características $X(t; s, x)$. Ahora, para ver que cumple (14), definimos, para cada $s \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}^N$ fijos, la función

$$y(t) := u(t, X(t; s, x)) = u_0(X(0; t, X(t; s, x))) = u_0(X(0; s, x))$$

donde se ha usado la fórmula (18). Así, por un lado, si calculamos $y'(t)$ desde el término $u(t, X(t; s, x))$ (usando la regla de la cadena) obtenemos

$$y'(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \cdot \nabla u \right) (t, X(t; s, x)),$$

mientras que, por otro lado, derivándolo en la forma $u_0(X(0; s, x))$, que no depende de t , obtenemos $y'(t) = 0$. Igualando las dos expresiones y tomando $s = t$ para que $X(t; t, x) = x$, se obtiene directamente que u verifica (14) punto a punto. \square

Antes de proseguir con nuestro desarrollo teórico vamos a comentar algunos ejemplos interesantes donde podamos apreciar que entender bien la Proposición 1 pueden ser útiles para obtener consecuencias interesantes, más allá de de la resolución de ecuaciones sencillas como la de advección o de transporte libre (56).

Ejemplo 1. En primer lugar vamos a ver como obtener un gran número de soluciones estacionarias (que no dependen de t) de la ecuación cinética:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x U \cdot \nabla_v f = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad v \in \mathbb{R}^d,$$

donde $U(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ se denominada usualmente función potencial.

En primer lugar vamos a comprobar que cualquier función que dependa de (x, v) únicamente a través de la variable energía $E(x, v) = |v|^2/2 + U(x)$ es solución estacionaria suya. Veámoslo, si se toma una función $g \in C^1(\mathbb{R})$ y $f(t, x, v) \equiv f_0(x, v) = g(E(x, v))$ rápidamente vemos que es solución:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x U \cdot \nabla_v f &= 0 + g'(E)v \cdot \nabla_x E - g'(E)\nabla_x U \cdot \nabla_v E \\ &= g'(E) \left(v \cdot \nabla_x U - \nabla_x U \cdot v \right) = 0. \end{aligned}$$

En realidad, notamos que esto ocurre para cualquier expresión $\tilde{E}(x, v)$ que sea constante sobre las curvas características, es decir, tal que

$$\frac{d}{dt} \left(\tilde{E}(x(t), v(t)) \right) = v \cdot \nabla_x \tilde{E} + \nabla U \cdot \nabla_v \tilde{E} = 0.$$

Como se verá en el ejercicio 3 si además la función U es radial, esto es, verifica $U(x) = U(r = |x|)$, entonces las funciones que dependan de $L(x, v) = |x \times v|^2$ también serán soluciones estacionarias.

Esta propiedad permite generar una gran cantidad de soluciones, aunque hay que señalar que no todas ellas tendrán sentido físico, ya que puede ser que se les exijan propiedades extra como puede ser que representen una densidad de partículas con masa o energía total finita.

A continuación vamos a solventar un pequeño desliz cometido en la demostración de la Proposición 1: la regularidad de X . Existen diversos resultados de

regularidad respecto a condiciones iniciales y, concretamente, el Teorema 44 de dependencia diferenciable de Peano (ver por ejemplo [24]) que, en nuestro ambiente, establece:

Teorema 2. *Sea $a \in C(0, T, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^N))$. Entonces, la única solución de (16) es una función $X(t; s, x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$. Además, para cada $1 \leq j \leq N$ sus derivadas parciales $\frac{\partial X}{\partial x_j}$ resuelven el PVI*

$$(21) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_N}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{(t;s,x)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}_{(t,X(t;s,x))} \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_N}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{(t;s,x)}$$

con condición inicial

$$(22) \quad \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial X_N}{\partial x_j} \right) (s; s, x) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0).$$

La ecuación (21) se puede obtener formalmente a partir de (16), derivando con respecto a x_j . Por ejemplo en el caso de la solución (17) de ecuación de transporte libre (9) el sistema (21) se cristaliza en la siguiente expresión:

$$(23) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_6}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{(t;s,(x,v))} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_6}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{(t;s,(x,v))}.$$

De hecho, a partir de la expresión (17) podemos calcular dichas derivadas explícitamente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial X_6}{\partial x_j} \right)_{(t;s,(x,v))} &= e_j, \\ \left(\frac{\partial X_1}{\partial v_j}, \dots, \frac{\partial X_6}{\partial v_j} \right)_{(t;s,(x,v))} &= (t-s)e_j + e_{j+3} \end{aligned}$$

siendo $j = 1, 2, 3$ y $\{e_1, e_2, \dots, e_6\}$ la base usual de \mathbb{R}^6 , y notar que claramente verifican el sistema (23) anterior.

Aplicando este resultado, bajo las hipótesis de la Proposición 1, aseguramos que las curvas características son derivables respecto a sus tres variables, lo que, unido a que u_0 es $C^1(\mathbb{R}^N)$ implica que la función u dada por (20) está bien definida y es derivable respecto a t y x , por lo que queda resuelto el desliz que comentamos sobre la Proposición 1.

El Teorema 2 también nos proporciona otra lectura: la transformación auxiliar $F_{s \rightarrow t}(\cdot) := X(t; s, \cdot)$ que habíamos construido es un difeomorfismo de \mathbb{R}^N y nos va a dar información sobre el Jacobiano de tal difeomorfismo. Definimos, pues, el Jacobiano de la transformación $F_{s \rightarrow t}$ como:

$$(24) \quad J(t; s, x) := \det \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t; s, x) \right)_{i,j=1}^{N,N},$$

y, gracias al Teorema 2, tenemos que, para s fijo, $J \in C^1(0, T; C(\mathbb{R}^N))$. La propiedad esencial que cumplirá este Jacobiano, y que nos será muy útil posteriormente, la resumimos en el siguiente Lema.

Lema 3. *Bajo las hipótesis anteriores J verifica la ecuación diferencial:*

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t; s, x) = J(t; s, x) \sum_{i=1}^N \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(t, X(t; s, x)) \quad \left(\text{notaremos } \frac{\partial J}{\partial t} = J \operatorname{div}(a) \right),$$

y además cumple la condición $J(s; s, x) = 1$. En particular $J(t; s, x) > 0$ siempre.

Nota 4. *Físicamente (véase Capítulo 5), cuando a es el campo de velocidades de un cierto fluido, existe una relación entre su divergencia y las propiedades cualitativas del fluido que modela. Concretamente, cuando $\operatorname{div}(a) = 0$ se dice que el fluido es incompresible, lo que ahora se corrobora observando que $\operatorname{div}(a) = 0$ produce un Jacobiano constantemente igual a 1, por lo que la transformación $F_{s \rightarrow t}$ asociada al transporte de tal fluido conserva los volúmenes (es un difeomorfismo isométrico), esto es, para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}^N$ y $B = F_{s \rightarrow t}(A)$ entonces*

$$\operatorname{Vol}(B) = \int_B \chi_B dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\chi_B \circ F_{s \rightarrow t}) |J(t; s, \cdot)| dx = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A 1 dx = \operatorname{Vol}(A),$$

en virtud del Teorema de cambio de variable donde χ_Ω representa la función característica del conjunto Ω . Esto será cierto, por ejemplo, el caso del transporte libre (9), tal y como se ha visto previamente.

Nota 5. *Esta misma propiedad de tener la divergencia nula produce otro efecto que no es casual. Recordamos que la diferencia entre la forma no conservativa (11) y la conservativa (12) desaparece cuando $\operatorname{div}(a) = 0$, por lo que las posibles ventajas de una y otra forma serán comunes si ocurre esto. Por ejemplo, en el Ejercicio 2 proponemos el caso particular de la ecuación de Liouville, que lo cumple, y lo que se verifica es que se conserva tanto la norma L^1 , por estar en forma conservativa, como la L^∞ , por estar en forma no conservativa (y, de hecho, todas las intermedias). Pero este hecho es fácilmente extensible al caso general en que $\operatorname{div}(a) = 0$.*

Demostración del Lema 3. Por ser J un determinante, podemos expresar su derivada como sigue

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t; s, x) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial X_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} + \cdots + \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial X_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial X_N}{\partial x_N} \end{pmatrix},$$

de donde, aplicando componente a componente la ecuación (21) y las propiedades del determinante se obtiene lo siguiente (en cada sumando, aunque lo expresamos sólo para el primero),

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial X_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial a_1}{\partial x_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_1} & \cdots & \sum_{k=1}^N \frac{\partial a_1}{\partial x_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial a_1}{\partial x_k} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_k}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} J + 0 = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} J. \end{aligned}$$

Obteniendo de forma análoga el resto de expresiones y sustituyendo en la primera fórmula obtenemos finalmente el resultado. Además, se tiene que $J(s; s, x) = 1$ por

(22) y la positividad es trivial ya que, como es la solución de $J' = J \operatorname{div}(a)$ con condición inicial positiva, $J(t; s, x)$ resulta ser la exponencial de algo. \square

Ya tenemos todas las herramientas para concluir nuestra teoría clásica de existencia de solución de la ecuación de transporte lineal completa, tanto en forma conservativa como en forma no conservativa, cosa que hacemos en la siguiente sección. No obstante, antes presentamos aquí el caso conservativo y homogéneo, donde aparece la principal diferencia entre ambas formas, y donde el Lema 3 será clave.

Proposición 6. *Supongamos que $a \in C(0, T; \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^N))$ con derivadas acotadas, y que la condición inicial $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$. Entonces, tomando $X(t; s, x)$ las soluciones de (16) para cada condición $s \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}^N$, entonces existe una única solución de la ecuación $\partial_t u + \operatorname{div}(a u) = 0$ dada por la expresión:*

$$u(t, x) = u_0(X(0; t, x))J(0; t, x).$$

Demostración. Primero observemos que, bajo estas hipótesis un poco más exigentes sobre a , no sólo las características $X(t; s, x)$ sino que también los jacobianos J son funciones diferenciables con respecto a todas las variables en virtud del Teorema 44.

De forma análoga a lo hecho en la Proposición 1, definimos para cada $s \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}^N$ fijos, la función auxiliar $y(t) := u(t, X(t; s, x))J(t; s, x)$ y vemos que también es independiente de t :

$$\begin{aligned} y(t) &= u_0(X(0; t, X(t; s, x)))J(0; t, X(t; s, x))J(t; s, x), \\ &= u_0(X(0; s, x))J(0; s, x), \end{aligned}$$

donde la última identidad se obtiene en virtud de la fórmula de traslación característica (18) con $\tau = 0$, leída en este caso como:

$$F_{t \rightarrow 0} \circ F_{s \rightarrow t} = F_{s \rightarrow 0}.$$

De hecho, la identidad usada

$$J(0; t, X(t; s, x))J(t; s, x) = J(0; s, x),$$

es simplemente decir que *el jacobiano de una composición es igual al producto de los jacobianos* (consecuencia de la regla de la cadena y de que el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes, ver [30, §2.5]). Así, por un lado, si derivamos $y(t)$, escrita como $u(t, X(t; s, x))J(t; s, x)$ y usando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \cdot \nabla u \right) (t, X(t; s, x))J(t; s, x) + u(t, X(t; s, x)) \frac{dJ}{dt}(t; s, x) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \cdot \nabla u \right) (t, X(t; s, x))J(t; s, x) + u \operatorname{div}(a)(t, X(t; s, x))J(t; s, x) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(a u) \right) (t, X(t; s, x))J(t; s, x), \end{aligned}$$

donde se ha usado fuertemente el Lema 3. Por otro lado, como y no depende de t , obtenemos $y'(t) = 0$ e, igualando ambas expresiones y tomando $s = t$ para que $X(t; t, x) = x$ y $J(t; t, x) = 1$, se obtiene directamente que u verifica (16) punto a punto. \square

En los siguientes ejercicios se propone la justificación de algunas otras propiedades de interés.

Ejercicios

1. Analiza la existencia de curvas características para las ecuaciones de transporte

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1 + x^2) \frac{\partial}{\partial x} u = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \left(\frac{|x|^2}{2} \right) \cdot \nabla_v f = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad v \in \mathbb{R}^d,$$

donde $|x|^2$ denota la norma euclídea $x_1^2 + \dots + x_d^2$. Nota que, en este último caso, la fuerza es $F = -\nabla_x \phi$ con $\phi(x) = \frac{|x|^2}{2}$; a este potencial se le llama **potencial confinante**; ¿por qué crees que se le denomina así?

2. Se considera la ecuación cinética:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v (fF(t, x)) = 0 \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad v \in \mathbb{R}^d,$$

donde la función F es un campo de fuerzas dado y que únicamente depende de las variables t y x . Demuestra que toda solución no negativa verifica las siguientes propiedades de conservación:

$$\|f(t, \cdot, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^{2d})} = \|f_0\|_{L^p(\mathbb{R}^{2d})}, \quad \text{para cada } 1 \leq p \leq \infty.$$

¿Qué interpretación física harías de esta propiedad para $p = 1$ y $p = \infty$?

Indicación: Usa que el transporte a lo largo de las características en este caso es un difeomorfismo isométrico como en la Nota 4.

3. Sea la ecuación cinética de Liouville:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_v f = 0 \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3$$

donde F es una fuerza conservativa $F = -\nabla U$ siendo $U(x) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ su potencial asociado que, además, consideramos radial, es decir, $U(x) = U(|x|)$.

Justifica que cualquier función $f(t, x, v) \equiv f_0(x, v) = g(L(x, v))$ con $g \in C^1(\mathbb{R})$ y $L(x, v) = |x \times v|^2$ es una solución estacionaria.

Indicación: Justifica que la función $x \times v$ es invariante cuando se evalúa sobre las curvas características, usando para ello la expresión matricial del producto vectorial y algunas de las propiedades de la demostración del Lema 3.

2.2. Soluciones clásicas de la ecuación de transporte. Por separar un poco las demostraciones, en primer lugar vamos a ver que toda solución, en caso de existir, ha de venir dada por una especie de fórmula de variación de las constantes y, en segundo lugar, probaremos su existencia.

Teorema 7. (Caracterización y unicidad). *Suponemos que el campo de transporte a está en $C(0, T; \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^N))$, y que f y a_0 son $C([0, T] \times \mathbb{R}^N)$. Entonces, si u es solución clásica de la ecuación de transporte lineal en forma no conservativa (11), ha de escribirse como:*

$$(25) \quad u(t, x) = u_0(X(0; t, x)) e^{(-\int_0^t a_0(\sigma, X(\sigma; t, x)) d\sigma)} + \int_0^t f(\sigma, X(\sigma; t, x)) e^{(-\int_\sigma^t a_0(\tau, X(\tau; t, x)) d\tau)} d\sigma.$$

De igual forma, si $a \in C(0, T; \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^N))$ y u es una solución clásica de la ecuación de transporte lineal en forma conservativa (12), puede ser expresada como:

$$(26) \quad u(t, x) = u_0(X(0; t, x)) J(0; t, x) e^{(-\int_0^t a_0(\sigma, X(\sigma; t, x)) d\sigma)} + \int_0^t f(\sigma, X(\sigma; t, x)) J(\sigma; t, x) e^{(-\int_\sigma^t a_0(\tau, X(\tau; t, x)) d\tau)} d\sigma.$$

Demostración. Comenzamos con el caso no conservativo; de nuevo, y al igual que en la Proposición 1, fijamos $s \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}^N$, definimos la función auxiliar $y(t) := u(t, X(t; s, x))$ y calculamos su derivada. Hacemos notar que, bajo las hipótesis hechas sobre a y gracias al Teorema 2, tenemos que las características son derivables en todas sus variables y podemos escribir esta derivada como sigue:

$$y'(t) = \frac{\partial}{\partial t} u(t, X(t; s, x)) + \frac{\partial X}{\partial t}(t; s, x) \cdot \nabla_x u(t, X(t; s, x)).$$

Usando la ecuación de las características (16) y que u cumple (11) queda

$$(27) \quad y'(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \cdot \nabla_x u \right) (t, X(t; s, x)) = (-a_0 u + f)(t, X(t; s, x)).$$

Con lo que, llamando $b(t) := -a_0(t, X(t; s, x))$ y $g(t) := f(t, X(t; s, x))$, obtenemos

$$y'(t) = b(t)y(t) + g(t),$$

y, resolviendo mediante la fórmula de variación de constantes (83), obtenemos

$$y(t) = y(0)e^{(\int_0^t b(\tau) d\tau)} + \int_0^t g(\tau) e^{(\int_\tau^t b(\sigma) d\sigma)} d\tau.$$

Al desarrollar por completo esta fórmula y tomar de nuevo $s = t$ para obtener $X(t; t, x) = x$, aparece justamente la expresión (25) que queríamos probar.

La prueba para el caso conservativo es análoga, usando en este caso la función auxiliar de la Proposición 6 y el Lema 3; se propondrá como ejercicio. \square

Nota 8. *Obsérvese que, por estar resolviendo ecuaciones lineales, tanto las fórmula (25) como (26) se pueden leer de la siguiente manera:*

La solución de la ecuación completa es suma de:

- *la solución de la ecuación con dato inicial u_0 pero con función f nula,*
- *más la solución de la ecuación con dato inicial nulo pero con función f no nula.*

Como ya adelantamos, una vez caracterizadas las soluciones clásicas, finalmente enunciamos el resultado de existencia.

Teorema 9. (Existencia) *Suponemos que $a \in C(0, T; \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^N))^N$ y que $f, a_0 \in C^{0,1}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$, es decir, son continuas y con derivadas parciales respecto de x continuas. Entonces, para cada condición inicial $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^N)$, existe una única solución de (12) (resp. de (11)) dada por (26) (resp. por (25)).*

Demostración. De nuevo demostramos el resultado para el caso no conservativo. La idea es probar que la función dada por (25) es, en efecto, una solución clásica del problema (11). Lo primero es notar que la función $u(t, x)$ dada por (25) es derivable; de hecho, justo para ello se ha supuesto que a_0, f y u_0 son de clase uno respecto a x . De modo que sólo resta ver que satisface la ecuación (11). Para ello procedemos como en la Proposición 1; definimos, para cada $s \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}^N$ fijos, la función auxiliar:

$$y(t) := u(t, X(t; s, x)) = u_0(X(0; s, x)) e^{-\int_0^t a_0(\sigma, X(\sigma; s, x)) d\sigma} + \int_0^t f(\sigma, X(\sigma; s, x)) e^{-\int_\sigma^t a_0(\tau, X(\tau; s, x)) d\tau} d\sigma,$$

donde se ha usado de nuevo la fórmula (18), y derivamos respecto de t . Obtenemos, por un lado

$$y'(t) = -a_0(t, X(t; s, x)) u_0(X(0; s, x)) e^{-\int_0^t a_0(\sigma, X(\sigma; s, x)) d\sigma} + f(t, X(t; s, x)) - a_0(t, X(t; s, x)) \int_0^t f(\sigma, X(\sigma; s, x)) e^{-\int_\sigma^t a_0(\tau, X(\tau; s, x)) d\tau} d\sigma$$

donde, sacando factor común $a_0(t, X(t; s, x))$ y usando la definición (25) de u , queda:

$$y'(t) = (f - a_0 u)(t, X(t; s, x)).$$

Por otro lado

$$y'(t) = \frac{d}{dt} \left(u(t, X(t; s, x)) \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \cdot \nabla u \right) (t, X(t; s, x)),$$

e, igualando ambas expresiones, produce

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \cdot \nabla u + a_0 u - f \right) (t, X(t; s, x)) = 0.$$

Finalmente, tomando $s = t$ para obtener $X(t; t, x) = x$, nos da directamente (11).

De nuevo, para el resultado conservativo, basta tomar la otra función auxiliar usada en la Proposición 6 y razonar de forma análoga, lo que dejamos propuesto en el siguiente ejercicio. \square

Ejercicios

4. Deduce, análogamente a como se ha hecho en el caso no conservativo, que la solución clásica de la ecuación de transporte en forma conservativa viene dada por (26).

Indicación: toma $y(t) := u(t, X(t; s, x))J(t; s, x)$ y usa el Lema 3.

5. Demuestra que la existencia de solución clásica para el siguiente problema:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + a \frac{\partial}{\partial x}u(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], x \in [0, \infty),$$

donde a es una constante, y con condiciones iniciales y de frontera:

$$u(0, x) = u_0(x) \quad x \in [0, \infty), \quad u(t, 0) = g(t) \quad t \in [0, T],$$

requiere de ciertas condiciones de compatibilidad entre el signo de a y las funciones u_0 y g respectivamente.

Indicación: Verifica que el transporte a lo largo de las características en este caso es simplemente una traslación.

6. Como indica la Nota 4, cuando $\operatorname{div}(a) = 0$, entonces $J(t; s, x) \equiv 1$ es constante, y la transformación $F_{s \rightarrow t}$ preserva volúmenes. Por otra parte, es fácil observar que, en este caso, la ecuación de transporte que sigue es simultáneamente conservativa y no conservativa, concretamente:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(a u) = \frac{\partial u}{\partial t} + a \cdot \nabla u, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N.$$

Utiliza este hecho para demostrar que, cuando $\operatorname{div}(a) = 0$, toda solución de la anterior ecuación de transporte verifica

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{para cada } 1 \leq p \leq \infty,$$

y establece que el resultado del Ejercicio 2 anterior no es más que un caso particular de este.

3. Existencia y unicidad: Teoría débil

Como ya adelantábamos en el Capítulo 1, especialmente cuando la ecuación es no lineal, las soluciones pueden dejar de ser derivables en tiempo finito, desarrollando incluso discontinuidades de salto. Por ello, los conceptos de solución clásica que acabamos de presentar dejarán de ser válidos, y deberán *debilitarse* para poder incluir a este tipo de funciones. En esta sección vamos a introducir este nuevo concepto más débil de solución en el caso lineal, bajando las condiciones de regularidad exigida sobre u_0 , a_0 y a , y vamos a dar resultádos análogos a los anteriores de existencia y unicidad.

Antes de introducir las herramientas funcionales necesarias vamos a visualizar el problema mediante el un ejemplo. En el caso concreto de la ecuación de advección (3) podemos considerar una condición inicial de tipo *Heaviside*:

$$\rho_0 = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Obsérvese que, aunque la fórmula (20) que nos proporcionaría una solución tiene perfecto sentido, dando como candidato a solución

$$\rho(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x - at > 0, \\ 0, & \text{si } x - at \leq 0, \end{cases}$$

esta no puede serlo en sentido clásico, ya que ni si quiera es una función continua. Esta solución es un caso muy particular y sencillo de lo que se denomina **onda de choque** (“shock wave”) de gran interés en física e ingeniería, de donde se justifica el interés matemático por darle sentido. De hecho, este caso parece un poco artificial

ya que la discontinuidad la hemos introducido en la propia condición inicial. No obstante, veremos que en el caso de ecuaciones no lineales estas discontinuidades, denominadas choques, se pueden formar de manera espontánea incluso partiendo de condiciones inicialmente regulares.

En la sección anterior obtuvimos soluciones de las ecuaciones de transporte que esencialmente eran de clase $C^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$. Dos son los ingredientes esenciales que hacen falta para definir este espacio, la continuidad y la derivabilidad. En esta sección vamos a presentar los conceptos paralelos que nos vamos a encontrar en la teoría de existencia de soluciones débiles. A nivel puramente intuitivo y muy formal podemos pensar que vamos a cambiar la continuidad por la pertenencia a un espacio L^p , mientras que la propiedad de derivabilidad clásica se cambia por un concepto más general que se llama derivabilidad débil. Al conjugar estos dos ingredientes aparecerá la definición de los espacios de Sobolev de forma análoga a como ocurría en el caso de funciones C^1 (ver Apéndice A).

Pasamos a proponer las condiciones sobre los datos del problema que nos permitirán desarrollar nuestro análisis. Al igual que en el caso clásico, primero estudiamos el sistema característico (16), y luego pasamos a la ecuación de transporte.

3.1. Las curvas características. Con el fin de determinar la existencia y unicidad de las curvas características en sentido débil comenzaremos, al menos, con las siguientes hipótesis de *lipschitzianidad*:

$$(28) \quad a_i \in L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\mathbb{R}^N)), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Veamos en particular que estas son suficientes para dicho propósito. Más adelante veremos qué exigir a los coeficientes a_0 , f y a la condición inicial en $t = 0$.

Lema 10. (Existencia y unicidad de las curvas características). *Si las componentes de a verifican la hipótesis (28), entonces existe una única función*

$$X : t \in (0, T) \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^N \quad X \in (W^{1, \infty}(0, T))^N$$

solución de la ecuación (16) en sentido débil.

Demostración. Aunque estamos resolviendo una ecuación diferencial ordinaria, usaremos una idea ampliamente explotada hoy día en el análisis de muchas otras ecuaciones diferenciales: transformar la resolución de la ecuación en un **problema de punto fijo equivalente**, y resolver dicho problema de punto fijo. Así, dividimos el argumento en dos pasos: equivalencia con un problema de punto fijo y resolución del mismo.

-Paso 1, equivalencia con un problema de punto fijo.- En principio vamos a observar que resolver (16) equivale a encontrar una función $X(t) \in (W^{1, \infty}(0, T))^N$ que verifique la siguiente ecuación integral

$$(29) \quad X(t) = x + \int_s^t a(\tau, X(\tau)) d\tau.$$

Una vez tengamos esta equivalencia, parece más o menos evidente que el operador al que vamos a buscar un punto fijo será:

$$(30) \quad \mathcal{T}[X](t) := x + \int_s^t a(\tau, X(\tau)) d\tau.$$

La citada equivalencia es consecuencia directa del Teorema 61, aunque detallamos la demostración para familiarizarnos con el empleo de estas propiedades.

Veamos primero una implicación: dada $X \in (W^{1,\infty}(0, T))^N$ solución débil de (16), entonces X verifica (29). Para ello, usamos la definición de derivada débil, obteniendo

$$(31) \quad \int_0^T X(t)\phi'(t)dt = - \int_0^T a(t, X(t))\phi(t) dt, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Definimos $v(t) := \int_s^t a^*(\tau)d\tau$, donde $a^*(t) := a(t, X(t))$ y vemos en qué espacio “vive”. Usando la hipótesis (28), tenemos que (para cada $1 \leq i \leq N$)

$$|a_i(t, X(t))| \leq \|a_i(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|a_i\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^N))}$$

para casi todo t en $[0, T]$, de donde

$$|v_i(t)| \leq \left| \int_s^t |a_i^*(\tau)|d\tau \right| \leq T \|a_i\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^N))}$$

y por lo tanto $v \in (L^\infty(0, T))^N$. Además, por el Teorema 61,(i), la derivada débil de v respecto de t es a^* , que también está en $(L^\infty(0, T))^N$, por lo que se deducen dos cosas: que $v \in (W^{1,\infty}(0, T))^N$ y que

$$\int_0^T v(t)\phi'(t)dt = - \int_0^T a^*(t)\phi(t)dt, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T),$$

Combinando esto con (31), obtenemos

$$\int_0^T (X(t) - v(t))\phi'(t)dt = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T),$$

y usando el Teorema 61,(ii), deducimos que $X(t) = v(t) + c$. Finalmente, gracias al Teorema 61,(iii) tenemos que $W^{1,\infty}(0, T) \subset C([0, T])$, es decir, que son funciones continuas y para calcular esa constante basta evaluar, por ejemplo, en el punto s . Como $X(s) = x$ y $v(s) = 0$ obtenemos que $X(t) = x + v(t)$, que es justamente (29).

Veamos la otra implicación, más simple aún si cabe. Si tomamos una función $X \in (W^{1,\infty}(0, T))^N$ verificando (29), directamente se tiene que $X(s) = x$ y además, por el Teorema 61,(i), tiene derivada débil y es igual a $a(t, X(t))$; por lo tanto X verifica (16) en **casi todo punto** t .

-Paso 2, resolución del problema de punto fijo.- Ya hemos trasladado el problema (16) a la ecuación integral (29), cuya solución no es más que un punto fijo del operador \mathcal{T} dado por (30). En este punto, pretendemos aplicar a \mathcal{T} el Teorema 47 del punto fijo de Banach, para lo que necesitamos decidir el espacio de Banach E sobre el que definir el operador, el conjunto tal que $\mathcal{T}(M) \subset M$ y la contractividad. En principio, parece lógico emplear el espacio $W^{1,\infty}(0, T)^N$ como conjunto M , porque ahí esperamos que vivan las soluciones; sin embargo, esta elección implica más problemas de los que aparenta, y optaremos por un espacio de tipo L^∞ . La ventaja es que en caso de existir solución solución de (29) en L^∞ , automáticamente (como acabamos de ver en la demostración del Lema 10) estará en $W^{1,\infty}$, es decir, *a posteriori* ganamos regularidad. Por otro lado, para que \mathcal{T} resulte contractiva, vamos a tener que comenzar a trabajar en un intervalo temporal más pequeño, $[s - \delta, s + \delta]$, pues la constante L dependerá de la longitud de tal intervalo y la queremos menor que 1, aunque luego iremos ampliando este intervalo. Concretamente, tomaremos

$\delta = 1/(2N\|a\|)$ con $\|a\| = \max_i \|a_i\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N))}$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{T}: L^\infty(s-\delta, s+\delta)^N &\rightarrow L^\infty(s-\delta, s+\delta)^N \\ X &\mapsto \mathcal{T}[X], \quad \mathcal{T}[X](t) := x + \int_s^t a(\tau, X(\tau))d\tau. \end{aligned}$$

Hacemos notar que si $s - \delta < 0$ se tomaría sencillamente 0 como extremo del intervalo. La clave de esta demostración es el caracter lipschitziano de a , esto es, la propiedad (iii) del Teorema 58 (léida para $p = \infty$) que se reescribe como:

$$|a_i(t, x) - a_i(t, y)| \leq \|\nabla_x a_i(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)^N} |x - y|,$$

de donde podemos extraer la propiedad de lipschitzianidad para el campo:

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leq N \|a_i\|_{L^\infty(0,t;W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N))} |x - y| \leq N\|a\| |x - y|.$$

Es muy fácil comprobar que \mathcal{T} es un operador bien definido; veamos pues que es contractivo.

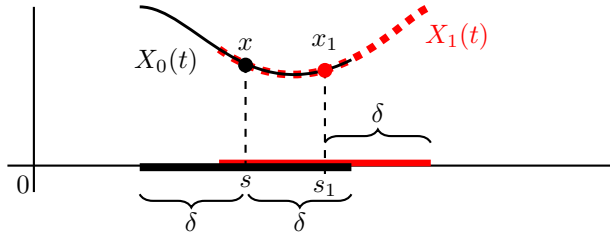
$$\begin{aligned} \left| \mathcal{T}[Y](t) - \mathcal{T}[Z](t) \right| &\leq \left| \int_s^t |a(\tau, Y(\tau)) - a(\tau, Z(\tau))| d\tau \right| \leq \\ &\leq N \|a\| \|Y - Z\|_{L^\infty} \left| \int_s^t d\tau \right| \leq \delta N \|a\| \|Y - Z\|_{L^\infty} = \frac{1}{2} \|Y - Z\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

donde, por simplificar, hemos notado $L^\infty = L^\infty(s-\delta, s+\delta)^N$. Tomando ahora supremos, se obtiene la contractividad de \mathcal{T} con $L = 1/2$. El Teorema 47 nos garantiza entonces que existe una única $X_0 \in (L^\infty(s-\delta, s+\delta))^N$ verificando

$$X_0(t) = x + \int_s^t a(\tau, X_0(\tau))d\tau, \quad \forall t \in (s-\delta, s+\delta),$$

que, como ya hemos comentado, además cumple $X_0 \in (W^{1,\infty}(s-\delta, s+\delta))^N$ y, en particular, es continua.

Para concluir vamos ampliando recursivamente el intervalo aplicando de nuevo punto fijo de la siguiente forma (ver dibujo):



Tal y como se observa, tomamos un $s_1 \in (s, s + \delta)$ y el valor de la solución en ese punto $x_1 := X_0(s_1)$ como la nueva condición inicial; así, definimos un operador \mathcal{T} análogo (lo llamamos igual) en un intervalo de igual longitud pero más a la derecha: (llamamos al lector a no perder la idea intuitiva con la demostración rigurosa, que puede ser técnica en exceso):

$$X \in (L^\infty(s_1 - \delta, s_1 + \delta))^N \quad \mapsto \quad \mathcal{T}[X](t) := x_1 + \int_{s_1}^t a(\tau, X(\tau))d\tau, \quad .$$

obteniendo ahora un único $X_1 \in (W^{1,\infty}(s_1 - \delta, s_1 + \delta))^N$ punto fijo de este “nuevo” operador \mathcal{T} . Y para concluir nos basta ver que estas “dos” curvas coinciden c.p.d. en el subintervalo común de definición $(s_1 - \delta, s_1 + \delta)$. Si reescribimos X_0 como sigue,

$$(32) \quad X_0(t) = x + \int_s^{s_1} a(\tau, X_0(\tau))d\tau + \int_{s_1}^t a(\tau, X_0(\tau))d\tau = x_1 + \int_{s_1}^t a(\tau, X_0(\tau))d\tau$$

podemos hacer la siguiente estimación para $t \in (s_1 - \delta, s_1 + \delta)$:

$$|X_1(t) - X_0(t)| = \left| \int_{s_1}^t (a(\tau, X_1(\tau)) - a(\tau, X_0(\tau)))d\tau \right| \leq \frac{1}{2} \|X_1 - X_0\|_{(L^\infty(s_1 - \delta, s_1 + \delta))^N},$$

de donde obtenemos, tomando supremo de nuevo, que

$$\|X_1 - X_0\|_{(L^\infty(s_1 - \delta, s_1 + \delta))^N} \leq \frac{1}{2} \|X_1 - X_0\|_{(L^\infty(s_1 - \delta, s_1 + \delta))^N}$$

y, por lo tanto, cero. Repitiendo este razonamiento a izquierda y derecha, se va ampliando la solución de forma única a todo el intervalo $[0, T]$. \square

Observemos también dos hechos fundamentales que pueden pasar desapercibidos; por un lado, gracias al Teorema 47, no sólo hemos obtenido nuestra solución, sino que además hemos obtenido una forma de obtenerla como límite cuando $n \rightarrow \infty$ de la sucesión

$$(33) \quad X^0(t) \equiv x_0, \quad X^{n+1}(t) = x + \int_s^t a(\tau, X^n(\tau))d\tau,$$

siendo esta convergencia en norma L^∞ , es decir, uniforme. A esta sucesión se le llama **sucesión de iterantes de Picard**. Por otro lado, y gracias al Teorema 61.(ii) estas funciones X^n son continuas y la convergencia uniforme me garantiza que su límite es continuo, esto es, las curvas características son continuas con respecto a t . Este hecho también se podría observar usando la propiedad de existencia de representante continuo enunciada en el Teorema 61 (iii).

El siguiente paso será estudiar su regularidad respecto de las condiciones iniciales: s y x , de forma análoga a lo enunciado en el Teorema 2.

Lema 11. Dependencia respecto de la condición inicial. *Si las componentes de a verifican*

$$a_i \in L^\infty(0, T; W^{3,\infty}(\mathbb{R}^N)), \quad 1 \leq i \leq N,$$

entonces la solución $X(t; s, x)$ de (16) posee derivadas débiles respecto de x cumpliendo:

$$(34) \quad \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(\cdot; s, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)) : \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

y, por tanto, están en $C(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N))$.

Por simplicidad en el desarrollo de esta sección, haremos la demostración de este resultado en el Apéndice B.

Nota 12. *Obsérvese que no se puede obtener la propiedad de acotación (34) para la propia X ya que, desde la formulación integral se deduce que*

$$|X(t; s, x)| \geq |x| - \left| \int_s^t a(\tau, X(\tau; s, x))d\tau \right|,$$

que es tan grande como se quiera puesto que x se mueve en \mathbb{R}^N y a es acotada.

Por lo tanto, podemos asegurar que bajo las hipótesis del Lema 11, el jacobiano (24) de la transformación $F_{s \rightarrow t}$ verifica:

$$J(\cdot; s, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)).$$

y de forma totalmente análoga a como se hizo en el Lema 3, verifica

$$(35) \quad \frac{\partial J}{\partial t} = J \operatorname{div} a.$$

En este caso, la transformación $F_{s \rightarrow t}$ es de nuevo una biyección débilmente diferenciable (difeomorfismo) tal y cómo se indica en el ejercicio 7.

Ejercicios

7. Reinterpreta la identidad (32) en términos de la fórmula de traslación característica. Demuestra a partir de lo anterior que la transformación $F_{s \rightarrow t}$ definida en función de las curvas características débiles es una biyección para todo $s, t \in [0, T]$. Justifica que en realidad $F_{s \rightarrow t}$ es un difeomorfismo, empleando para ello el hecho de que el resultado de existencia permite construir la solución del sistema característico tanto hacia delante como hacia atrás en tiempo.
8. Observa que el Lema 10 no se puede aplicar directamente al sistema de ecuaciones diferenciales (86), ya que en ese caso el análogo a la funciones a_i tendrían derivadas acotadas aunque ellas mismas no estarían acotadas por ser lineales. Observa, no obstante, pese a lo anterior el operador \mathcal{T} que se define en la demostración del Lema 10 está bien definido en el caso del sistema (86) y la demostración se puede adaptar sin problema.

3.2. Soluciones débiles de la ecuación de transporte lineal. Como viene siendo habitual en nuestro estudio, el concepto de solución débil se va a introducir a partir de las soluciones clásicas, comprobando que una tal solución verifica cierta propiedad de tipo integral que la caracteriza, pero en cuya verificación no se usa explícitamente toda su regularidad. Veamos primero este proceso en nuestra ecuación de transporte en forma no conservativa (11). Para ello, consideramos el siguiente **operador diferencial** (en forma no conservativa):

$$L[v] := \frac{\partial v}{\partial t} + a \cdot \nabla v + a_0 v.$$

Con esta notación, u es una solución clásica de (11)–(13) cuando

$$\begin{cases} L[u] = f & \text{en } Q_T :=]0, T[\times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

En lo que sigue, vamos a tomar funciones test con una leve diferencia de las usadas en el Apéndice A. Ahora nuestras funciones test ϕ serán de clase C^1 en $]0, T[\times \mathbb{R}^N$ con **soporte compacto en** $]0, T[\times \mathbb{R}^N$. También podríamos poner más regularidad, eso no es relevante, pero sí resaltamos que, respecto al tiempo, hemos cerrado el intervalo en $t = 0$, lo que implica que $\phi(0, x)$ **no tiene por qué ser nula a diferencia de $\phi(T, x)$ que sí lo es**. A este conjunto de funciones lo notaremos como $C_0^1(]0, T[\times \mathbb{R}^N)$. Pues bien, dado un test ϕ y una función u suficientemente

regular, tenemos

$$\int_{Q_T} L[u] \phi \, dx \, dt = \int_{Q_T} \frac{\partial u}{\partial t} \phi \, dx \, dt + \int_{Q_T} \phi a \cdot \nabla u \, dx \, dt + \int_{Q_T} a_0 u \phi \, dx \, dt,$$

de donde tras aplicar integración por partes en todas las derivadas obtenemos

$$\int_{Q_T} \phi L[u] \, dx \, dt = \int_{Q_T} \overbrace{\left(-\frac{\partial \phi}{\partial t} - \operatorname{div}(a\phi) + a_0 \phi \right)}{:=L^*[\phi]} u \, dx \, dt - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \phi(0, x) \, dx$$

que permite definir el operador L^* llamado **operador adjunto de L** . Por lo tanto si u fuese una solución clásica (regular) del problema conservativo (11)–(13), entonces verifica

$$(36) \quad \int_{Q_T} L^*[\phi] u \, dx \, dt = \int_{Q_T} f \phi \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \phi(0, x) \, dx,$$

para toda función test $\phi \in C_0^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$. Recíprocamente, también se puede comprobar (deshaciendo los pasos) que si u es una función regular que verifica (36), entonces es una solución clásica. Por lo tanto, cuando hay regularidad, la expresión (36) caracteriza las soluciones de (11)–(13), aunque en la formulación (36) no aparezcan explícitamente las derivadas de u ; de hecho para dar pleno sentido a (36) bastarían unas cuantas propiedades de integrabilidad sobre u . Pues esta es justo la idea que motiva el siguiente concepto de solución.

Definición 13. *Suponemos que se verifican las siguientes hipótesis:*

$$\begin{aligned} a &\in L^\infty(0, T; W_{loc}^{1, \infty}(\mathbb{R}^N))^N, & a_0 &\in L_{loc}^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^N), \\ f &\in L_{loc}^1([0, T] \times \mathbb{R}^N), & u_0 &\in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

*Diremos que una función $u \in L_{loc}^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ es **solución débil de (11)–(13)** si verifica (36) con $L^*[v] := -\frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(av) + a_0 v$.*

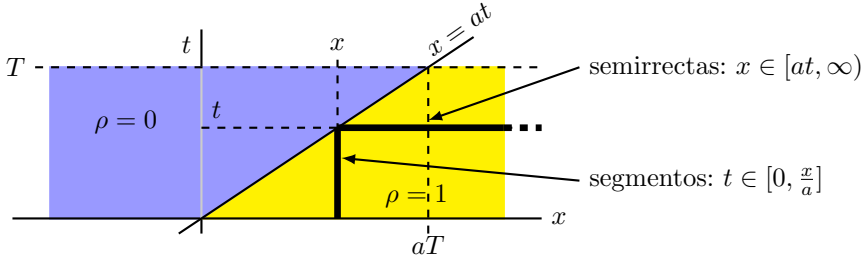
Ahora, tal y como comentamos al principio del tema, podemos justificar que la solución (débil) de la ecuación de advección (3) con condición inicial *Heaviside*:

$$\rho_0 = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad \text{es} \quad \rho(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > at, \\ 0, & \text{si } x \leq at. \end{cases}$$

Los siguientes cálculos están escritos considerando $a > 0$ aunque se deja propuesto en el ejercicio 9 adaptar este cálculo cuando $a < 0$. Como $\rho(t, x) = 0$ cuando

$x \leq at$, tenemos:

$$\int_{Q_T} L^*[\phi] \rho \, dx \, dt = \int_0^T \int_{at}^\infty 1 L^*[\phi] \, dx \, dt = \int_0^T \int_{at}^\infty -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial(a\phi)}{\partial x} \, dx \, dt$$



$$= - \int_0^{aT} \left(\int_0^{x/a} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dt \right) dx - \int_{aT}^\infty \left(\int_0^T \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dt \right) dx - \int_0^T \left(\int_{at}^\infty \frac{\partial(a\phi)}{\partial x} \, dx \right) dt.$$

Aplicando la regla de Barrow en las integrales interiores, nos queda:

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} L^*[\phi] \rho \, dx \, dt &= - \int_0^{aT} \left([\phi(t, x)]_{t=0}^{t=x/a} \right) dx - \int_{aT}^\infty \left([\phi(t, x)]_{t=0}^{t=T} \right) dx \\ &\quad - \int_0^T \left([a\phi(t, x)]_{x=at}^{x=\infty} \right) dt \\ &= \int_0^\infty \phi(0, x) dx - \int_0^{aT} \phi\left(\frac{x}{a}, x\right) dx + \int_0^T (a\phi(t, at)) dt, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\phi(T, x) = 0$ y $\phi(t, \infty) = 0$, (es decir, $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(t, x) = 0$), lo que se debe a tener soporte compacto. Finalmente los dos últimos términos se cancelan ya que

$$(37) \quad \int_0^T a \phi(t, at) \, dt = \left[\begin{array}{l} x = at \\ dx = a \, dt \end{array} \right] \int_0^{aT} \phi\left(\frac{x}{a}, x\right) dx,$$

por lo que finalmente obtenemos (36):

$$\int_{Q_T} L^*[\phi] \rho \, dx \, dt = \int_0^\infty \phi(0, x) \, dx = \int_{Q_T} \rho_0(x) \phi(0, x) \, dx.$$

Pasemos ahora a ver el resultado general de existencia de soluciones débiles, del cual el ejemplo anterior sería un caso particular.

Teorema 14. (Existencia de solución débil; caso no conservativo) *Supongamos que se verifica:*

$$a \in L^\infty(0, T; W^{3, \infty}(\mathbb{R}^N))^N, \quad y \quad a_0 \in L_{loc}^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^N).$$

Entonces, para cada $u_0 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ y $f \in L_{loc}^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$, el problema no conservativo (11)–(13) admite una solución débil, dada por la expresión (25):

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_0(X(0; t, x)) e^{(-\int_0^t a_0(s, X(s; t, x)) ds)} \\ &\quad + \int_0^t f(s, X(s; t, x)) e^{(-\int_s^t a_0(\sigma, X(\sigma; t, x)) d\sigma)} ds. \end{aligned}$$

Demostración. Primero observamos que, bajo las hipótesis del Teorema 14 y gracias al Lema 10, tenemos garantizada la existencia de las curvas características. También notamos que la función $u(t, x)$ dada por (25) está en $L_{loc}^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$, así

que sólo resta ver cumple la definición 13. Para ello tomamos una función **test** $\phi \in C_0^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ y, como queremos probar que

$$\int_{Q_T} L^*[\phi] u \, dx \, dt = \int_{Q_T} f \phi \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \phi(0, x) \, dx,$$

dividimos el término de la izquierda en dos partes:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &:= \int_{Q_T} \int_0^t f(s, X(s; t, x)) e^{(-\int_s^t a_0(\sigma, X(\sigma; t, x)) d\sigma)} L^*[\phi](t, x) \, ds \, dx \, dt. \\ \mathcal{I}_2 &:= \int_{Q_T} u_0(X(0; t, x)) e^{(-\int_0^t a_0(s, X(s; t, x)) ds)} L^*[\phi](t, x) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

y las estudiamos por separado. Si en \mathcal{I}_1 hacemos el cambio biyectivo $y = X(s; t, x)$ y tenemos en cuenta que $dy = J(s; t, x) dx$ y $x = X(t; s, y)$, queda:

$$\mathcal{I}_1 = \int_{Q_T} \int_0^t f(s, y) e^{(-\int_s^t a_0(\sigma, X(\sigma; s, y)) d\sigma)} L^*[\phi](t, X(t; s, y)) J(t; s, y) \, ds \, dy \, dt,$$

y, si aplicamos Fubini en \mathcal{I}_1 respecto de las variables s y t (teniendo en cuenta que forman un dominio triangular), queda

$$(38) \quad \mathcal{I}_1 = \int_{Q_T} f(s, y) \int_s^T e^{(-\int_s^t a_0(\sigma, X(\sigma; s, y)) d\sigma)} L^*[\phi](t, X(t; s, y)) J(t; s, y) \, dt \, dy \, ds,$$

Para simplificar esta expresión, definimos $\phi_s(t, y) := \phi(t, X(t; s, y))$ y calculamos su derivada respecto a t :

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t}(t, y) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + a \cdot \nabla \phi \right)(t, X(t; s, y)) = \left(a_0 \phi - L^*[\phi] - \phi \operatorname{div}(a) \right)(t, X(t; s, y)),$$

donde hemos usado que $L^*[\phi] := -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \operatorname{div}(a\phi) + a_0 \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - a \cdot \nabla \phi - \phi \operatorname{div}(a) + a_0 \phi$ y también (16). A partir de esto podemos hacer el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi_s(t, y) e^{(-\int_s^t a_0(\sigma, X(\sigma; s, y)) d\sigma)} J(t; s, y) \right) &= \\ \left(-L^*[\phi] - \phi \operatorname{div}(a) + a_0 \phi \right)(t, X(t; s, y)) e^{(-\int_s^t a_0(\sigma, X(\sigma; s, y)) d\sigma)} J(t; s, y) & \\ -\phi_s(t, y) e^{(-\int_s^t a_0(\sigma, X(\sigma; s, y)) d\sigma)} a_0(t, X(t; s, y)) J(t; s, y) & \\ +\phi_s(t, y) e^{(-\int_s^t a_0(\sigma, X(\sigma; s, y)) d\sigma)} \frac{\partial J}{\partial t}(t; s, y). & \end{aligned}$$

Usando la definición de ϕ_s y la ecuación (35) que cumple J , observamos que se cancelan los cuatro últimos términos, obteniendo

$$(39) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi_s(t, y) e^{-\int_s^t a_0(\sigma, X(\sigma; s, y)) d\sigma} J(t; s, y) \right) &= \\ -L^*[\phi](t, X(t; s, y)) e^{-\int_s^t a_0(\sigma, X(\sigma; s, y)) d\sigma} J(t; s, y), & \end{aligned}$$

e insertando ahora esta expresión en (38) queda:

$$\mathcal{I}_1 = \int_{Q_T} f(s, y) \int_s^T -\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi_s(t, y) e^{-\int_s^t a_0(\sigma, X(\sigma; s, y)) d\sigma} J(t; s, y) \right) dt \, dy \, ds.$$

Finalmente, aplicamos la regla de Barrow en la integral más interior, observando que $\phi_s(T, \cdot) = 0$ (por serlo ϕ) y que $\phi_s(s, y) = \phi(s, y)$ para todo y , obteniendo

$$(40) \quad \mathcal{I}_1 = \int_{Q_T} \phi_s(s, y) e^{(-\int_s^s a_0(\sigma, X(\sigma; s, y)) d\sigma)} f(s, y) J(s; s, y) dy ds = \int_{Q_T} f \phi dy dt.$$

Hacemos ahora un estudio análogo ahora para la integral \mathcal{I}_2 . Aquí realizamos el cambio de variables $y = X(0; t, x)$ para obtener

$$\mathcal{I}_2 = \int_{Q_T} u_0(y) e^{(-\int_0^t a_0(s, X(s; 0, y)) ds)} L^*[\phi](t, X(t; 0, y)) J(t; 0, y) dy dt.$$

Si ahora usamos (39) con $s = 0$ y aplicamos de nuevo Barrow, obtenemos

$$(41) \quad \mathcal{I}_2 = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \phi(0, y) dy.$$

Finalmente, uniendo (40) y (41) obtenemos el resultado deseado. \square

Análogamente al caso no conservativo, para el caso conservativo podemos partir del **operador diferencial** (en forma conservativa):

$$L[v] := \frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div}(a v) + a_0 v,$$

y, repitiendo el proceso anterior, podemos establecer la siguiente definición:

Definición 15. *Bajo las mismas hipótesis que la definición 13, diremos que una función $u \in L^1_{loc}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ es una **solución débil de (12)–(13)** si verifica (36) con $L^*[v] := -\frac{\partial v}{\partial t} - a \cdot v + a_0 v$ (ver ejercicio 11).*

Presentamos a continuación el resultado de existencia equivalente para el problema no conservativo. Omitimos la demostración, que se deja propuesta como ejercicio guiado para el lector (véase ejercicio 12).

Teorema 16. (Existencia de solución débil; caso conservativo) *Supongamos que*

$$a \in L^\infty(0, T; W^{3, \infty}(\mathbb{R}^N))^N, \quad y \quad a_0 \in L^\infty_{loc}([0, T] \times \mathbb{R}^N).$$

Entonces, para cada $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y $f \in L^1_{loc}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$, el problema no conservativo (12)–(13) admite una solución débil, dada por la expresión (26).

Tanto en el Teorema 14 como en el 16, hemos omitido afirmar que la solución débil tenga que venir dada por (26) (resp. por (25)), por lo que, en principio, no podemos asegurar la unicidad de una tal solución débil. Es más, aunque estuviésemos bajo las hipótesis regulares del Teorema 9 que garantiza la existencia de una única solución clásica, esta solución clásica, que sería también débil, no tendría por qué ser igual a la dada por (26) (resp. por (25)), pues este concepto es más general y, a priori, podrían existir soluciones débiles que no fuesen clásicas. Veamos que, afortunadamente, este supuesto no puede darse.

Teorema 17. (Unicidad de soluciones débiles.)

Bajo las hipótesis del Teorema 9 sobre los coeficientes a_i , el problema de valores iniciales (11)–(13) (respectivamente el (12)–(13)) admite una única solución débil dada por (25) (respectivamente por (26)).

Demostración. Dado que, en ambos casos, el operador L es lineal, bastará con demostrar que si u_0 y f son nulos, entonces la única solución posible es la trivial. Sea pues u solución débil para la ecuación homogénea y sea $\phi \in C_0^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$. Consideramos también ψ la solución de

$$\begin{cases} L^*[\psi] = \phi & \text{en } Q_T \\ \psi(T) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

que, adaptando adecuadamente los teoremas 7 y 9 a la condición inicial en T , nos dicen que ψ existe y está en $C_0^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$. Con ello, ψ puede hacer de función test en (36) con u_0 y f nulas, quedando

$$\int_{Q_T} u \phi dx dt = \int_{Q_T} u L^*[\psi] dx dt = 0.$$

Lo que, dada la arbitrariedad de ϕ , dice que $u = 0$ casi por doquier y concluye la demostración. \square

Pese a que este punto parezca puramente técnico veremos que en el caso de ecuaciones no lineales no es válido en general y en consecuencia hay que “inventarse” un mecanismo para seleccionar de entre todas las soluciones débiles aquella que sea relevante, dando lugar al concepto de solución entrópica.

Ejercicios

9. Verifica que el cambio de variables realizado en (37) produce el mismo resultado cuando $a < 0$.
10. Obtén a partir de (26) la solución de la ecuación de transporte lineal ¹

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}(u(t, x) \operatorname{sign}(x)) + 1 = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{R},$$

para la condición inicial

$$u_0 = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-2, -1] \cup [1, 2] \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Comprueba a partir de la definición que es solución en sentido débil.

11. Deduce que el operador adjunto para la ecuación (12) es

$$L^*[v] := -\frac{\partial v}{\partial t} - a \cdot \nabla v + a_o v.$$

12. Demuestra el Teorema 16 siguiendo estas indicaciones:

- a) Comprobar que las siguientes afirmaciones son ciertas:
 - Las curvas características están determinadas de forma única.
 - $J \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ y cumple (35).
 - $u \in L_{loc}^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$
- b) Adapta los pasos de la demostración del Teorema 14.

¹Recordar que $\operatorname{sign}(x)$ vale 1 si $x > 0$ y vale -1 si $x < 0$.

Parte 2

Análisis de casos particulares

La ecuación de Burgers: un ejemplo de transporte no lineal

En la presente sección no pretendemos hacer un estudio riguroso, sino más bien ser capaces mediante ejemplos de persuadir al lector de que la situación es bien distinta en caso de ecuaciones no lineales. Para ello tomaremos como modelo el problema de valores iniciales asociado a la ecuación de Burgers

$$(42) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + u(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x),$$

formalmente equivalente a la ecuación (5) que, como se puede observar, no es más que una ecuación de **transporte puro** pero con el campo de transporte a dado por la propia distribución de partículas, esto es $a(t, x) = u(t, x)$, lo que le confiere el carácter de no lineal y del que esperamos extraer algunas peculiaridades.

Para empezar nuestro estudio vamos a suponer que ya tenemos una solución regular de (42) en $[0, T] \times \mathbb{R}$; vamos a ver que, en este caso, las curvas características existen y son líneas rectas. Esto es inmediato si observamos dos hechos: por un lado, la solución debe cumplir (15), esto es, debe ser constante a lo largo de las características,

$$u(t, X(t; s, x)) = u(0, X(0; s, x)) = u_0(X(0; s, x)) \text{ para todo } (s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R},$$

y por otro lado, las curvas características deben ser soluciones del sistema característico (16) asociado a $a = u$, esto es:

$$\frac{dX}{dt}(t; s, x) = u(t, X(t; s, x)) \text{ para todo } (s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

Combinando ambas fórmulas y tomando $s = 0$, deducimos que, para $t \in [0, T]$,

$$\frac{dX}{dt}(t; 0, x) = u(t, X(t; 0, x)) = u_0(X(0; 0, x)) = u_0(x) \Rightarrow \boxed{X(t; 0, x) = x + u_0(x)t}.$$

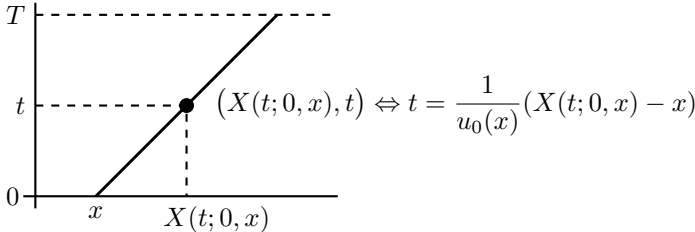


FIGURA 1. Las curvas características para Burger resultan rectas con pendiente $1/u_0(x)$.

Nótese (ver Figura 1) que, representando t en el eje vertical, la pendiente de cada recta es en realidad $1/u_0(x)$. Aparentemente nuestra no linealidad ha simplificado las cosas, pues tenemos explícitamente las curvas características y además son las curvas más simples posibles: ¡líneas rectas! Pero esta aparente simplicidad, en realidad se basa en dos hechos claves que hemos “ocultado”: hemos supuesto que existe una única solución u y que esta es regular.

Vamos a visualizar que estas dos suposiciones pueden no darse (posible falta de regularidad y posible falta de unicidad) a partir de dos condiciones iniciales muy simples (ver Figura 2), una decreciente y otra creciente,

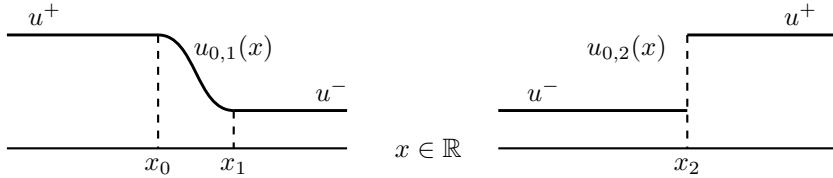


FIGURA 2. Condiciones iniciales que conectan dos valores constantes distintos $0 < u^- < u^+$ de forma decreciente (izquierda) y creciente (derecha).

y ambas pasando de un valor constante y positivo a otro. Para cada una de estas dos condiciones iniciales dibujamos en la Figura 3 las curvas características (rectas) que parten a la izquierda de x_0 y a la derecha de x_1 . Como ya hemos dicho, puesto que $u^+ > u^- > 0$, las curvas que parten de puntos donde de u_0 es igual a u^+ tienen pendiente $1/u^+$, que es inferior a pendiente $1/u^-$ de las curvas que parten de puntos cuyo valor de u_0 es igual a u^- .

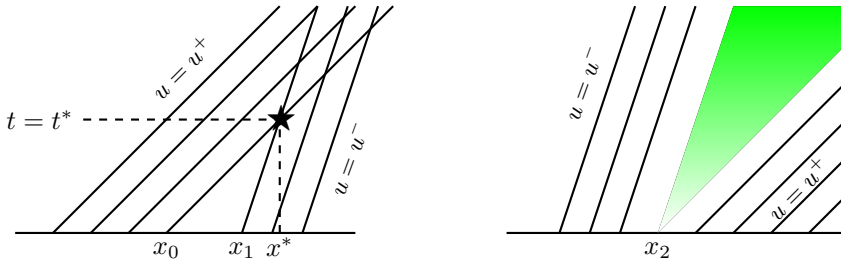


FIGURA 3. Curvas características para sendas condiciones iniciales. La decreciente (izquierda) genera un corte de curvas en tiempo t^* finito, un “choque” mientras que la creciente (derecha) genera la zona en verde vacía donde no hay características y varias soluciones son posibles.

Observamos entonces lo siguiente: por un lado, en el caso de $u_{0,1}$ decreciente (a la izquierda en la Figura 3) que las curvas características que acabamos de calcular se cortan en algún lugar x^* y en algún instante finito de tiempo t^* ! lo que contradice que u sea regular, por lo tanto sospechamos que u pierde su regularidad en tiempo finito. De hecho, si dibujamos lo que parece ocurrir en el instante t^* y la posición x^* en que confluyen las características (ver Figura 4), observamos precisamente un

salto, es decir, ha aparecido una falta de regularidad (no es continua) aunque la condición inicial tomada $u_{0,1}$ era todo lo regular que queramos; simplemente era decreciente.

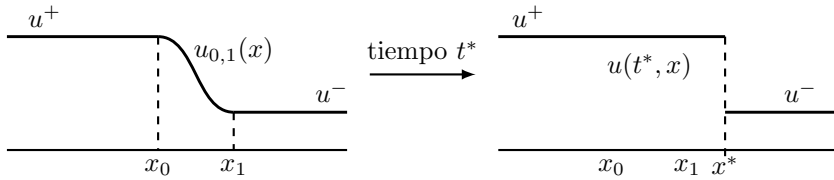


FIGURA 4. Evolución de una condición inicial decreciente: aparición de un “choque”.

Observamos también, por otro lado, que en el caso de $u_{0,2}$ creciente lo que ocurre es que se genera una cierta región (dibujada en verde de forma aproximada en la Figura 3) por la que no pasan las características, dejando abierto el problema de cómo definir la solución en esta región.

Estos dos hechos no son un caso aislado. En general, este “corte” de las curvas características, se suele producir en ecuaciones hiperbólicas no lineales, y lo que refleja es que, incluso si la condición inicial es muy regular, la solución puede desarrollar en tiempo finito discontinuidades de salto denominadas “choques” (ver Ejercicio 13); en este caso, la cuestión será cómo prolongar esa solución tras producirse el choque. Por otro lado, el fenómeno de la derecha lo que suele producir es una cierta indefinición de la solución, es decir, la posibilidad de construir varias soluciones distintas asociadas a la misma condición inicial, ¡perdiendo la unicidad!

Para atacar la primera cuestión, y dado que parece claro que vamos tener que trabajar con soluciones débiles que posean discontinuidades de salto, vamos a comenzar estudiando qué debe cumplir una eventual solución débil de este tipo.

1. Choques: condiciones de Rankine-Hugoniot

Llegado este momento es habitual reescribir la ecuación de Burgers (42) en forma conservativa,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} (f(u(t, x))) = 0,$$

con $f(u) = \frac{u^2}{2}$, aunque obviamente estas dos formulaciones sólo equivalen en las regiones de regularidad de u . Lo que vamos a constatar es que, por el simple hecho de ser solución débil, el punto $s(t)$ en que la solución tiene un salto se va a mover a una velocidad (que llamaremos **velocidad de propagación del choque**) unívocamente determinada por f , esto es, $s'(t) =$ condición dada por f . Enunciamos y probamos esta condición para el caso más sencillo en que $s(t) = v_0 t$, y por lo tanto, la velocidad de propagación v_0 es constante.

Lema 18. Sean los valores $u^+, u^- \in \mathbb{R}$ y $v_0 \in \mathbb{R}$ la velocidad de choque, y sea

$$u(t, x) = \begin{cases} u^- & \text{si } x > v_0 t \\ u^+ & \text{si } x < v_0 t. \end{cases}$$

Si u es solución débil de $\partial_t u_t + \partial_x(f(u)) = 0$ con $f(u) = u^2/2$, entonces ha de cumplir la **relación de Rankine-Hugoniot**:

$$(43) \quad v_0 = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}, \quad \left(v_0 = \frac{1}{2}(u^+ + u^-) \text{ en Burger} \right).$$

Demostración. El ser solución débil implica, para cada $\phi \in C_0^1([0, T] \times \mathbb{R})$, que

$$(44) \quad - \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \phi(0, x) dx.$$

Usando la definición de u , desarrollamos el término de la izquierda, quedando:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{-\infty}^{v_0 t} \left(u^+ \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u^+) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt - \int_0^T \int_{v_0 t}^{\infty} \left(u^- \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u^-) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{-\infty}^{v_0 t} \operatorname{div}_{x,t} \left(f(u^+) \phi, u^+ \phi \right) dx dt - \int_0^T \int_{v_0 t}^{\infty} \operatorname{div}_{x,t} \left(f(u^-) \phi, u^- \phi \right) dx dt, \\ &= - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} \left(f(u^+) \phi, u^+ \phi \right) \cdot n dS - \int_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} \left(f(u^-) \phi, u^- \phi \right) \cdot n dS \end{aligned}$$

donde $\operatorname{div}_{x,t}(F) := \partial_x F_1 + \partial_t F_2$ es el operador divergencia de un campo en 2-D (en las variables (x, t)) y n representa al normal exterior, en cada trozo (ver Figura 5) hemos aplicado el Teorema 55 de la divergencia de Gauss en sus respectivos conjuntos de \mathbb{R}^2 . Notando que las integrales sobre Γ_2 y Γ_4 son 0 (puesto que ϕ lo es para

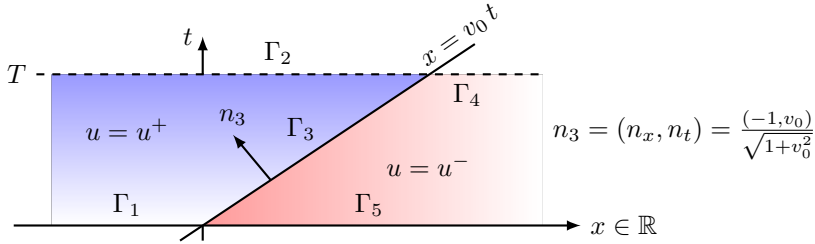


FIGURA 5. Descomposición de $[0, T] \times \mathbb{R}$ en las dos regiones (cián a la izquierda y rojo a la derecha) en las que u es constante. Para aplicar el Teorema de la divergencia, el normal n_3 en la frontera común será exterior respecto de la zona roja mientras que respecto de la zona azul lo será $(-n_3)$.

$t = T$), basta desarrollar el resto de integrales para obtener el resultado. Primero, las integrales sobre Γ_1 y Γ_5 (cuyo normal exterior es $\vec{n} = (0, -1)$) producen:

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_1} \left(f(u^+) \phi, u^+ \phi \right) \cdot (0, -1) dS &= \int_{-\infty}^0 u^+ \phi(0, x) dx, \\ - \int_{\Gamma_5} \left(f(u^-) \phi, u^- \phi \right) \cdot (0, -1) dS &= \int_0^{\infty} u^- \phi(0, x) dx, \end{aligned}$$

por lo que, sumadas, nos dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \phi(0, x) dx.$$

que es precisamente la parte derecha de (44). Por lo tanto, las dos integrales restantes, ambas sobre Γ_3 , han de sumar cero. Para calcularlas notamos que, para

cualquier función h , la integral sobre Γ_3 se puede escribir, usando la parametrización más obvia: $\gamma(\xi) = (\xi, v_0\xi)$, como:

$$\int_{\Gamma_3} h(t, x) dS = \int_0^T h(\gamma(\xi)) |\gamma'(\xi)| d\xi = \int_0^T h(\xi, v_0\xi) \sqrt{1 + v_0^2} d\xi,$$

por lo que, teniendo en cuenta que $\vec{n}_3 = \frac{(-1, v_0)}{\sqrt{1+v_0^2}}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_3} \left(f(u^+) \phi, u^+ \phi \right) \cdot (-\vec{n}_3) dS &= \int_0^T -f(u^+) \phi(\xi, v_0\xi) + v_0 u^+ \phi(\xi, v_0\xi) d\xi, \\ - \int_{\Gamma_3} \left(f(u^-) \phi, u^- \phi \right) \cdot \vec{n}_3 dS &= \int_0^T f(u^-) \phi(\xi, v_0\xi) - v_0 u^- \phi(\xi, v_0\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Como ya hemos dicho, su suma ha de ser cero, lo que se traduce finalmente en

$$\int_0^T \left(f(u^-) - f(u^+) + v_0(u^+ - u^-) \right) \phi(\xi, v_0\xi) d\xi,$$

para cualquier test ϕ , lo que concluye la condición (43) que queríamos probar. \square

Notemos que, esta demostración es fácilmente extendible a cualquier otra ley de conservación $\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$ y a cualquier otra curva de discontinuidad,

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & \text{si } x > s(t), \\ u^+, & \text{si } x < s(t). \end{cases}$$

obteniendo la condición de Rankine Hugoniot general

$$s'(t) = \frac{f(u^-(t, s(t))) - f(u^+(t, s(t)))}{u^-(t, s(t)) - u^+(t, s(t))}.$$

De hecho, una función regular por regiones y que tenga discontinuidades de salto a lo largo de una cierta curva será una solución (débil) cuando sea solución clásica en sus regiones de regularidad y verifique Rankine-Hugoniot en las curva de saltos. Invitamos al lector a consultar [10] para más detalles.

Ahora pasamos a estudiar la otra cuestión con la que comenzamos este capítulo sobre Burgers, esto es, la posibilidad de construir diversas soluciones débiles con la misma condición inicial. Lo abordamos en la siguiente subsección.

2. Unicidad (falta de): condiciones de admisibilidad

Ya hemos resuelto el problema del desarrollo de choques, pues nuestro concepto de solución débil es suficientemente general para abarcar a estas funciones. El segundo problema que anunciamos es que se pierde la unicidad de solución para el problema de valores iniciales. De hecho, vamos a comprobar que las dos funciones:

$$(45) \quad u_1(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < t/2, \\ 1, & \text{si } x > t/2, \end{cases} \quad \text{y} \quad u_2(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ x/t, & \text{si } 0 \leq x \leq t, \\ 1, & \text{si } x > t, \end{cases}$$

son soluciones débiles de $\partial_t u_t + \partial_x(u^2/2) = 0$ para la siguiente condición inicial, del tipo descrito en la Figura 2 para introducir la falta de unicidad:

$$(46) \quad u_0(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Primero observamos que u_1 es justo la que acabamos de estudiar en el Lema 18, cuya velocidad de propagación de choque es exactamente $\frac{1}{2}$, por lo que es solución. Veamos que u_2 (que no presenta saltos) también es solución débil, es decir, que para cada $\phi \in C_0^1([0, T] \times \mathbb{R})$, cumple:

$$(47) \quad \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left(u_2 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(u_2)^2}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt = - \int_0^{\infty} \phi(0, x) dx.$$

Comenzamos por la integral de la izquierda, que descomponemos en tres regiones como se describe en la Figura 6:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left(u_2 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(u_2)^2}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt \\ &= \int_{\Omega_0} 0 dx dt + \int_{\Omega} \left(\frac{x}{t} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{x^2}{2t^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt. \end{aligned}$$

Notamos que el primer trozo es nulo porque $u = 0$ en Ω_0 . Para la segunda usa-

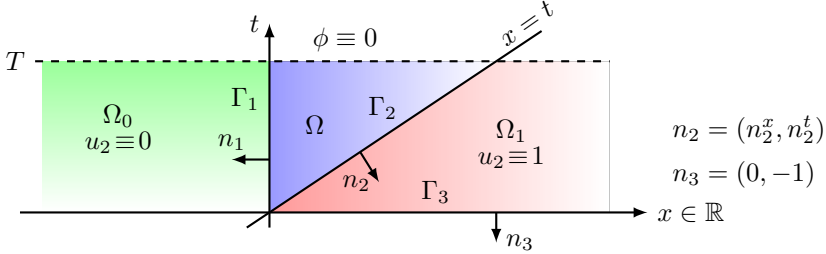


FIGURA 6. Descomposición de $[0, T] \times \mathbb{R}$ en tres regiones según los valores de u_2 : verde, donde $u_2 \equiv 0$; rojo, donde $u_2 \equiv 1$ y cian donde $u_2(t, x) = x/t$. Se indican los vectores normales necesarios para aplicar el Teorema de la divergencia.

mos integración por partes y, para la tercera, el Teorema 55 de la divergencia, obteniendo:

$$\begin{aligned} & \bullet \int_{\Omega} \left(\frac{x}{t} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{x^2}{2t^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt = - \int_{\Omega} \overbrace{\phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{x}{t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2}{2t^2} \right)}^{=0} dx dt + \int_{\Gamma_1} 0 dS \\ & \quad + \int_{\Gamma_2} \frac{x}{t} \phi n_2^t + \frac{x^2}{2t^2} \phi n_2^x dS = \int_{\Gamma_2} \left(\phi n_2^t + \frac{1}{2} \phi n_2^x \right) dS, \\ & \bullet \int_{\Omega_1} \operatorname{div}_{(x,t)} \left(\frac{\phi}{2}, \phi \right) dx dt = \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\phi}{2}, \phi \right) \cdot (-n_2) dS + \int_{\Gamma_3} \left(\frac{\phi}{2}, \phi \right) \cdot n_3 dS \\ & \quad = \int_{\Gamma_2} \left(-\frac{1}{2} \phi n_2^x - \phi n_2^t \right) dS + \int_{\Gamma_3} (-\phi) dS, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $u_2 = 0$ en Γ_1 , que $u_2 = 1$ en Γ_2 y que $\phi = 0$ en la recta $t = T$. Notamos que las integrales sobre Γ_2 cancelan, por lo que al sumar solo nos queda la última, y concluimos

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left(u_2 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(u_2)^2}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt = - \int_{\Gamma_3} \phi dS = - \int_0^{\infty} \phi(0, x) dx,$$

que es precisamentre (47).

Recordamos que esta falta de unicidad proviene del hecho de que las curvas características no proporcionan ningún valor para u en la región $0 < x < t$. Por tanto se abren nuevas cuestiones como por ejemplo, el seleccionar de entre estas (¡y otras!) soluciones aquella que se considerada “físicamente admisible”. Esto dará lugar distintas condiciones de admisibilidad descritas en la literatura (ver [10]). A continuación citamos alguna de ellas.

2.1. Viscosidad evanescente. Las ecuaciones que venimos estudiando son, como vimos en la introducción, leyes de conservación, también denominadas por su forma matemática, ecuaciones hiperbólicas de orden uno. Como hemos visto, este tipo de ecuaciones tienen sendos problemas de unicidad y de desarrollo de choques en tiempo finito. En un contexto no muy distante, existen ejemplos de ecuaciones (también leyes de conservación, pero de orden dos) que resuelven total o parcialmente estos dos problemas; el primer ejemplo es la **ecuación parabólica del calor** o **ecuación de difusión**

$$(48) \quad \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

que, *grosso modo*, modela la transferencia (difusión) de calor de zonas de alta temperatura v a zonas de menor temperatura v , siendo D la constante de difusión (con unidades de longitud al cuadrado partido por tiempo). Se puede ver también como una ley de conservación de las descritas en la introducción

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t, x) + \operatorname{div}_x(\vec{j}(t, x)) = 0,$$

donde el flujo (de calor) \vec{j} viene dado por $\vec{j}(t, x) = -\nabla_x v$, esto es, un campo que apunta en la dirección de mayor descenso de la temperatura v (Ley de Fourier). Esta ecuación del calor ha sido muy estudiada a lo largo de la literatura; nosotros solo usaremos un par de propiedades suyas: que se conoce explícitamente su solución y que es muy regular, incluso si la condición inicial no lo es (todo lo contrario de lo que nos acabamos de encontrar).

Encontramos un segundo ejemplo donde aparece también esta **derivada segunda**, en fluidos (que también presentamos en la introducción, pero precisamente en el caso no viscoso), con un significado físico diferente: la **viscosidad** o resistencia que presentan algunos fluidos al desplazamiento relativo de unas capas de fluido sobre otras. La ecuación por excelencia que describe este hecho es la de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u \right) + \nabla_x p = \mu \Delta_x u,$$

donde ahora es la **constante de viscosidad** μ quién acompaña a la derivada segunda. Notemos el parecido con nuestra ecuación de Burger cuando la densidad ρ es constante (la pasamos dividiendo) y lo leemos en 1-D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \partial_x u + \partial_x(p/\rho) = (\mu/\rho) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

notamos que, amén del término de presión, es Burger con un término “extra” que corresponde a la viscosidad (en rigor μ/ρ se denomina una viscosidad cinemática, pues tiene distintas unidades). Pues bien, esta analogía (véase [21] y las referencias contenidas) y las propiedades de regularidad del calor es lo que motivó a mediados del s.XX a sendos autores por separado E. Hopf y J. Cole a tratar de relacionar

estas ecuaciones, añadiendo a la ecuación de Burger un término pequeño de segundo orden, una **viscosidad artificial** y después **haciendo tender a cero dicha viscosidad**, lo que, aún careciendo propiamente de sentido físico, permitió definir soluciones admisibles que sí tenían pleno sentido físico, como veremos inmediatamente.

Por todo lo anterior, podemos ver la ecuación de Burgers como una aproximación del siguiente modelo “con viscosidad”, esto es, la ecuación de Hopf-Burgers:

$$(49) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon + u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\varepsilon,$$

donde $0 < \varepsilon \ll 1$ representa esa “pequeña viscosidad artificial” y cuyas soluciones, como veremos a continuación, sí son regulares. Pues bien, vamos a utilizar esta ecuación para discriminar de entre todas las soluciones débiles de (42) aquellas que provengan de este modelo (49), tal y como indica la siguiente definición:

Definición 19. Una solución débil u de (42) es **admisibile en el sentido de la viscosidad evanescente** si existe una sucesión de soluciones regulares u_ε de (49) que converjan en \mathbb{L}^1_{loc} a u cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Vamos a desarrollar esquemáticamente esta idea, la existencia de u_ε , la convergencia y su conexión con otros conceptos (equivalentes) de solución admisible. En la siguiente Figura 7 presentamos, de forma resumida, los resultados desarrollados por Hopf y Cole que conectan los modelos presentados:

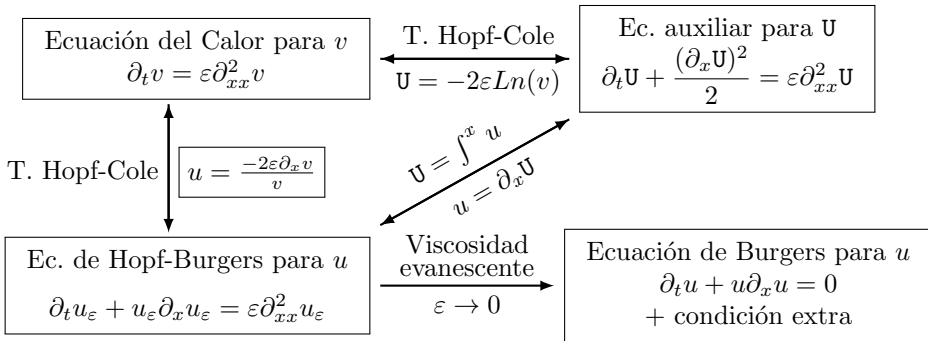


FIGURA 7. Transformaciones de Hopf-Cole: esquema de construcción de las soluciones u_ε con viscosidad ε a partir de la ecuación del calor y obtención de la (única) solución de Burger por viscosidad evanescente.

- En primer lugar, hacemos el cambio de variable $U(t, x) = \int^x u_\varepsilon(t, y) dy$ en (49) que lo transforma en la ecuación

$$(50) \quad \frac{\partial}{\partial t} U + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} U, \quad \text{con } \frac{\partial U}{\partial x} = u.$$

- En segundo lugar, partiendo de una solución v de la ecuación del calor (48) (con constante de difusión $D = \varepsilon$), calculamos qué ecuación resuelve $f(v)$ (con f a determinar después para que $U := f(v)$ sea solución de (50)):

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v) = f'(v) \frac{\partial}{\partial t} v = \varepsilon f'(v) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \varepsilon \frac{\partial^2 f(v)}{\partial x^2} - \varepsilon f''(v) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2,$$

y notamos que, imponiendo $\varepsilon f''(v) = \frac{1}{2}(f'(v))^2$ obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v) = \varepsilon \frac{\partial^2 f(v)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(f'(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \varepsilon \frac{\partial^2 f(v)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f(v)}{\partial x} \right)^2,$$

que es precisamente (50) con $U := f(v)$.

• Resolviendo la ecuación de f obtenemos tres relaciones (equivalentes) entre las soluciones U de (50), u_ε de (49) y v de (48) con constante de difusión $D = \varepsilon$;

$$U := f(v) = -2\varepsilon L n(v), \quad u_\varepsilon = \frac{-2\varepsilon}{v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v = \exp \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon} \int^x u_\varepsilon(t, y) dy \right\}.$$

Este esquema de transformación desde la ecuación del calor hasta la de Burger con viscosidad (49), resumida en la Figura 7, es la llamada transformación de Hopf-Cole.

• Finalmente, recordamos que la solución de la ecuación del calor $\partial_t v = \varepsilon \partial_{xx}^2 v$ en \mathbb{R} para una condición inicial $v_0(x)$ viene dada explícitamente por la convolución con su solución fundamental, esto es

$$G(t, x) = \frac{\exp\left\{-\frac{x^2}{4t\varepsilon}\right\}}{\sqrt{4\pi t\varepsilon}}, \quad v(t, x) = G *_x v_0 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t\varepsilon}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4t\varepsilon}\right\} v_0(y) dy,$$

lo que, insertando la transformación de Hopf-Cole anterior, nos proporciona una solución explícita de (49) con condición inicial u_0 :

$$(51) \quad u_\varepsilon(t, x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{(x-y)}{t} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4t\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon} \int^y u_0(z) dz\right\} dy}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4t\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon} \int^y u_0(z) dz\right\} dy}.$$

• Para obtener la solución de viscosidad evanescente únicamente quedaría tomar límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ en (51). Referimos a [18] para más detalles; aquí solo enunciamos el resultado tal y como nos interesa.

Lema 20. *Dada u_ε solución de de (49) dada por (51), se tiene:*

- i) u_ε converge en $L^1_{loc}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ a una función u .
- ii) El límite u es una solución débil de Burgers (42) con condición inicial u_0 .
- iii) Si u_0 viene dada por (46), entonces el límite es la denominada u_2 en (45).
- iv) u verifica la **condición de entropía**, esto es: para toda función regular y convexa S , y F tal que $F'(u) = uS(u)$, se tiene (en sentido débil):

$$(52) \quad \frac{\partial}{\partial t} S(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \leq 0.$$

- v) Toda solución de Burgers (42) con condición inicial u_0 que cumpla la igualdad anterior coincide c.p.d. con u .

Demostración (Esbozo). Como adelantamos, referimos [18] para el grueso de la demostración; aquí sólo esbozamos ii) e iv) y de manera gráfica iii). Para probar ii), basta escribir la expresión débil de (49) y tomar límite, esto es, para $\phi \in C_0^1([0, T] \times \mathbb{R})$:

$$-\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left(u_\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(u_\varepsilon)^2}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt = \int_0^{\infty} u_0(x) \phi(0, x) dx + \varepsilon \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} u_\varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dt,$$

y usar la convergencia en $L^1_{loc}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ (y algo más) para tomar límites, notando que el último término converge a cero.

Para probar iv), multiplicamos la ecuación (49) por $S'(u)$ y obtenemos:

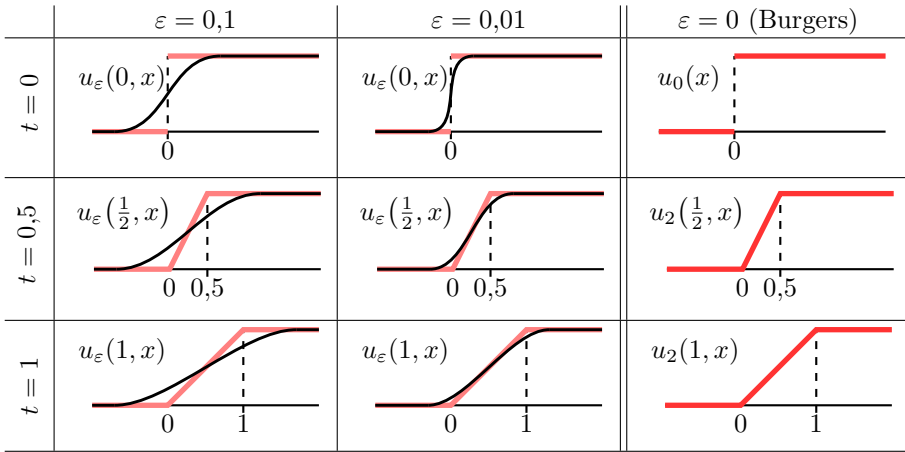
$$\frac{\partial}{\partial t} S(u_\varepsilon) + \overbrace{u_\varepsilon S'(u)}^{F'(u)} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon S'(u) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\varepsilon = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} S(u_\varepsilon) - \varepsilon \overbrace{S''(u)}^{\geq 0} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2,$$

lo que, usando la definición de F , permite escribir el segundo término de la izquierda como $\frac{\partial}{\partial x} F(u_\varepsilon)$ y entonces multiplicando por $\phi \in C_0^1([0, T] \times \mathbb{R})$ e integrando, y notando el signo negativo del último término (para esto es esencial la convexidad de S) obtenemos:

$$- \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left(S(u_\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial t} + F(u_\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt \leq \varepsilon \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} S(u_\varepsilon) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dt,$$

que, tomando límites como en el apartado ii) nos proporciona (en sentido débil) la desigualdad buscada.

Sobre el punto iii) sólo presentamos una idea gráfica de la demostración:



Hemos representado en rojo, en distintos instantes de tiempo $t = 0$, $t = 0,5$ y 1 , las gráficas de la solución explícita de Burgers u_2 descrita en (45) y también, de manera conjunta, con las explícitas (51) de Hopf-Burgers para $\varepsilon = 0,1$ y $0,01$; observamos como las funciones u_ε se acercan a u_2 cuando la viscosidad artificial ε disminuye. \square

Con este resultado completamos esta sección, pues prueba la existencia de soluciones admisibles en el sentido de la definición 19. Pero nos dice dos cosas adicionales: que **sólo hay una** solución que se pueda obtener por el proceso de la viscosidad evanescente, y que esta única solución, además, **viene caracterizada por la desigualdad diferencial** (52) descrita en el apartado iv). A esta “otra” condición para seleccionar soluciones admisibles dedicaremos la siguiente sección.

2.2. Soluciones entrópicas. En esta sección vamos a ver como la condición (52) puede ser utilizada como criterio de unicidad no solo para el modelo de Burger sino también en leyes escalares más generales. Consideremos una ley de conservación genérica escalar de la foma

$$(53) \quad \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0.$$

Diremos que una función $S = S(u)$ es **una entropía** para (53) si es **convexa** y existe otra función $F(u)$, que llamaremos flujo de entropía $F(u)$ tal que

$$F'(u) = f'(u)S'(u), \text{ para toda } u.$$

La idea formal de este par de funciones (S, F) es que cuando u es una solución regular de (53), entonces al multiplicar por $S'(u)$ se obtiene la siguiente ley de conservación:

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0,$$

para lo cual ni siquiera hace falta que S sea convexa. La cuestión que surge entonces es si para soluciones no regulares se verifica la misma identidad; y la respuesta es “no, pero casi”. Concretamente, tal y como nos ha pasado con Burgers, si la solución se obtiene por viscosidad evanescente, en lugar de la igualdad anterior, obtendremos de nuevo la desigualdad diferencial (52). Para verlo basta repetir los pasos de la demostración del Lema 20; partimos de (53) con viscosidad artificial,

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} f(u_\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

multiplicamos por $S'(u_\varepsilon)$ y usamos $F'(u) = f'(u)S'(u)$ para deducir

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} F(u_\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} S(u_\varepsilon) - \varepsilon S''(u) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2,$$

y usamos la convexidad de S para constatar que el último término es negativo, por lo que al tomar límite se obtiene (52), en sentido débil.

Este análisis motiva a la siguiente definición que determina nuestra segunda condición de admisibilidad:

Definición 21. *Una solución débil de (53) es entrópica (admisibile en el sentido de la entropía) si verifica*

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \leq 0,$$

en sentido débil, para cada par (S, F) , donde S es una entropía convexa para (53) y F el correspondiente flujo entrópico (dado por $S'f' = F'$).

Pues bien, al igual que ocurría con la ecuación de Burgers, la solución entrópica es única y, por lo ya probado, coincide con la obtenida por viscosidad evanescente. Este resultado de unicidad de las soluciones entrópicas fue probado por E. Hopf y S. Kruzhkov, aunque de forma completamente independiente, en la segunda mitad del s.XX.

En este punto hay que señalar que ni estas notas son exhaustivas ni se pretende entrar en el análisis de las numerosas cuestiones que han quedado abiertas: la existencia de solución débil, condiciones equivalentes de admisibilidad/unicidad, la simulación numérica de estas soluciones, y un largo etcétera. Nuestro objetivo en estas notas es más bien mostrar el análisis y aplicabilidad de algunos modelos concretos. En lo que a leyes de conservación se refiere se puede profundizar en estos temas en [10, 28, 29, 43] y las referencias contenidas.

No obstante, sería injusto cerrar esta sección sin al menos mencionar a dos autores más. Resaltamos pues otro criterio para discriminar soluciones físicamente

admisibles debido a O. Oleinik; para ella las soluciones admisibles eran soluciones débiles de (53) que verificaban la desigualdad

$$\frac{\partial u}{\partial x} \leq K(t, x),$$

para una cierta función $K(t, x)$ continua en $(0, T] \times \mathbb{R}$ (cuyo ejemplo típico era $1/t$). De nuevo, las soluciones admisibles de Oleinik se pueden obtener como límite por viscosidad evanescente, lo que en definitiva nos muestra que estos tres criterios son equivalentes.

Por último, mencionamos a P. Lax, a quien se debe el nombre de “entropía” para las funciones convexas S , pero sobre todo, quien extendió estos conceptos de soluciones entrópicas obtenidas como límites por viscosidad evanescente a sistemas de leyes de conservación, generalizando, no sin cierta dificultad, los pasos descritos en esta sección.

Ejercicios

13. Ejemplos de no existencia global de soluciones clásicas.

En este ejercicio pretendemos mostrar ejemplos de ecuaciones de transporte donde las soluciones clásicas no existen globalmente por motivos distintos.

- Demuestra que toda solución clásica de la ecuación de transporte:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} u - u^2 = 1,$$

tiene un tiempo máximo de existencia t^* , es decir, la solución $u(t, x)$ tiende a infinito para algún valor de x cuando t se aproxima a t^* .

- Demuestra que el PVI

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) + \rho(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \rho(t, x) = 0, \quad \rho(0, x) = \rho_0(x),$$

tiene tiempo máximo de existencia de solución clásica dado por $t^* \frac{1}{\alpha}$ cuando si $\inf \frac{d\rho_0}{dx}(x) = -\alpha < 0$.

Analiza en cada uno de estos ejemplos, los motivos de la no existencia de solución.

14. Comprueba si las funciones

$$u_1(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < t, \\ -1, & \text{si } -t < x < 0, \\ 0, & \text{en el resto de los casos,} \end{cases}$$

$$u_2(t, x) = \begin{cases} \frac{x}{2t}, & \text{si } t < x^2, \\ 0 & \text{en el resto de los casos,} \end{cases}$$

son ambas soluciones débiles del problema de Cauchy asociado a la ecuación de Burgers.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} u^2(t, x) = 0, \quad \rho(0, x) = \rho_0(x).$$

Teniendo en cuenta que ambos casos $u(0, x) = 0$, ¿cuál crees que sería solución de viscosidad para el PVI asociado? (usa la fórmula (51)).

Análisis cualitativo de modelos cinéticos: ecuación de transporte libre y el sistema de Vlasov-Poisson

En este Capítulo vamos a abordar el estudio de algunos modelos cinéticos de los introducidos en el Capítulo 1 aprovechando que, al haber avanzado en el estudio de los contenidos del curso, se pueden revisar algunos aspectos que se quedaron sin justificar adecuadamente en su momento. En este sentido se comienza el tema mostrando una justificación rigurosa de modelos cinéticos lineales empleando la noción de dualidad. Con posterioridad, se mostrará como la teoría de existencia elaborada en los capítulos anteriores nos permite obtener distintas estimaciones de dispersión para las soluciones de la ecuación de transporte libre y por último nos plantearemos este tipo de propiedades en modelos más complejos como por ejemplo en el caso del sistema de Vlasov-Poisson. En este último caso veremos que, como es de esperar en el caso de interacciones atractivas (conocido como caso gravitacional), no siempre las soluciones tendrán carácter dispersivo y comentaremos resultados conocidos sobre la caracterización de dinámicas alternativas. No obstante, tenemos que mencionar que llegado este punto no podemos proporcionar teorías totalmente cerradas ya que son cuestiones que hoy día siguen abiertas.

1. Obtención de modelos cinéticos (lineales) por dualidad

Antes de comenzar con el análisis objeto de este punto vamos a justificar la deducción de la ecuación cinética de Liouville (8) en la que no quisimos detenernos en el capítulo introductorio.

Si partimos del supuesto de que conocemos exactamente de las posiciones y velocidades $x_i(t)$ y $v_i(t)$ de cada partícula $i = 1, \dots, N$, y que estas son soluciones de las ecuaciones características (7), la distribución de partículas $f(t, x, v)$ que las representa (recordamos que $f(t, x, v)$ es la probabilidad de encontrar una partícula en el instante t en la posición x y con velocidad v) se puede escribir usando una la distribución discreta de probabilidad f_{ex} dada por una suma de *deltas de Dirac*:

$$f_{ex}(t, x, v) = \sum_{i=1}^N \delta_{x-x_i(t)} \delta_{v-v_i(t)},$$

cuyo valor (como probabilidad) es precisamente 1 en los instantes, lugares y velocidades exactos en que hay alguna partícula, esto es $(t, x, v) = (t, x_i(t), v_i(t))$ para algún i , y 0 en otro caso. Matemáticamente, esta delta de Dirac **no es una función** sino una *medida* cuya caracterización fundamental se puede describir operacionalmente como (véase por ejemplo [3] para más información.)

$$(54) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x) \delta_{x-x_0} dx = \phi(x_0), \quad \text{para cualquier función continua } \phi.$$

Y solo con estas observaciones podemos ver que f_{ex} efectivamente debe cumplir la ecuación (8). Para ello, tomamos una función $\phi(x, v)$ derivable arbitraria y, usando (54), deducimos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x, v) f_{ex}(t, x, v) dx dv = \sum_{i=1}^N \phi(x_i(t), v_i(t)).$$

Derivando esta expresión (nótese que la derivabilidad del término izquierdo sería en sentido débil, pero la del de la derecha es clásica, ¡y son iguales!) usando primero la regla de la cadena y después las ecuaciones características (7), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \phi f_{ex} dx dv &= \sum_{i=1}^N x'_i(t) \cdot \nabla_x \phi(x_i(t), v_i(t)) + v'_i(t) \cdot \nabla_v \phi(x_i(t), v_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^N v_i(t) \cdot \nabla_x \phi(x_i(t), v_i(t)) + \frac{F(x_i(t))}{m} \cdot \nabla_v \phi(x_i(t), v_i(t)), \end{aligned}$$

y, usando de nuevo (54), reescribimos la parte de la derecha como sigue

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \phi f_{ex} dx dv = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[v \cdot \nabla_x \phi(x, v) + \frac{1}{m} F(x) \cdot \nabla_v \phi(x, v) \right] f_{ex} dx dv.$$

Pues bien, recordando el concepto de derivada débil (ver Apéndice A), notamos que esta igualdad dice exactamente que

$$\frac{\partial f_{ex}}{\partial t} = -\operatorname{div}_x(v f_{ex}) - \operatorname{div}_v\left(\frac{F(x)}{m} f_{ex}\right) = -v \cdot \nabla_x f_{ex} - \frac{1}{m} F(x) \cdot \nabla_v f_{ex},$$

con todas estas derivadas entendidas *en sentido débil* o, lo que es equivalente, f_{ex} cumple la ecuación de Liouville (8).

Ejercicios

15. En este ejercicio se propone justificar por dualidad que el campo V generado por una masa/carga puntual situada en el origen del sistema de referencia, ver ecuación (10), verifica, en el sentido operacional descrito por (54) la ecuación de Poisson:

$$-\Delta V = C \delta_0.$$

2. Estimaciones de dispersión para el modelo de transporte libre

En este momento vamos a retomar el modelo de transporte libre (9) introducido en el primer capítulo para justificar algunas estimaciones *de dispersión* para sus soluciones. Aunque parezca un poco contradictorio, para las mismas soluciones vamos a poder demostrar que ciertas cantidades se conservan a lo largo del paso del tiempo, lo que no va a ser incompatible con que podamos justificar simultáneamente las partículas del sistema se van a ir separando conforme el tiempo avanza.

De hecho, con anterioridad hemos analizado alguna de estas cantidades conservadas como por ejemplo en el Ejercicio 2 (con $F = 0$), donde se vió que cualquier solución (positiva) de este modelo conserva a lo largo del tiempo su masa total, esto es, $M = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^{2d})}$ (nótese que, al ser positiva, la integral y la norma L^1 coinciden). Esta es una de la muchas normas L^p de la función de distribución que tienen la misma propiedad de invarianza temporal. Sin embargo, como estas partículas van

a tener velocidades iniciales *distintas* al no actuar fuerza alguna sobre ellas lo que vamos a justificar en esta sección es que a tiempos largos se van a ir separando, esto es, se van a dispersar.

Para determinar la evolución de otras cantidades vamos a aprovechar que la Proposición 1 nos asegura que la solución de

$$(55) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = 0 \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3.$$

para una condición inicial $f(0, x, v) = f_0(x, v)$ apropiada, vendría dada por su transporte a lo largo de las curvas características lo que en este caso tan sencillo se plasma en la siguiente fórmula:

$$(56) \quad f(t, x, v) = f_0(x - tv, v).$$

Podemos emplear esta expresión para demostrar que, para estas soluciones, también se conserva a lo largo del tiempo tanto la energía cinética $E_K(t)$ como el momento lineal $q(t)$:

$$\begin{aligned} E_K(t) = E_K(f(t, \cdot, \cdot)) &:= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f(t, x, v) \, dx \, dv, \\ q(t) = q(f(t, \cdot, \cdot)) &:= \int_{\mathbb{R}^6} v f(t, x, v) \, dx \, dv. \end{aligned}$$

Veamos la primera de ellas; basta aplicar el cambio de variable $z = x - tv$ en la variable espacial:

$$\begin{aligned} E_K(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f(t, x, v) \, dx \, dv = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 \int_{\mathbb{R}^3} f_0(x - tv, v) \, dx \, dv \\ &= \left[\begin{array}{l} z = x - tv \\ dz = dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 \int_{\mathbb{R}^3} f_0(z, v) \, dz \, dv = E_K(0). \end{aligned}$$

La segunda es totalmente análoga:

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_{\mathbb{R}^6} v f(t, x, v) \, dx \, dv = \int_{\mathbb{R}^3} v \int_{\mathbb{R}^3} f_0(x - tv, v) \, dx \, dv \\ &= \left[\begin{array}{l} z = x - tv \\ dz = dx \end{array} \right] = \int_{\mathbb{R}^3} v \int_{\mathbb{R}^3} f_0(z, v) \, dz \, dv = q(0). \end{aligned}$$

En función de estas dos y haciendo el mismo cambio de variable, se puede obtener el comportamiento de otras dos cantidades relevantes como son el **momento de orden 2 cruzado** $L(t)$:

$$L(t) = L(f(t, \cdot, \cdot)) := \int_{\mathbb{R}^6} x \cdot v f(t, x, v) \, dx \, dv = L(0) + 2t E_K(0)$$

o el **centro de masas** $\bar{x}(t)$:

$$\bar{x}(t) := \bar{x}(f(t, \cdot, \cdot)) := \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^6} x f(t, x, v) \, dx \, dv = \bar{x}(0) + \frac{t}{M} q(0).$$

Ambas evoluciones se demuestran análogamente, repitiendo el cambio de variable $z = x - tv$ anterior. Para el momento cruzado $L(t)$ escribimos:

$$\begin{aligned} L(t) &= \int_{\mathbb{R}^6} x \cdot v f(t, x, v) dx dv = \int_{\mathbb{R}^6} x \cdot v f_0(x - tv, v) dx dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} (z \cdot v + t|v|^2) f_0(z, v) dz dv = L(0) + 2t E_k(0). \end{aligned}$$

mientras que para el centro de masas queda

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^6} x f(t, x, v) dx dv = \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^6} x f_0(x - tv, v) dx dv \\ &= \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^6} (z + tv) f_0(z, v) dz dv = \bar{x}(0) + \frac{t}{M} q(0). \end{aligned}$$

En dimensión $N = 1$ esta propiedad se puede visualizar en la Figura 1, donde hemos representado en el eje vertical la **densidad de masa** asociada a f

$$\rho(t, x) := \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv$$

y en el plano (t, x) la línea recta que sigue el centro de masas.

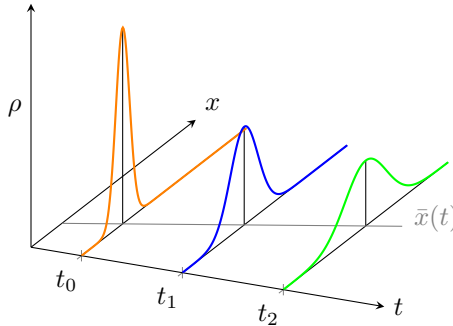


FIGURA 1. Representación de la densidad $\rho(t, x)$ y desplazamiento lineal del centro de masas $\bar{x}(t)$.

Usando estas cantidades vamos a poder justificar estimaciones de dispersión para las soluciones de esta ecuación, esto es, **indicadores de que las partículas descritas por este modelo tienden a separarse espacialmente según avanza el tiempo**. Para ello vamos a describir cantidades que nos indiquen el nivel de concentración espacial de las partículas, por lo que se definirán solo **en términos de la función de densidad** $\rho(t, \cdot)$ en lugar de toda la función de distribución f . Nótese que si pensamos en sistemas con un número finito de partículas el que estas se separen no implica que por ello desaparezcan partículas del sistema ni varíen su energía o momento lineal, lo que vendría a corresponderse con el carácter conservativo de M , E_K o q . Esto explica el hecho, quizás poco intuitivo en una primera aproximación, de que sistemas dispersivos puedan tener cantidades globalmente conservadas.

Siguiendo la terminología introducida en [12] vamos a deducir distintos tipos de estimaciones, una que denominaremos de dispersión fuerte y otra que denominaremos de dispersión estadística.

Definición 22 (Dispersión fuerte). *Diremos que una solución del sistema (55) es fuertemente dispersiva si para algún $p > 1$ la correspondiente función de densidad verifica*

$$(57) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\rho(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Notemos que la propiedad anterior es imposible que se dé para $p = 1$ ya que ese caso corresponde con la masa total M que sabemos se conserva a lo largo del tiempo. La anterior definición puede ser poco intuitiva por lo que vamos a justificar que, caso de que sea cierta, la cantidad de partículas que van a estar en una región del espacio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (de medida finita) va a tender a cero con el avance del tiempo. Concretamente, llamando 1_Ω a la función característica del conjunto Ω y usando la desigualdad de Hölder se, tiene que:

$$(58) \quad \int_{\Omega} \rho(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} 1_\Omega(x) \rho(t, x) dx \leq |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \|\rho(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

En la Figura 2 mostramos gráficamente este hecho en dimensión $N = 1$.

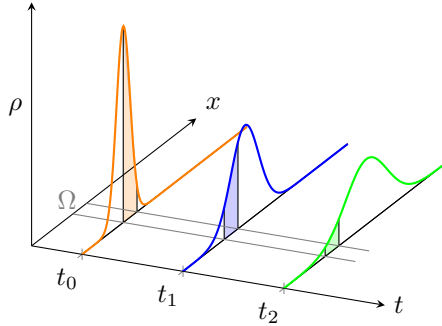


FIGURA 2. Dispersión fuerte. El área mide la cantidad de partículas en la región Ω , que con el tiempo tiende a ser nula.

Aunque la dispersión fuerte de las soluciones de (55) se puede deducir suponiendo distintas hipótesis sobre la **condición inicial** en estas notas vamos a dar solo el siguiente resultado.

Lema 23. *Sea una solución f de la ecuación de transporte libre (55) con condición inicial $f(0, x, v) = f_0(x, v) \geq 0$ integrable. Si suponemos que además f_0 está acotada, y tiene soporte compacto en espacio, esto es, existe $R > 0$ tal que $f_0(x, v) = 0$ siempre que $|x| > R$ y sea cual sea $v \in \mathbb{R}^3$, entonces hay dispersión fuerte con $p = \infty$ y además, para cada región Ω de medida finita, obtendremos*

$$\int_{\Omega} \rho(t, x) dx \leq |\Omega| \|\rho(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{4\pi R^3 |\Omega|}{3} \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} \frac{1}{t^3}.$$

Demostración. En ese caso se puede obtener la siguiente estimación uniforme sobre la densidad:

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv = \int_{|x-tv| < R} f_0(x-tv, v) dv \\ &= \int_{|x/t-v| < R/t} f_0(x-tv, v) dv \leq \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R}{t}\right)^3 \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} \end{aligned}$$

que trivialmente nos permite deducir la dispersión fuerte (57) de las soluciones del modelo de transporte libre cuando $p = \infty$. Combinando esta estimación con (58) para $p = \infty$, podemos estimar la cantidad de partículas en la región Ω y concluir la demostración. \square

El otro concepto de dispersión, la estadística, en lugar de utilizar la norma L^p como indicador, se basa en la varianza (estadística) de la función de densidad (normalizada), que es propiamente una medida de dispersión. Concretamente, definimos el **operador varianza** como

$$(59) \quad \begin{aligned} \langle (\Delta x)^2 \rangle(t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} |x - \bar{x}(t)|^2 \frac{\rho(t, x)}{M} dx = \int_{\mathbb{R}^6} |x - \bar{x}(t)|^2 \frac{f(t, x, v)}{M} dx dv \\ &= \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f(t, x, v) dx dv - \bar{x}(t)^2 \end{aligned}$$

donde la segunda identidad se conoce como fórmula de König-Huygens en literatura francesa y como teorema de traslación de Steiner en la germana. Y ya podemos hacer nuestra definición.

Definición 24 (Dispersión estadística). *Diremos que una solución de una ecuación cinética es estadísticamente dispersiva cuando*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle (\Delta x)^2 \rangle = +\infty.$$

Recordemos que la varianza es una medida de dispersión con respecto a la media que, en nuestro caso, es el centro de masas. Por lo tanto, lo que hace es, independientemente de *dónde* estén las partículas, medir cuan dispersas están las partículas con respecto al centro de masas en cada instante. Veamos que las soluciones de la

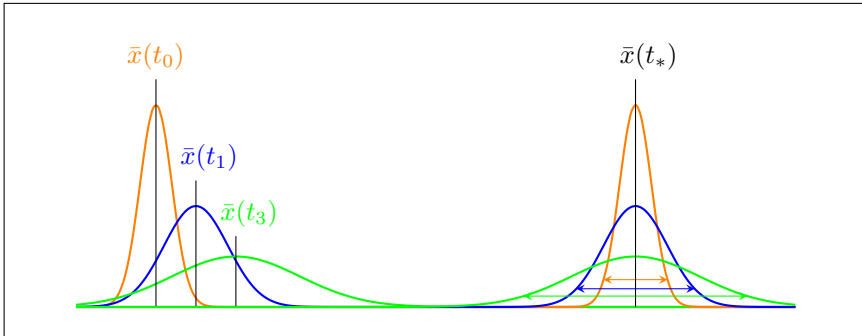


FIGURA 3. Dispersión estadística. Representación de la varianza, centrando en el centro de masas, como medida de dispersión en tiempo.

ecuación libre van a ser también estadísticamente dispersivas.

Lema 25. *Sea una solución f de la ecuación de transporte libre (55) con condición inicial $f(0, x, v) = f_0(x, v) \geq 0$ integrable y con varianza finita. Entonces f es estadísticamente dispersiva; concretamente, existen constantes reales $a_2 > 0$, a_1 y a_0 tales que:*

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle(t) = a_2 t^2 + a_1 x + a_0.$$

Demostración. Gracias a (59) y que ya sabemos como evoluciona el centro de masas, únicamente nos haría falta determinar la evolución de $\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 \rho(t, x) dx$. Para ello, usamos la siguiente igualdad trivial:

$$|x|^2 = x \cdot x = (x - tv) \cdot (x - tv) + 2t x \cdot v - t^2 |v|^2,$$

para deducir directamente que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 \rho(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f_0(x, v) dx dv + 2tL(t) - 2t^2 E_K(t).$$

Usando esta expresión en el operador varianza y las correspondientes evoluciones temporales de las cantidades que aparecen, se obtiene la expresión polinómica buscada, concretamente

$$\begin{aligned} \langle (\Delta x)^2 \rangle(t) &= t^2 \left(2 \frac{E_K(0)}{M} - \frac{|q|^2}{M^2} \right) \\ &+ t \left(2 \frac{L(f_0(\cdot, \cdot))}{M} - 2\bar{x}(f_0(\cdot, \cdot)) \cdot \frac{q}{M} \right) + \langle (\Delta x)^2 \rangle(0) \end{aligned}$$

cuyo coeficiente líder estrictamente positivo (ver Ejercicio 16). Por tanto, diverge cuando $t \rightarrow \infty$, esto es, las soluciones son estadísticamente dispersivas. \square

Hemos visto como, en el caso de la ecuación de transporte libre, ciertas cantidades (conservadas o bien momentos de los que conocemos su evolución temporal) nos permiten deducir estimaciones de dispersión que nos indican que las partículas del sistema se van a separar a tiempos largos. Es verdad que en este primer ejemplo hemos hecho uso de la expresión explícita (56) de la solución, aunque veremos en el siguiente punto del tema que, en el caso del sistema de Vlasov-Poisson, donde no hay una expresión explícita de dichas soluciones, también podremos dar información de tendencias de su comportamiento cualitativo bajo ciertas hipótesis.

Ejercicios

16. Demuestra que, en general, la cantidad

$$2 \frac{E_K(f_0(\cdot, \cdot))}{M} - \frac{|q|^2}{M^2}$$

es positiva, salvo que todas las partículas viajen exactamente a la misma velocidad.

Indicación: Considera para ello una reformulación de esta cantidad empleando para ello la fórmula de König-Huygens vista en (69).

17. Demuestra que se puede justificar una estimación de dispersión fuerte si la condición inicial $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^3, L^\infty(\mathbb{R}^3))$, esto es, si

$$\int_{\mathbb{R}^3} \|f_0(x, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} dx < \infty.$$

3. Análisis cualitativo de soluciones del sistema de Vlasov-Poisson

Tal y como se comentó en el capítulo introductorio de estas notas, el sistema de Vlasov-Poisson VP, también conocido como Boltzman-Poisson sin colisiones,

responde a la siguiente expresión

$$(60) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_v f = 0, \\ \Delta_x V = 4\pi\gamma\rho, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(t, x) = 0. \end{cases}$$

donde la constante γ que aparece en la segunda ecuación, la ecuación de Poisson, puede tomar los valores $\gamma = 1$ o $\gamma = -1$ según si las fuerzas de interacción consideradas (en este caso $F = -\nabla V$) sean de tipo **atractivo** o **repulsivo** respectivamente (también llamadas, newtonianas o coulombianas, respectivamente). Es conocido que la solución de la ecuación de Poisson en dimensión $N = 3$ admite la siguiente expresión integral

$$(61) \quad V(t, x) = -\gamma \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(t, y)}{|x - y|} dy = -\gamma \frac{1}{|x|} * \rho$$

esto es, admite una expresión en forma de convolución. La condición que aparece en la ecuación de Poisson sobre el comportamiento de V a grandes distancias ($|x| \rightarrow \infty$) es necesaria para seleccionar (61) de entre todas las soluciones (si V es solución entonces $V + K$ con $K \in \mathbb{R}$ también es solución, véase Corolario 68 en el Apéndice A). Algunas propiedades de estos potenciales serán necesarias para justificar con rigor algunas de los resultados de este capítulo, especialmente las integraciones por partes, como se puede apreciar por ejemplo en el Ejercicio 19.

Nota 26. *A partir de esta expresión es fácil entender por qué hablamos de carácter atractivo o repulsivo. Cuando la densidad ρ que genera el potencial V es una carga/masa puntual situada en x_0 , es decir, cuando $\rho = \delta_{x-x_0}$ es una delta de Dirac centrada en un punto x_0 , entonces (recordemos la forma operacional (54 de la delta de Dirac) el potencial dado por (61) es $V(x) = -\gamma \frac{1}{|x-x_0|}$, y por lo tanto, la fuerza asociada en cada punto x del espacio viene dada por el campo*

$$F(x) = -\nabla V(x) = \gamma \nabla \frac{1}{|x - x_0|} = -\gamma \frac{x - x_0}{|x - x_0|^3} = \frac{\overbrace{1}^{\text{módulo}}}{|x - x_0|^2} \frac{\overbrace{\gamma(x_0 - x)}^{\text{dirección}}}{|x - x_0|},$$

que precisamente apunta hacia el punto x_0 cuando $\gamma = 1$ (es atractiva) y hacia fuera del punto x_0 cuando $\gamma = -1$ (es repulsiva); ver Figura 4.

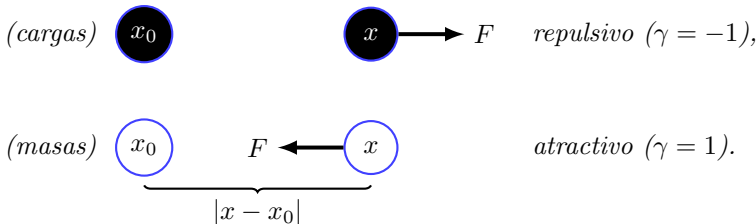


FIGURA 4. Representación de la fuerza ejercida sobre el punto x por una carga/masa puntual situada en el punto x_0 .

Vamos a ver en esta Sección que el carácter atractivo o repulsivo de VP va a ser determinante a la hora de estudiar su comportamiento cualitativo, como no puede ser de otra manera, si se tiene en cuenta el tipo de sistemas que se modelan. En

el caso de que tengamos electrones en un material conductor, estos al ser cargas del mismo signo, van a intentar estar siempre lo más separadas posible por lo que es de esperar que el sistema sea dispersivo. Sin embargo cuando las fuerzas de interacción sean de tipo atractivo, será necesario analizar el balance entre las velocidades iniciales de estas partículas y las fuerzas que actúan sobre ellas para poder decir algo sobre la naturaleza del sistema.

En este punto de las notas no nos vamos a parar a analizar con detalle el problema de valores iniciales asociado a este sistema cuando se complementa una condición inicial apropiada. Aunque son varias las teorías de existencia de solución que se han desarrollado para este sistema para nuestros objetivos es suficiente con indicar que en [Th. 6.1][41] podemos encontrar un resultado de existencia y unicidad de solución clásica (local) para condiciones iniciales de clase 1 con soporte compacto. El hecho de que estas soluciones tengan soporte compacto nos va simplificar muchos cálculos cuando se aplique integración por partes ya que el término de integración en la frontera del dominio será nulo. Sin embargo, hemos de observar que aunque la solución f sea de soporte compacto, el potencial V no tiene por qué serlo por lo que hay que analizar el comportamiento de esas integrales (ver Ejercicio 19).

Ejemplos típicos de sistemas modelados por este sistema de ecuaciones son los sistemas electrostáticos, como un plasma de electrones en un material conductor o gravitacionales como galaxias o cúmulos de galaxias.

3.1. Cantidades conservadas. A continuación se revisan algunas de las cantidades conservadas por las soluciones de VP con el fin de presentar los resultados que se obtendrán. En virtud del Ejercicio 2, aplicable para soluciones de VP clásicas, sabemos que se mantiene constante el valor de las normas

$$(62) \quad \|f(t, \cdot, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^6)}, \quad p \in [1, \infty].$$

En el caso particular $p = 1$ esto nos indica que las soluciones preservan la masa total del sistema $M = \int_{\mathbb{R}^6} f(t, x, v) dx dv$.

En el siguiente resultado veremos que, al igual que en caso de transporte libre, el momento lineal $q(t) := \int_{\mathbb{R}^6} v f(t, x, v) dx dv$, es una cantidad conservada por las soluciones de Vlasov-Poisson pero que, sin embargo, la energía cinética $E_K(t)$ no se mantiene constante. En realidad, hay que añadirle otro término, la **energía potencial** $E_P(t)$, que incorpora las interacciones entre partículas, dando lugar a la **energía total** asociada a f :

$$E(t) := E_K(t) + E_P(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f(t, x, v) dx dv - \frac{1}{8\pi\gamma} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla V|^2 dx.$$

Antes de abordar la conservación, es interesante hacer un par de comentarios sobre esta energía. El primero es que, en el caso repulsivo o electrostático ($\gamma = -1$), $E_P(t)$ es siempre positiva por lo que la energía total tomará siempre valores positivos (para aquellas soluciones para las que esté bien definida). El segundo comentario es que se puede reformular el término de energía potencial de dos formas adicionales, integrando por partes (ver Ejercicio 19) y empleando (61) de la siguiente manera

$$(63) \quad E_P(t) = \frac{1}{8\pi\gamma} \int_{\mathbb{R}^3} V \Delta V dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V \rho dx = \frac{-\gamma}{2} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\rho(t, y)\rho(t, x)}{|x - y|} dy dx.$$

Lema 27. *Sea f una solución regular de VP (60) con condición inicial $f_0 \geq 0$. Entonces tanto la energía total $E(t)$ como el momento lineal $q(t)$ se conservan, por*

lo que, en adelante, los notaremos simplemente E y q . Además, el centro de masas sigue una trayectoria recta $\bar{x}(t) = \bar{x}(0) + qt/M$.

Demostración. A diferencia del caso de transporte libre, en este caso no tenemos una expresión explícita del transporte característico, por lo que no podemos emplear una expresión explícita de la solución. Por eso para justificar que la energía se conserva vamos a usar las ecuaciones directamente para hacer el cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_K(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) \, dx \, dv && \text{usamos la ecuación} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 \left(-v \cdot \nabla_x f + \nabla_x V \cdot \nabla_v f \right) \, dx \, dv && \text{integramos por partes} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^6} \overbrace{\operatorname{div}_x(|v|^2 v)}^{=0} f - \nabla_x V \cdot \nabla_v (|v|^2) f \, dx \, dv = - \int_{\mathbb{R}^6} \nabla_x V \cdot v f \, dx \, dv. \end{aligned}$$

Por otro lado, para la energía potencial, hacemos cálculos similares usando además de la última expresión dada en (63):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_P(t) &= -\frac{\gamma}{2} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, y) \rho(t, x) + \rho(t, y) \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x)}{|x - y|} \, dy \, dx \\ &= -\gamma \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\rho(t, y) \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x)}{|x - y|} \, dy \, dx = \int_{\mathbb{R}^6} V(t, x) \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) \, dv \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} V (-v \cdot \nabla_x f + \nabla_x V \cdot \nabla_v f) \, dv \, dx = \int_{\mathbb{R}^6} v \cdot \nabla_x V f \, dv \, dx, \end{aligned}$$

lo que nos permite deducir que $\frac{d}{dt} E = 0$. Se deja propuesto en el Ejercicio 18, mediante un argumento análogo, la invarianza temporal del momento lineal $q(t)$. Por último, para el centro de masas, razonamos como sigue :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{x}(t) &= \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^6} x \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) \, dx \, dv = \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^6} x (-v \cdot \nabla_x f + \nabla_x V \cdot \nabla_v f) \, dx \, dv \\ (64) \quad &= \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^6} v f(t, x, v) \, dx \, dv = \frac{q}{M}. \end{aligned}$$

por lo que, de nuevo, tenemos una evolución lineal. \square

3.2. Identidad de dispersión y Ley Pseudo-conforme. Las estimaciones de dispersión que se van a poder probar para soluciones de VP van a ser consecuencia de dos igualdades: la identidad de dispersión y la ley pseudo-conforme que, además, veremos que son equivalentes pues ambas derivan del siguiente resultado:

Lema 28. *Las soluciones de VP (en las condiciones de regularidad descritas) verifican las siguientes igualdades:*

$$(65) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f(t, x, v) \, dx \, dv = 2 \int_{\mathbb{R}^6} v \cdot x f \, dx \, dv = 2L(t),$$

$$(66) \quad L'(t) = E + E_K(t),$$

$$(67) \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f(t, x, v) \, dx \, dv = 2E + 2E_K(t),$$

La segunda igualdad recibe el nombre de identidad de dilatación.

Demostración. Primero probamos fácilmente (65):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f(t, x, v) \, dx \, dv & \quad \text{metemos la derivada y usamos la ecuación} \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 (-v \cdot \nabla_x f + \nabla_x V \cdot \nabla_v f) \, dx \, dv \quad \text{integramos por partes} \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^6} v \cdot x f \, dx \, dv = 2L(t), \end{aligned}$$

lo que concluye (65). Pasamos a probar la identidad de dilatación (66):

$$\begin{aligned} L'(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^6} v \cdot x f \, dx \, dv \quad \text{metemos la derivada y usamos la ecuación} \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} v \cdot x (-v \cdot \nabla_x f + \nabla_x V \cdot \nabla_v f) \, dx \, dv \quad \text{partes y Poisson} \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f \, dx \, dv - \frac{1}{4\gamma\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (x \cdot \nabla_x V) \Delta V \, dx \quad \text{ver Ejercicio 19} \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f \, dx \, dv - \frac{1}{8\gamma\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla V|^2 \, dx \quad \text{definición de } E_K \text{ y } E_P \\ &= E + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f \, dx \, dv = E + E_K(t). \end{aligned}$$

Por último (67) se obtiene directamente a partir de las dos anteriores. \square

Como decíamos, la identidad (67) permite derivar una identidad conocida como ley pseudo-conforme, que fue propuesta tanto por R. Illner y G. Rein en [25], como por B. Perthame en [36] de manera independiente.

Lema 29 (Ley pseudo-conforme). *Sea f una solución clásica del sistema VP con masa, energía y dispersión espacial finitas. Entonces, dicha solución verifica:*

$$(68) \quad \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^6} |x - tv|^2 f(t, x, v) \, dx \, dv - \frac{t^2}{4\pi\gamma} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla V|^2 \, dx \right) = \frac{-t}{4\pi\gamma} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla V|^2 \, dx.$$

Demostración. Notemos en primer lugar que la identidad (65) combinada con $|x - tv|^2 = |x|^2 - 2tx \cdot v + t^2|v|^2$ nos permite escribir

$$\int_{\mathbb{R}^6} |x - tv|^2 f \, dx \, dv = \int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f \, dx \, dv - t \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f \, dx \, dv \right) + t^2 \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f \, dx \, dv.$$

Con esto podemos comenzar nuestro cálculo como sigue:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^6} |x - tv|^2 f(t, x, v) \, dx \, dv - \frac{t^2}{4\pi\gamma} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla V|^2 \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f \, dx \, dv - t \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f \, dx \, dv \right) + t^2 \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f \, dx \, dv - \frac{t^2}{4\pi\gamma} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla V|^2 \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f \, dx \, dv - t \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f \, dx \, dv \right) + 2t^2 E = I(t) - tI'(t) + 2t^2 E, \end{aligned}$$

donde hemos denotado $I(t) = \int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f \, dx \, dv$ por simplificar (y por aquello de que es un momento de Inercia). Si derivamos finalmente respecto a t , obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(I(t) - tI'(t) + 2t^2 E \right) = I'(t) - I'(t) - tI''(t) + 4tE = -tI''(t) + 4tE.$$

Por último, usando (67), esto es, $I''(t) = 2E + 2E_K(t)$, y la definición de energía $E = E_K(t) + E_P(t)$, deducimos fácilmente

$$-tI''(t) + 4tE = 2tE - 2tE_K(t) = 2tE_P(t) = -\frac{t}{4\pi\gamma} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla V|^2 dx,$$

que es la expresión (68) buscada. \square

En segundo lugar vamos a encontrarnos la identidad de dispersión, que aprovecha (67) para relacionar el operador varianza con el operador análogo en velocidades, que se escribe como,

$$(69) \quad \langle (\Delta v)^2 \rangle (t) := \int_{\mathbb{R}^3} \left| v - \frac{q}{M} \right|^2 \frac{f}{M} dx = \frac{2E_K(t)}{M} - \left| \frac{q}{M} \right|^2 \\ = \frac{1}{M} \left[\int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f(t, x, v) dx dv - \frac{1}{M} \left| \int_{\mathbb{R}^6} v f(t, x, v) dx dv \right|^2 \right],$$

donde identificamos de nuevo la fórmula de König-Huygens para la varianza, análoga a (59) en x , y también hemos usado las definiciones de q y E_K .

Lema 30 (Identidad de dispersión). *Sea f una solución clásica del sistema VP con masa, energía y dispersión espacial finitas. Entonces, dicha solución verifica:*

$$(70) \quad \frac{d^2}{dt^2} \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (\Delta v)^2 \rangle + \frac{2}{M} E - \left| \frac{q}{M} \right|^2.$$

Demostración. Usando (64) deducimos, derivando de nuevo, que

$$\frac{d^2}{dt^2} |\bar{x}(t)|^2 = 2 \frac{q}{M} \cdot \frac{d}{dt} \bar{x}(t) = 2 \left| \frac{q}{M} \right|^2,$$

lo que, a partir de la fórmula de König-Huygens (59) y usando la identidad (67), permite escribir

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{1}{M} I''(t) - 2 \left| \frac{q}{M} \right|^2 = \frac{2}{M} E + \frac{2}{M} E_K(t) - 2 \left| \frac{q}{M} \right|^2.$$

Finalmente, la expresión (69) permite trivialmente deducir (70). \square

A continuación emplearemos estas identidades para deducir estimaciones de dispersión.

3.3. Condición para la dispersión estadística. La identidad de dispersión (70) nos indica que si una solución de VP (tanto en el caso gravitacional como en el electrostático) verifica

$$(71) \quad \frac{2}{M} E > \left| \frac{q}{M} \right|^2,$$

entonces dicha solución va a tener dispersión estadística. Esto es debido a que las cantidades involucradas en la condición (71), masa, momento lineal y energía, se conservan para las soluciones de VP, por lo que si se verifica inicialmente, entonces se va a verificar en todo instante de tiempo, y como la cantidad $\langle (\Delta v)^2 \rangle$ es siempre positiva, (70) permite afirmar que la varianza $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ tendría segunda derivada estrictamente positiva.

Una vez hecha esta observación, a partir del Ejercicio 16 se puede justificar rápidamente que la condición (71) se va a verificar para toda condición inicial en el

caso del sistema electrostático $\gamma = -1$, mientras que en el caso gravitacional $\gamma = 1$ no siempre ha de ser así. En este punto se constata la relevancia del signo de la energía potencial en ambas situaciones.

3.4. Dispersión fuerte en el caso electrostático. Dicho esto, en el caso del sistema de Vlasov–Poisson con potencial repulsivo ($\gamma = -1$) y siguiendo las ideas desarrolladas en [25, 36], veremos que las soluciones además presentan dispersión fuerte. Más concretamente el resultado que se va a demostrar es el siguiente.

Lema 31 (Dispersión fuerte, caso electrostático). *Sea una solución del sistema de Vlasov–Poisson electrostático ($\gamma = -1$) con dato inicial $f_0 \geq 0$ y acotado. Entonces, la solución asociada va a ser fuertemente dispersiva ya que, fijado $t_0 > 0$, existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho^{\frac{5}{3}}(t, x) dx \leq C (\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)})^{\frac{2}{3}} \frac{1+t}{t^2}, \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

Demostración. Si definimos de forma auxiliar la función siguiente:

$$y(t) := 2t^2 E_P(t) = \frac{-t^2}{4\pi\gamma} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla V|^2(t, x) dx \geq 0,$$

e integramos la ley pseudo-conforme (68) entre 0 y t , obtenemos

$$(72) \quad \overbrace{\int_{\mathbb{R}^6} |x - tv|^2 f dx dv}^{\geq 0} + y(t) = \int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f_0(x, v) dx dv + \int_0^t \frac{y(s)}{s} ds.$$

Si nos deshacemos del primer término (no negativo) y tomamos la constante

$$C_0 := \int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f_0(x, v) dx dv + \int_0^{t_0} \frac{y(s)}{s} ds,$$

para algún $t_0 > 0$ cualquiera, entonces se deduce la desigualdad integral siguiente:

$$y(t) \leq C_0 + \int_{t_0}^t \frac{y(s)}{s} ds \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

por lo que estamos en condiciones de aplicarle a la función $y(t)$ el Lema de Gronwall (Teorema 46 del Apéndice A) que nos dice que

$$y(t) \leq C_0 \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{s} ds\right) = \frac{C_0}{t_0} t, \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

Pues bien, es en el caso electrostático¹, cuando $\gamma = -1$ e $y(t) \geq 0$, que esta estimación nos da información; concretamente implica que la energía potencial (que es positiva) es una cantidad convergente a cero como sigue

$$(73) \quad \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla V|^2(t, x) dx \stackrel{\gamma=-1}{=} \frac{4\pi y(t)}{t^2} \leq \frac{4\pi C_0}{t_0} \frac{1}{t} \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

Si ahora, se usa la cota (73) directamente sobre el término de la derecha de (72), se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^6} |x - tv|^2 f dx dv + \overbrace{y(t)}^{\geq 0} \leq C_0 + \frac{C_0}{t_0} \int_{t_0}^t ds = \frac{C_0}{t_0} t, \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

¹Nótese que la misma estimación en el caso gravitacional no aporta información ninguna.

lo que permite establecer la siguiente estimación lineal para todo $t \geq 0$:

$$(74) \quad \int_{\mathbb{R}^6} |x - tv|^2 f dx dv \leq C_1(1+t), \quad \forall t \in [0, \infty),$$

para cierta constante $C_1 > 0$. A partir de la cota anterior seremos capaces de obtener estimaciones en norma $L^{\frac{5}{3}}$ sobre la densidad ρ , como reza el enunciado del lema. En primer lugar, tomamos un $R > 0$ cualquiera, y acotamos de la siguiente manera, dividiendo la integral que la define en dos trozos:

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv = \int_{|x-tv| < R} f(t, x, v) dv + \int_{|x-tv| \geq R} f(t, x, v) dv \\ &\leq \int_{|x/t-v| < R/t} f(t, x, v) dv + \int_{|x-tv| \geq R} \frac{|x-tv|^2}{R^2} f(t, x, v) dv \\ &\leq \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R}{t}\right)^3 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} + \left(\frac{t}{R}\right)^2 \frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}^3} |x-tv|^2 f(t, x, v) dv. \end{aligned}$$

Puesto que la cota es cierta para cualquier valor de $R > 0$ y $t > 0$, en particular será también válida para el menor² valor que toma el término de la derecha cuando se varía $r := R/t$, esto es,

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &\leq \min_{r>0} \left\{ r^3 \left(\frac{4\pi}{3} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)}\right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}^3} |x-tv|^2 f(t, x, v) dv\right) \right\} \\ &= C_2 \left(\frac{4\pi}{3} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)}\right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}^3} |x-tv|^2 f(t, x, v) dv\right)^{\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

para cierta constante $C_2 > 0$. Finalmente, se puede emplear esta estimación para justificar dispersión fuerte empleando la norma $L^{\frac{5}{3}}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \rho^{\frac{5}{3}}(t, x) dx &\leq C_2^{5/3} \left(\frac{4\pi}{3} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}^6} |x-tv|^2 f(t, x, v) dv dx \\ &\leq C (\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)})^{\frac{2}{3}} \frac{(1+t)}{t^2}, \quad \forall t \in [0, \infty), \end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad, se ha empleado la estimación (74). Por último, como ya vimos al principio en (62), $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} = \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)}$ y queda demostrado. \square

Los resultados obtenidos anteriormente son totalmente razonables en el caso electrostático, ya que un conjunto de cargas eléctricas de igual signo en un conductor, supuesto infinito, van a tender a alejarse las unas de las otras debido a las fuerzas repulsivas. No obstante, en cuando las interacciones son atractivas como ocurre en el caso gravitacional la situación cambia y dependerá de como esté el sistema inicialmente.

Llegados este momento, se observa que mientras que en el caso electrostático se concluye que la única dinámica posible es la dispersiva, en el caso gravitacional la respuesta no es tan contundente y únicamente se tiene una respuesta parcial, esto es, hay soluciones dispersivas para ciertas condiciones iniciales. Esto es debido a que en el caso gravitacional existen soluciones que no pueden ser dispersivas como

²Minimizando $h(r) = ar^3 + \frac{b}{r^2}$ se obtiene $h(r) \geq h\left(\sqrt[5]{\frac{2b}{3a}}\right) = 5\left(\frac{a^2 b^3}{2^2 3^3}\right)^{1/5}$.

por ejemplo soluciones estacionarias o bien soluciones oscilatorias (periódicas en tiempo) por lo que la dinámica es más rica. Esto es totalmente razonable si se recuerda que en este caso estamos modelando un sistema de partículas a semejanza de lo que ocurre en una galaxia. Si se quiere profundizar en esta y otras cuestiones relacionadas con esta temática se recomienda la lectura de [12] así como de las referencias de ese trabajo.

Aunque los resultados aquí reproducidos son específicos para los modelos de transporte libre y de Vlasov-Poisson ideas similares dan resultados en otros modelos como por ejemplo en el modelo de Boltzmann [19, 36].

Ejercicios

18. Justifica que en el caso de las soluciones de la ecuación de Vlasov-Poisson el momento lineal es invariante.

Indicación: emplea un argumento análogo al usado para justificar la conservación de la Energía.

19. Prueba que

$$\int_{\mathbb{R}^3} (x \cdot \nabla_x V) \Delta V \, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla V|^2 \, dx.$$

Indicación: integra por partes dos veces, una de cada derivada. Observa que los los términos de frontera se pueden cancelar gracias a las siguientes estimaciones

$$V(t, x) = O(|x|^{-1}), \quad \nabla V(t, x) = O(|x|^{-2}) \text{ para } |x| \rightarrow \infty,$$

válidas para densidades ρ de clase 1 con soporte compacto [41, Preliminaries].

20. Identidad de virial. Demuestra, a partir de la identidad de dilatación (66), que si existe una solución estacionaria del Vlasov-Poisson con soporte compacto entonces ha de verificar la identidad virial:

$$E(f) = -E_K(f)$$

y por tanto ha de tener energía negativa.

21. Demuestra que las soluciones de VP verifican la invarianza galileana, esto es, dada $f(t, x, v)$ solución de VP para la condición inicial $f_0(x, v)$ entonces para todo $u \in \mathbb{R}^3$ la función $f^u(t, x, v) = f(t, x - tu, v - u)$ es la solución de VP para la condición inicial $f_0^u(x, v) = f_0(x, v - u)$.
22. Demuestra que las definiciones de soluciones (fuertemente/estadísticamente) dispersivas son invariante por transformaciones galileanas. Esto es, si una función es dispersiva entonces cualquier transformación galileana suya lo es también.³

³Observa que los operadores que se usan para definir estas nociones se aplican sobre las funciones de densidad y además son invariantes por traslaciones espaciales.

Existencia y unicidad de la ecuación de Euler 2-D

En este capítulo vamos a presentar un estudio matemático completo de existencia y unicidad de otro de los modelos de transporte que introdujimos en el Capítulo 1, la ecuación de Euler. En la primera parte, vamos a deducir con más detalle las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido, para así comprender mejor el significado de cada una de las incógnitas involucradas en él. Aunque no sea objeto del estudio matemático posterior, pretendemos dar una visión más general sobre estos modelos, sus particularidades, y las diferencias entre unos y otros.

Tras ello, en la segunda parte, nos centraremos en la ecuación de Euler en dos dimensiones que, como veremos y entenderemos, es la ecuación que rige el movimiento de un fluido homogéneo e incompresible en 2-D. Haremos un estudio completo y riguroso de existencia y unicidad, centrándonos en la propiedad clave que hace tan especial este modelo de transporte: las características asociadas verifican un PVI cuya ecuación asociada, proporcionada por el campo de velocidades del fluido, no será localmente lipschitziana, por lo que no será aplicable el Teorema de Picard-Lindelöf. Sin embargo, sí tendremos unicidad gracias a una propiedad parecida que es demostrable solo en 2-D: el campo de velocidades del fluido en 2-D sí es *logarítmico-lipschitziano*, y esta particularidad será útil, no solo para la demostración de la unicidad, sino también para la existencia de solución y la continuidad de dicho campo. El estudio original y completo de existencia y unicidad se puede encontrar en [50].

Pasamos, aprovechando las herramientas introducidas en capítulos anteriores, a deducir las ecuaciones de los fluidos.

1. Las ecuaciones de los fluidos: Euler y Navier-Stokes

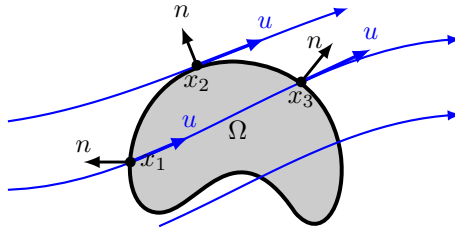
En esta primera parte trabajaremos en un fluido en \mathbb{R}^N , para darle mayor generalidad, aunque debemos tener en mente los casos más relevantes $N = 3$ y $N = 2$; el primero por ser el espacio natural de existencia de cualquier fluido real, y el segundo, porque es en el que nos vamos a centrar en la segunda parte. En la Sección §1.1.1 ya hablamos de la conservación de la masa (en una dimensión) asociada a un *gas* (un tipo de fluido) que, de hecho, es nuestra primera ecuación de los fluidos, pero que, al estar deducida en 1-D, tal vez no permita apreciar algunos elementos interesantes del modelo. Por ello, vamos a volver a hacer esta deducción en \mathbb{R}^N .

1.1. Primera ecuación de los fluidos: conservación de la masa. Para comenzar, consideramos un fluido genérico que se mueve en \mathbb{R}^N y cuya densidad viene dada por una función no negativa $\rho(t, x)$. Del mismo modo, vamos a llamar $u(t, x) \in \mathbb{R}^N$ a la velocidad de dicho fluido en cada instante de tiempo t y en cada posición x de \mathbb{R}^N . Al igual que en la Sección §1.1.1, la densidad nos permite calcular

la masa de fluido contenida en cualquier región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ del espacio mediante la integral

$$\text{masa}[\Omega](t) = \int_{\Omega} \rho(t, x) dx.$$

En este caso, el *flujo de fluido* a través de la frontera, esto es, la cantidad de fluido que *entra o sale* a través de cada punto $x \in \partial\Omega$, vendrá dado por el producto escalar $-\rho(t, x)u(t, x) \cdot n(x)$. Para constatar esto, observemos el dibujo, donde las líneas azules representan el movimiento del fluido, n el vector normal a Ω en cada punto y donde hemos resaltado tres puntos. Por x_1 el fluido está *entrando* en Ω por lo que ahí el flujo es positivo y el producto escalar $u \cdot n$ es negativo, mientras que en x_3 el fluido está *saliendo* de Ω , ahí el flujo es negativo y el producto escalar $u \cdot n$ es positivo. Además del signo, el ángulo entre u y n también es importante (cosa que ya lleva incluida el producto escalar), reduciéndose conforme menos alineados estén. De hecho, observamos el caso extremo en x_2 donde el fluido toca la frontera de forma tangencial, ni entra ni sale nada, que es precisamente cuando u y n están menos alineados, son perpendiculares, y tienen producto escalar nulo. Por último,



está claro que la densidad ρ ha de aparecer como factor, pues el flujo, la cantidad de fluido moviéndose a través de $\partial\Omega$, será proporcional a la densidad: mayor cuanto más denso y menor cuanto menos denso. Con esto claro, ya podemos escribir el balance de masa como

$$\frac{d}{dt} [\text{masa}[\Omega](t)] = \left[\begin{array}{l} \text{balance entre lo que entra} \\ \text{y lo que sale a través de } \partial\Omega \end{array} \right] = \int_{\partial\Omega} -\rho u \cdot n dS,$$

o, lo que es lo mismo (usando de nuevo el Teorema de la divergencia)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = - \int_{\partial\Omega} \rho u \cdot n dS = - \int_{\Omega} \text{div}(\rho u) dx.$$

Dado que Ω es arbitrario, los integrandos han de ser iguales, y obtenemos la **ley de conservación de la masa**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) + \text{div}(\rho u)(t, x) = 0.$$

equivalente en \mathbb{R}^N a la (1) que obtuvimos allí.

Nota 32. Es importante destacar que estamos suponiendo que no hay creación ni pérdida de fluido, eso es, se conserva. Si hubiese una fuente de fluido, esto es, una función $f(t, x) \in \mathbb{R}$ que indicase la cantidad de fluido que se está produciendo (o desapareciendo si $f < 0$) en cada punto x e instante t , podríamos incorporarlo de forma sencilla a nuestra ley de conservación, tanto en la expresión integral como en la diferencial, como sigue:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = - \int_{\Omega} \text{div}(\rho u) dx + \int_{\Omega} f dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho u) = f.$$

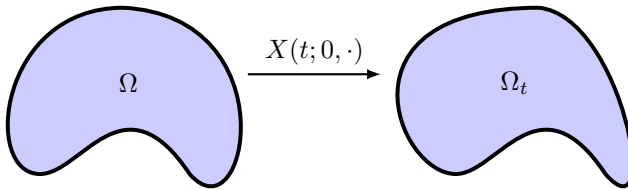
1.2. Trayectorias, homogeneidad e incompresibilidad. Aprovechando el dibujo anterior, podemos centrarnos en las líneas azules, a las que podríamos denominar como las *trayectorias* del fluido, esto es, las posiciones $X(t)$ que iría ocupando un barquito de papel que se moviese junto con el fluido. Con esta idea gráfica en mente, está claro que la velocidad de tal barquito, que obviamente viene dada por $X'(t)$, habrá de ser igual a la velocidad que tiene el fluido en el lugar en el que esté el barquito, y esto se escribe de una forma muy sencilla:

$$X'(t) = u(t, X(t)),$$

lo que coincide con la ecuación (16) y, por lo tanto, significa que **las trayectorias del fluido son exactamente las curvas características asociadas al campo de transporte $a(t, x)$ dado por el campo de velocidades del fluido $u(t, x)$** . Esto nos será de gran utilidad en todo lo que sigue, pues podremos aprovechar todos los conceptos desarrollados en capítulos anteriores.

En particular, vamos a introducir dos conceptos muy habituales en mecánica de fluidos: el de fluido homogéneo y el de fluido incompresible, y los vamos a relacionar con la densidad ρ y la velocidad u . El primero de ellos es bastante simple: un fluido se dice que es **homogéneo** cuando su densidad es igual en todas partes. En este caso, claramente equivale a decir que la función $\rho(t, x)$ es independiente de x o, dicho en forma de *ecuación diferencial*: $\nabla_x \rho = 0$.

La incompresibilidad también es fácil de definir, pero tal vez no sea tan obvio de asociar con su *ecuación diferencial* equivalente. Veámoslo paso a paso. Un fluido se dice **incompresible** si no puede cambiar su volumen, es decir, si una misma porción de fluido, aun cuando se pueda desplazar a una región distinta, esta tiene el mismo volumen que la región original. Para describir este hecho con *fórmulas*, vamos a comenzar por describir esas regiones de espacio. Sea Ω una región del



espacio ocupada por el fluido en un instante inicial ($t = 0$ por ejemplo) y sea Ω_t la región ocupada por exactamente la misma porción de fluido en un instante posterior t . Podemos describir Ω_t usando las trayectorias como el conjunto de los lugares ocupados por partículas de fluido en el instante t y que en el instante 0 estaban en Ω , es decir:

$$\Omega_t := \left\{ X(t; 0, x); x \in \Omega \right\} = F_{0 \rightarrow t}(\Omega).$$

De este modo, ser incompresible es lo mismo que decir que los volúmenes $|\Omega|$ y $|\Omega_t|$ son iguales para todo t y para cualquier región Ω , es decir

$$|\Omega| = |\Omega_t| \Leftrightarrow \int_{\Omega} dx = \int_{\Omega_t} dx, \quad \forall \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad \forall t \geq 0.$$

Lo bueno es que, recordando la notación del Capítulo 2, el cambio de variables dado por $F_{0 \rightarrow t}$, que tiene a J por jacobiano, permite escribirlo como sigue,

$$\int_{\Omega} dx = \int_{\Omega_t} dx = \int_{\Omega} J(t) dx \Leftrightarrow \int_{\Omega} (J(t) - 1) dx = 0, \quad \forall \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad \forall t \geq 0.$$

De este modo, y aprovechando la igualdad $J'(t) = J(t) \operatorname{div}(u)$ probada en el Lema 3, obtenemos que

$$\text{incompresible} \Leftrightarrow J(t) \equiv 1 \Leftrightarrow \operatorname{div}(u) \equiv 0,$$

que es, finalmente, la *ecuación diferencial* de la incompresibilidad.

Con estos dos conceptos en la mano, notemos que la ecuación de la conservación de la masa puede escribirse desarrollando el término $\operatorname{div}(\rho u)$ como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + u \cdot \nabla_x \rho + \rho \operatorname{div}(u) = 0,$$

por lo que ser homogéneo cancela el segundo término mientras que ser incompresible cancela el tercero. Así, un fluido que sea simultáneamente homogéneo e incompresible cumplirá, además, que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, por lo que la densidad se convierte en una constante absoluta de este tipo de fluidos: $\rho(t, x) \equiv \rho_0 = \text{cte}$.

Para concluir, vamos a reescribir la conservación de la masa en una forma integral alternativa, usando estos nuevos conceptos. Concretamente, se puede escribir como

$$(75) \quad \frac{d}{dt} \left[\text{masa}[\Omega_t](t) \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho(t, x) dx \right) = 0,$$

ya que al medir la masa sobre el conjunto Ω_t , que se mueve con el fluido, ya no *entra ni sale* fluido por la frontera, y simplemente se mantiene constante, por lo que su derivada es cero. Usaremos este recurso más adelante para deducir la segunda ecuación que nos interesa.

1.3. Segunda ecuación de los fluidos: Ley de Newton. Nuestro siguiente objetivo es aplicar la segunda Ley de Newton para obtener la evolución de u (o del momento ρu), y que constituirá propiamente la llamada *ecuación de los fluidos*, ya que la ley de conservación de la masa suele quedar siempre sobreentendida o simplificada por tratarse de fluidos homogéneos y/o incompresibles. Para ello debemos volver a una formulación integral, como ya usamos para la conservación de la masa (75), ya que es el modo más simple en que podemos aplicar la segunda Ley de Newton para un medio continuo. Concretamente:

$$\frac{d}{dt} \left[\begin{array}{l} \text{momento contenido} \\ \text{en el conjunto } \Omega_t \end{array} \right] = \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega_t} \rho(t, x) u(t, x) dx \right] = \int_{\Omega_t} \left[\begin{array}{l} \text{fuerzas que} \\ \text{actúan en } \Omega_t \end{array} \right] dx,$$

que es la versión *continua* del clásico $\frac{d(mv)}{dt} = ma = F$, válido para una sola partícula. Para trabajar con esta expresión notamos dos cosas: hemos de saber cómo pasar la derivada respecto a t dentro de la integral sobre el conjunto Ω_t , que también depende de t ; y hemos de describir todas las fuerzas que actúan sobre el fluido. Vamos a responder a estas dos cuestiones en las siguientes tres subsecciones.

1.3.1. *Derivada material y teorema del Transporte.* El resultado clave para meter la derivada respecto a t dentro de la integral sobre el conjunto Ω_t es el siguiente.

Teorema 33 (Teorema del Transporte). *Sea $g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ cualquier función regular (que describa una cierta magnitud o propiedad del fluido en cada instante t y posición x). Entonces:*

1. $\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho(t, x) g(t, x) dx \right) = \int_{\Omega_t} \rho(t, x) \frac{Dg}{Dt}(t, x) dx,$
2. $\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} g(t, x) dx \right) = \int_{\Omega_t} \left(\frac{Dg}{Dt}(t, x) + g(t, x) \operatorname{div}(u(t, x)) \right) dx,$

donde el operador $\frac{Dg}{Dt}(t, x) := \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + u(t, x) \cdot \nabla_x g(t, x)$, se denomina **derivada material** de g (respecto al fluido).

Demostración. Primero veamos de dónde sale esa derivada material. Si evaluamos g a lo largo de una de las trayectorias del fluido, $X(t)$, y calculamos su cambio, obtenemos, aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} [g(t, X(t))] = \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)(t, X(t)) + \overbrace{X'(t)}^{u(t, X(t))} \cdot (\nabla_x g)(t, X(t)) := \left(\frac{Dg}{Dt} \right)(t, X(t)),$$

es decir, que la derivada material mide precisamente el cambio de g a lo largo de una trayectoria del fluido $(t, X(t))$. Pasemos directamente a probar la propiedad 2, ya que la otra es análoga y, simplemente, ocupa más espacio. Las claves son: usar el cambio de variables $F_{0 \rightarrow t}$ que nos proporciona $X(t; 0, \cdot)$, y recordar el Lema §2.3, concretamente que $J'(t) = J(t) \operatorname{div}(u)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} g(t, x) dx \right) &= \left[\begin{array}{l} x = X(t; 0, y) \\ dx = J(t) dy \end{array} \right] = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} g(t, X(t; 0, y)) J(t) dy \right) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(g(t, X(t; 0, y)) J(t) \right) dy = \int_{\Omega} \frac{Dg}{Dt}(t, X(t; 0, y)) J(t) + g(t, X(t; 0, y)) \overbrace{J'(t)}^{J \operatorname{div}(u)} dy \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{deshaciendo} \\ \text{el cambio} \end{array} \right] = \int_{\Omega} \frac{Dg}{Dt}(t, x) + g(t, x) \operatorname{div}(u) dx, \end{aligned}$$

con lo que concluye la prueba. □

Notemos, para concluir, que esta nueva herramienta permite reescribir la ley de conservación de la masa del siguiente modo

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \operatorname{div}(u) = 0,$$

lo que puede ser útil para la demostración de la otra parte del Teorema.

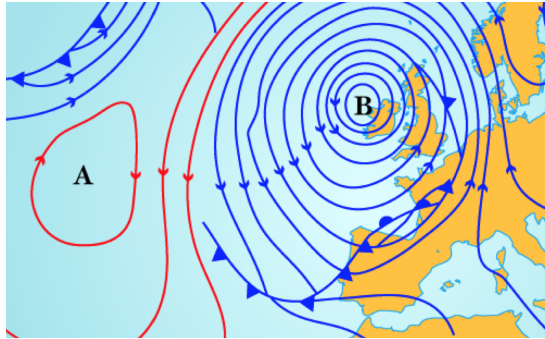
Nota 34. *A partir del teorema del transporte, también se puede deducir de forma fácil la ecuación de la incompresibilidad: $\operatorname{div}(u) = 0$, aplicando el apartado 2. a la función $g = 1$, como sigue:*

$$|\Omega| = |\Omega_t| \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx \stackrel{2.}{=} \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(u)(t, x) dx, \quad \forall \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad \forall t \geq 0,$$

por lo que necesariamente $\operatorname{div}(u) = 0$.

1.3.2. *Fuerzas normales y laminares: presión y viscosidad.* Como hemos adelantado, para describir completamente la evolución del momento, hemos de describir las fuerzas que actúan sobre las partículas del fluido, como medio continuo que es. Distinguiremos entre fuerzas inerciales y fuerzas externas. Estas últimas no nos aportan nada para los objetivos de este curso (sí lo harán en uno de hidráulica u otras aplicaciones) ya que serán expresiones dadas y simplemente se añaden a la ecuación con su correspondiente expresión. Las inerciales, sin embargo, describen la esencia y el tipo de fluido con el que tratamos, y merecen ser descritas debidamente. Estas fuerzas aparecen en forma de *resistencia del fluido* a los cambios (gradientes) que en él se hayan producido, y por eso las estamos llamando inerciales, y estarán funcionalmente relacionadas con los gradientes aparecidos en alguna de sus propiedades y que son los medidores de esos cambios.

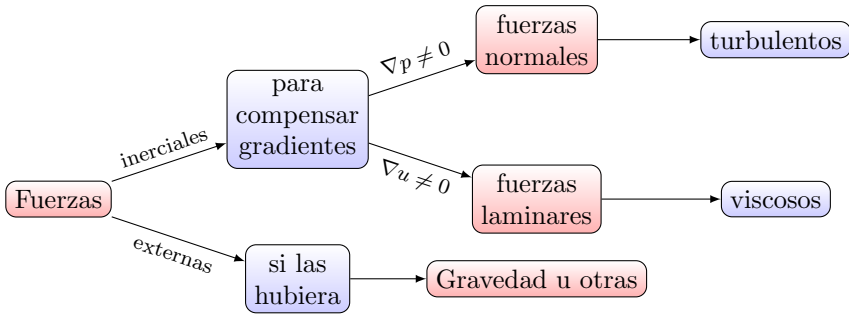
Para ello hemos de presentar a otro actor importante para la descripción de estas fuerzas: su **presión** en cada instante t y posición x , que será una función $p(t, x)$ escalar. Para entender la descomposición de fuerzas que vamos a hacer, hemos de ver el fluido como una *superposición de capas de igual presión*; en términos matemáticos, estas “capas” se corresponderán con las superficies de nivel de la recién introducida función de presión. Una imagen gráfica en 2-D de esta representación la encontramos en los *mapas del tiempo*:



que solemos ver en las previsiones meteorológicas, en los que es habitual encontrar dibujadas las *líneas isobaras*, esto es, las curvas de igual presión. En este caso, el fluido es el aire en la atmósfera y es 2-D porque solo se representa a nivel de la superficie. Además, en estas isobaras, observamos unas flechas tangentes a estas isobaras, que justamente representan el hecho de que la velocidad instantánea del fluido es tangente a las isobaras.

Pues bien, con esta imagen gráfica en mente, podemos hablar de dos tipos de fuerzas inerciales: las debidas a diferencias de presión o *fuerzas normales*, y las debidas a diferencias de velocidad o *fuerzas laminares*. Veamos una breve justificación de estos nombres. Las primeras se generan cuando en el fluido aparecen zonas de diferente presión, lo que hace aparecer una fuerza inercial que pretende compensar este desequilibrio forzando al fluido a moverse de la zona de mayor presión a la zona de menor presión y, por lo tanto, siguiendo la dirección de ∇p con signo menos¹. Como el gradiente de una función siempre es perpendicular (normal) a sus propias curvas de nivel, ∇p es normal a estas capas isobaras de fluido y, por de ahí la denominación de *fuerzas normales*.

¹Recordemos que ∇f indica la dirección de mayor aumento de una función cualquiera f y que, por tanto, que $-\nabla f$ es la dirección de mayor descenso de la misma.



Por otro lado, como hemos comentado con el mapa del tiempo, u es tangente a las capas isobaras de modo que, si apareciesen diferentes velocidades en el seno del fluido, esto producirá un desplazamiento relativo (tangencial) de las capas con mayor velocidad sobre las capas (o láminas) con menor velocidad; de ahí el nombre de *fuerzas laminares*. Se puede pensar en este caso que aparece un *rozamiento* entre capas por ir una más rápida que la otra, y ese rozamiento es precisamente esa fuerza inercial que frena estos desplazamientos relativos entra láminas o capas. En concreto, la *resistencia del fluido* a este movimiento relativo de unas capas sobre otras es una propiedad característica del mismo y se denomina **viscosidad**. La descripción completa de estas fuerzas laminares y su relación explícita con ∇u es algo más compleja y la veremos en la siguiente sección. Solo resaltamos que, pese a esta clasificación en *normales* y *laminares*, las segundas no van a ser necesariamente *tangenciales* respecto a las isobaras.

En general, la prevalencia de uno de estos dos tipos de fuerza sobre el otro determina el tipo de fluido, existiendo grandísimas diferencias (cualitativas, cuantitativas y de modelado) entre ellos. Si el fluido tiene alta viscosidad, esto es, alta resistencia al movimiento relativo de unas capas sobre otras (piénsese en fluidos como la miel) se denomina *fluido viscoso* y en este caso, se desprecian las diferencias de presión. Cuando, por el contrario, apenas hay viscosidad y las diferencias de presión son más relevantes, (piénsese en el aire de la atmósfera terrestre) se denomina *fluido turbulento*. Desafortunadamente, como veremos en la siguiente sección, no existe una clara línea diferenciadora entre unos y otros y, de hecho, un mismo fluido puede comportarse como turbulento o como viscoso dependiendo de diferentes factores, y no solo de su propia naturaleza. La “elección” del tipo de fluido se hace por convenio y será determinante para decidir qué ecuación rige su movimiento

Como hemos adelantado, queremos aplicar la segunda Ley de Newton para obtener la evolución del momento ρu en formulación integral, y ya podemos escribir, usando el Teorema 33 del Transporte y la descripción anterior de las fuerzas:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega_t} \rho u \, dx \right] = \int_{\Omega_t} \overbrace{\text{inerciales}}^{\text{normales + laminares}} + \text{externas} \, dx,$$

(Teo. 33) || || || ||

$$\int_{\Omega_t} \rho \frac{Du}{Dt} \, dx = \int_{\Omega_t} -\nabla p + \left[\begin{array}{c} \text{debidas} \\ \text{a } \nabla u \end{array} \right] + f_{ext} \, dx.$$

²Como u es una función vectorial, ∇u es la matriz cuyas filas son los gradientes de las componentes de u , esto es, la matriz jacobiana de u .

Pues bien, para concretar el término que resta, el de las fuerzas laminares o de viscosidad, apelaremos a ciertos resultados e hipótesis no menores del mundo de los medios continuos en general, o de los fluidos en particular. Primero, es habitual (Teorema de Cauchy, véase [47, Teorema 3.1.1]) describir las fuerzas sobre un conjunto Ω_t a través de una matriz $T = T(t, x) \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ llamada *matriz de tensiones*, *tensor de esfuerzos* o *tensor de tensiones*, de manera que

$$\text{Fuerza sobre } \Omega_t = \int_{\partial\Omega_t} T n \, dS = \int_{\Omega_t} \text{Div}(T) \, dx,$$

donde Tn , el producto de la matriz T por el normal exterior n , representa la *densidad superficial de fuerza*, y donde la última igualdad relaciona la integral sobre la frontera con la integral sobre el conjunto (ver Teorema 54 de la divergencia de Gauss en el Apéndice A y el ejercicio 30).

Nota 35. *Notemos aquí que las fuerzas normales, anteriormente descritas, también responden a este esquema, simplemente observando (de nuevo por el Teorema de la divergencia) que*

$$\text{Fuerzas normales} = \int_{\Omega_t} -\nabla p \, dx = \int_{\partial\Omega_t} (-p \mathbb{I}) n \, dS,$$

siendo \mathbb{I} la matriz identidad. En el contexto de medios continuos, a esta parte de la matriz de tensiones T se le denomina *tensión isotrópica* y, en ocasiones, *presión isotrópica*.

Antes de clarificar la expresión de T , ya estamos en posición de deducir la ecuación del momento, usando las expresiones anteriores y, al igual que con la masa, que sean válidas para todo Ω_t , deducimos de manera “preliminar” la Ley de conservación del momento lineal:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \text{Div}(T) + f_{ext}.$$

Bien, pues ahora simplemente resta establecer la expresión de T para las fuerzas laminares. Como ya hemos descrito en la sección previa, establecemos que debe depender de ∇u , pero esta es en realidad una hipótesis o *Postulado* con nombre propio que vamos a describir junto a otros dos usualmente aceptados:

- Postulado de Stokes*: T es una función de ∇u en el mismo instante y punto.
- Postulado de linealidad*: esta función $T = T(\nabla u)$ es lineal.
- Postulado de invarianza*: T es simétrica e invariante³ frente a isometrías.

El siguiente resultado de álgebra tensorial, que no vamos a probar, usa estos tres postulados para determinar el tensor T en función de ∇u , concretamente de su parte simétrica, mediante solo dos funciones en dimensión $N = 3$. Intuitivamente hemos justificado el postulado de Stokes en en la pasada sección; el segundo, de linealidad, viene a decir que la hipótesis es válida para gradientes de velocidad no muy grandes⁴. En particular, para determinar las 9 componentes de la matriz T

³Para toda matriz ortogonal $\Theta \in O(3)$, se tiene $T(\Theta \nabla u \Theta^T) = \Theta T(\nabla u) \Theta^T$.

⁴El postulado de Stokes es en realidad la definición de *esfuerzo cortante* en un fluido hecha por Newton. De hecho, los fluidos que cumplen los dos primeros postulados se denominan *fluidos newtonianos*.

en función de las 9 de ∇u se requerirá determinar $9^2 = 81$ coeficientes, aunque el último postulado permite reducir a 2 este número. Veamos su enunciado.

Teorema 36. *En dimensión $N = 3$ y bajo los tres postulados anteriores, existen sendas funciones λ y μ tales que:*

$$T = \lambda \operatorname{div}(u)\mathbb{I} + 2\mu S(u),$$

donde $S(u)$ es la parte simétrica de ∇u . A μ se le llama primer coeficiente de viscosidad o simplemente **viscosidad** y a λ segundo⁵ coeficiente de viscosidad. Además, tomando divergencia en cada fila, obtenemos:

$$\operatorname{Div}(T) = (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div}(u)) + \mu\Delta u,$$

donde Δu es el operador laplaciano aplicado a cada componente de u

Nota 37. *En fluidos, estos coeficientes de viscosidad λ y μ se suelen considerar constantes y dependientes únicamente de la naturaleza del fluido.*

Nota 38. *El Teorema 36 es un caso particular del Teorema de representación de Rivlin-Ericksen, (ver [45]) y no lo probaremos aquí.*

Pues bien, con este resultado en la mano, ya podemos describir completamente la ley de conservación del momento lineal conocida como **ecuación de Navier-Stokes**:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u\right) = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div}(u)) + \mu\Delta u + f_{ext}.$$

En el caso habitual de un fluido homogéneo e incompresible, y por lo tanto con densidad constante ρ_0 , esta ecuación, que aparece en numerosos textos, queda

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla \frac{p}{\rho_0} + \nu\Delta u + \frac{f_{ext}}{\rho_0},$$

donde al coeficiente $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ se le denomina *viscosidad cinemática*. Otro caso muy habitual, denominado *fluido ideal*, es aquel en que se desprecian las fuerzas laminares por considerarse que tiene muy baja viscosidad y sólo se tienen en cuenta los cambios de presión; en este caso la ecuación obtenida también tiene nombre propio, la **ecuación de Euler**:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u\right) = -\nabla p + f_{ext}.$$

1.3.3. *Fluidos laminares vs. turbulentos: número de Reynolds.* Notamos que, con la denominación introducida en la sección anterior, un fluido ideal es lo mismo que un fluido turbulento. Recuperamos entonces la pregunta anterior: ¿cómo discriminar si un fluido es de tipo turbulento (ideal) o laminar (viscoso)? Veamos hasta qué punto se puede responder a esta pregunta introduciendo un número *sin unidades físicas* que se puede asociar a un fluido dependiendo no solo de su naturaleza sino de su situación particular; para ello, hemos de considerar las siguientes cantidades *típicas*:

- la *viscosidad* del fluido μ ;
- una *densidad típica* ρ_0 del fluido⁶;

⁵Obsérvese que en fluidos incompresibles, al cumplirse $\operatorname{div}(u) = 0$, desaparece el segundo coeficiente de viscosidad λ , de ahí su rol secundario.

⁶Puede ser un promedio medido las condiciones en que se pretenda estudiar el fluido; no es lo mismo el vapor de agua, que el agua de un vaso, que el agua salada.

- una *longitud típica* L del fluido⁷;
- una *velocidad escalar (o celeridad) típica* U del fluido⁸.

Con estas cuatro cantidades se define el **número de Reynolds** como:

$$Re := \frac{\rho_0 U L}{\mu} = \frac{U L}{\nu}, \quad (\text{usando la viscosidad cinemática } \nu = \frac{\mu}{\rho_0}),$$

que no tiene unidades físicas, y representa la razón, relación o cociente entre lo que podríamos denominar una *viscosidad circunstancial* (dada por $\rho_0 U L$, que sería la típica asociada a los datos típicos que hemos proporcionado) y la viscosidad μ del fluido. Así, si el número de Reynolds es muy *bajo* (μ es grande con respecto a $\rho_0 U L$), estaríamos ante un *fluido viscoso* y lo modelaremos mediante la ecuación de Navier-Stokes; pero si el número de Reynolds resulta *alto* estaremos ante un *fluido turbulento* y optaremos por la ecuación de Euler. En este sentido⁹ el número de Reynolds ayuda a determinar el carácter turbulento o laminar del movimiento del fluido aunque el mecanismo para distinguirlos es aún hoy mera especulación.

1.4. Rotacional y vorticidad. Antes de pasar al estudio de existencia y unicidad, necesitamos introducir otro elemento descriptivo de un fluido relacionado con las rotaciones que se producen en el seno del mismo: su *vorticidad*. Para ello, es necesario recordar cómo se calcula el *rotacional* 3-D de un campo de vectores. Dado un campo (de velocidades) $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ regular, se define su rotacional como

$$\text{rot}(u) := \nabla \times u = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).$$

Pues bien, la **vorticidad** de un fluido $\omega(t, x)$ se define como el rotacional de su campo de velocidades, esto es $\omega := \text{rot}(u)$. Para comprender la relación entre la vorticidad y las rotaciones en el seno del fluido (de ahí el nombre de rotacional), es preciso un pequeño desarrollo.

Primero, notamos que las rotaciones tienen que ver con ciertos *cambios* en la velocidad (también las dilataciones, pero ahora no nos interesa), por lo que buscamos la conexión en la matriz jacobiana de u , que llamamos $D(u)$:

$$D(u) := \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Concretamente, vamos a descomponer esta matriz en parte simétrica y antisimétrica de la forma estándar, esto es

$$D(u) = S(u) + A(u) := \frac{D(u) + D(u)^T}{2} + \frac{D(u) - D(u)^T}{2},$$

siendo \cdot^T la traspuesta. En general, se puede comprobar que la parte simétrica tiene que ver con cambios volumétricos mientras que la parte antisimétrica tiene que ver con movimientos rígidos, pero eso es mucho para nuestros objetivos. En este

⁷Puede ser el tamaño aproximado del dominio en donde se pretenda estudiar el fluido.

⁸De nuevo, depende tanto del fluido como del fenómeno estudiado; no es lo mismo agua en el remanso de un río que agua usada en un lavado a presión.

⁹Por ejemplo, en conductos tubulares se acepta, no sin cierta especulación, que si el número de Reynolds es menor de 2 300 el flujo será laminar y si es mayor de 4 000 el flujo será turbulento.

sentido, solo resaltamos que $\text{div}(u) = \text{traza}(S(u))$ que ya hemos visto que sí tiene que ver con posibles cambios de volumen. Pues bien, si escribimos explícitamente la parte antisimétrica, obtenemos algo relacionado con el rotacional, concretamente:

$$2A(u) := \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, el rotacional ω contiene toda la información sobre $A(u)$. Veamos qué hace. Para ello, estudiaremos la evolución en tiempo de un vector cualquiera que se mueve con el fluido y veremos que su eventual *giro* viene *gobernado* por ω . Concretamos: partimos de dos puntos del fluido, x_0 y x_1 y del vector $v_0 = x_1 - x_0$ que los une. Por lo tanto, la evolución del vector viene dada por

$$v(t) := X(t; 0, x_1) - X(t; 0, x_0) \Rightarrow v'(t) = u(t, X(t; 0, x_1)) - u(t, X(t; 0, x_0)).$$

Para *entender* el significado *instantáneo* de la vorticidad suponemos varias cosas:

- al buscar solo el significado de ω , suponemos que la matriz jacobiana de u solo tiene parte antisimétrica, esto es: $D(u) = A(u)$, ya que es la parte relacionada con la vorticidad;
- al buscar un significado *instantáneo*, el tiempo en que medimos la evolución lo suponemos muy pequeño, para que $A(u(t, X(t; 0, x_0))) \sim A(u(0, x_0))$;
- al buscar un significado *local*, podemos suponer que $|v(t)|$ es muy pequeño, concretamente $\mathcal{O}(|v(t)|^2) \sim 0$.

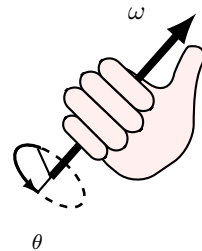
Con todo esto, y usando el desarrollo de Taylor de u en la variable x , podemos describir la evolución de v_0 como:

$$\begin{aligned} v'(t) &= u(t, X(t; 0, x_1)) - u(t, X(t; 0, x_0)) = u(t, X(t; 0, x_0) + v(t)) - u(t, X(t; 0, x_0)) \\ &= D(u(t, X(t; 0, x_0)))v(t) + \mathcal{O}(|v(t)|^2) \sim A(u(0, x_0))v(t), \end{aligned}$$

es decir, una EDO lineal cuya solución es sobradamente conocida y se calcula mediante la exponencial de la matriz $A = A(u(0, x_0))$:

$$v(t) = e^{tA} v_0,$$

al menos para t y v_0 muy muy pequeños. Aquí es donde la *magia* de las matemáticas hace aparición, ya que, *accidentalmente*, la exponencial de la matriz $tA(u(0, x_0))$ es (véase el ejercicio 24) exactamente un giro en torno al vector vorticidad $\omega(0, x_0)$ y de ángulo $\theta = t|\omega(0, x_0)|/2$ en el sentido de la *regla de la mano derecha*; es decir, la vorticidad contiene la información sobre el eje sobre el que está girando el fluido y su intensidad.



2. Ecuación de Euler 2-D: existencia y unicidad

Una vez conocemos un poco más sobre el origen y significado de los elementos y las ecuaciones que describen un fluido, vamos a adentrarnos en el estudio matemático de uno de los casos presentados que es uno de los pocos en los que se puede probar sin apenas hipótesis la existencia y unicidad de solución: nos referimos a la Ecuación de Euler en dimensión $N = 2$. Aunque comenzaremos los cálculos en

dimensión $N = 3$, a lo largo de esta sección descubriremos por qué esta elección de dimensión simplifica y permite el estudio que vamos a hacer.

2.1. Formulación vorticidad-velocidad. Lo primero que haremos es partir de la ecuación de Euler para un fluido homogéneo e incompresible y sin fuerzas externas, esto es:

$$\frac{\partial}{\partial t}u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla \frac{p}{\rho_0}, \quad \text{con } \text{div}(u) = 0,$$

y tomar rotacional en la primera ecuación. Recordando que la vorticidad es $\omega = \text{rot}(u)$ y usando las identidades del ejercicio 25, es fácil hacer la siguiente deducción

$$\begin{aligned} & \text{rot}\left(\frac{\partial}{\partial t}u + (u \cdot \nabla)u\right) = -\text{rot}\left(\nabla \frac{p}{\rho_0}\right), \\ 25.b) \text{ y g)} & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\omega + \text{rot}\left(\frac{1}{2}\nabla|u|^2 - u \times \omega\right) = 0, \\ 25.b) \text{ y e)} & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\omega + \frac{0}{2} - \left(u \text{div}(\omega) - \omega \text{div}(u) - u \cdot \nabla\omega + \omega \cdot \nabla u\right) = 0, \\ 25.a) & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\omega + (u \cdot \nabla)\omega + \omega \text{div}(u) = (\omega \cdot \nabla)u \end{aligned}$$

donde, además, podemos eliminar el término $\omega \text{div}(u)$ debido a la incompresibilidad: $\text{div}(u) = 0$. Notemos también que si hubiésemos dejado un término de fuerzas externas, siempre que estas hubieran sido *conservativas*, esto es, de la forma $f_{ext} = \nabla(\text{algo})$, entonces el resultado sería el mismo, pues al tomar rotacional, estas desaparecerían. Esta sería la ecuación de Euler en formulación velocidad-vorticidad.

Vamos a ver que en dimensión 2 esta ecuación es bastante más asequible de lo que parece. Para ello, y de forma provisional, definimos la vorticidad de un campo bidimensional $u = (u_1, u_2)$ como el escalar que correspondería a la tercera componente del rotacional estándar del campo tridimensional cuyas dos primeras componentes fuesen el campo u y la tercera cero, es decir $(0, 0, \text{rot}_{2D}(u)) = \text{rot}(u_1, u_2, 0)$ o, más concretamente:

$$\omega := \text{rot}_{2D}(u) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (\text{¡la vorticidad en 2-D es escalar!}).$$

Entonces, en dimensión $N = 2$, el último término que nos ha aparecido queda como,

$$(\omega \cdot \nabla)u = \left(0 \frac{\partial}{\partial x_1} + 0 \frac{\partial}{\partial x_2} + \text{rot}_{2D}(u) \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, cero automáticamente, por lo que la ecuación resultante es:

$$\frac{\partial}{\partial t}w + (u \cdot \nabla)w = 0, \quad \text{con } \text{div}(u) = 0 \text{ y } \text{rot}(u) = \omega,$$

ecuación que nos recuerda ¡y mucho! a la ecuación de transporte puro, con la peculiaridad de que el campo de transporte u , además de cumplir $\text{div}(u) = 0$, está relacionado con la vorticidad $\omega = \text{rot}(u)$, por lo que es **no lineal**.

Para cerrar esta parte, recordemos también es habitual tomar rotacional de funciones escalares $\phi: R^2 \rightarrow R$; en este caso se define como el campo siguiente:

$$\text{rot}_{1D}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \quad \text{que se puede ver como: } (\text{rot}_{1D}\phi, 0) = \text{rot}(0, 0, \phi).$$

Advertimos que esta notación no es estándar, y simplemente se escribe rot (o curl en inglés) en todos los casos, pero hemos pensado que es útil para un primer contacto con este operador (nótese el matiz diferenciador en el Ejercicio 25.h).

Para concluir esta sección, vamos a reescribir la no linealidad descrita de una forma equivalente, a la vez que vamos adelantando algunas de las estimaciones claves de este capítulo. Lo resumimos en el siguiente resultado, cuya demostración desarrollaremos en el Apéndice B2 para no alargar demasiado esta parte.

Proposición 39. *Si tenemos una función escalar $\omega \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ y definimos*

$$(76) \quad K(x_1, x_2) := \text{rot}\left(\frac{-1}{2\pi} \log|x|\right) = \frac{1}{2\pi|x|^2}(-x_2, x_1),$$

entonces el campo u definido como la convolución siguiente,

$$u(x) = (K * \omega)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} K(x-y)\omega(y) dy,$$

es el único que verifica las siguientes tres relaciones:

$$\omega = \text{rot}(u), \quad \text{div}(u) = 0, \quad y \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u(x)| = 0.$$

Además, el campo $u = K * \omega$, verifica dos propiedades adicionales clave:

- i) u está acotado: $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C$,
- ii) u es logarítmico-lipschitziano: $|u(x) - u(y)| \leq C \text{loglip}(|x - y|)$.

donde $C > 0$ es una constante que depende únicamente de $\|\omega\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ y $\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ y x e y son puntos cualesquiera de \mathbb{R}^2 . También, para simplificar la notación, hemos introducido la función loglip representada en la Figura 1 siguiente:

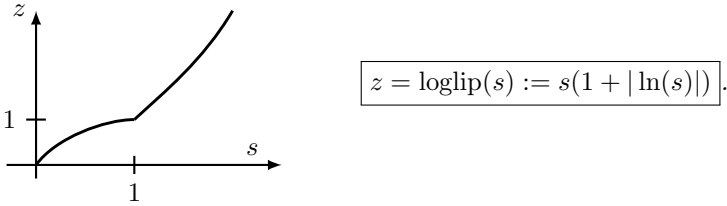


FIGURA 1. Definición y gráfica de la función loglip .

Finalmente si ϕ y ψ representan sendos difeomorfismos de \mathbb{R}^2 que preservan la medida (lo aplicaremos a los flujos de transporte $\phi(x) = X(t; s, x)$ asociados a características con jacobiano $J = 1$) entonces se verifica:

- iii) $|K * (\omega \circ \phi)(x) - K * \omega(x)| \leq C \text{loglip}(\|I - \phi\|), y$
- iv) $|K * (\omega \circ \phi)(x) - K * (\omega \circ \psi)(x)| \leq C \text{loglip}(\|\psi^{-1} - \phi^{-1}\|),$

donde $C > 0$, de nuevo, depende únicamente de $\|\omega\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ y $\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$.

Pues bien, con este resultado en la mano, podemos finalmente reescribir la ecuación de Euler a cuyo estudio de existencia y unicidad pretendemos enfrentarnos:

$$(77) \quad \frac{\partial}{\partial t} \omega + (u \cdot \nabla) \omega = 0, \quad \text{con } u = K * \omega.$$

No obstante, antes de atacar la existencia, notemos dos cosas: en primer lugar, que la ecuación de transporte, aunque no lineal, responde al esquema de transporte puro, por lo que tiene sentido intentar extender el estudio hecho en el Capítulo

2 sobre curvas características; y en segundo lugar, que tales curvas características deberían resolver la ecuación

$$X'(t) = u(t, X(t)), \quad \text{con } u = K * \omega,$$

y que en este caso no parece posible aplicar el Teorema de Picard-Lindelöf, pues del campo u no hay nada que indique que pueda ser Lipschitz respecto a x , sino que, en su lugar, cumplirá la propiedad *ii*) descrita en la Proposición 39 anterior. Pues bien, en la sección siguiente, antes de atacar y resolver el problema de la no linealidad, vamos a ver que es posible hacer un Teorema de Picard-Lindelöf *generalizado* para EDOs que son solo logarítmico-lipschitzianas.

2.2. Teorema de unicidad para EDOs logarítmico-lipschitzianas. Como ya recordamos en el Capítulo 2, si buscamos soluciones de un PVI de la forma

$$X'(t) = a(t, X(t)), \quad X(t_0) = x_0,$$

basta que el campo dado $a : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, sea continuo en su dominio Ω y *localmente lipschitziano respecto de la variable x* para que tengamos garantizada la existencia de una única solución; este resultado es el Teorema de Picard-Lindelöf, que aplicado a la ecuación (16) de las curvas características nos permite determinarlas y con ellas resolver la ecuación de transporte puro.

Pues bien, ahora vamos a generalizar esta idea para el caso en que el campo a sea solo *logarítmico-lipschitziano respecto de la variable x* . El resultado es el siguiente:

Teorema 40 (Picard-Lindelöf para logarítmico-lipschitziano). *Dado un PVI de la forma*

$$X'(t) = a(t, X(t)), \quad X(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^N,$$

donde el campo dado $a : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es continuo y logarítmico-lipschitziano respecto de la variable x , es decir, existe una cierta constante $C > 0$ tal que:

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leq C \log\text{lip}(|x - y|), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

Entonces el PVI posee una única solución que denotaremos $X(t; t_0, x_0)$.

Demostración. Como a es continua, el teorema de Cauchy-Peano ya nos garantiza la existencia de solución. Probemos la unicidad por reducción al absurdo. Supongamos que existen sendas soluciones X_1 y X_2 del PVI y que en un cierto punto t_1 (suponemos $t_1 > t_0$ para simplificar) se cumple que $X_1(t_1) \neq X_2(t_1)$. Para $t \in (t_0, t_1)$ argumentamos como sigue; sea $y(t) := |X_1(t) - X_2(t)|$, entonces

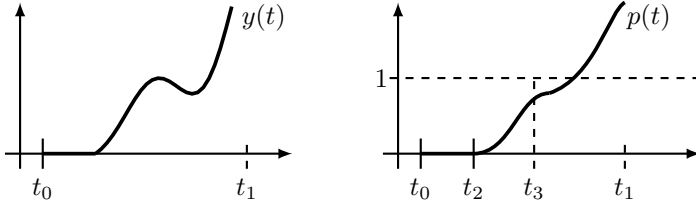
$$\begin{aligned} y(t) &= \left| \int_{t_0}^t a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |a(s, X_1(s)) - a(s, X_2(s))| ds \\ &\leq C \int_{t_0}^t \log\text{lip}(|X_1(s) - X_2(s)|) ds = C \int_{t_0}^t \log\text{lip}(y(s)) ds := p(t) \end{aligned}$$

donde hemos usado la hipótesis principal del teorema. De este modo, la función $p(t)$ definida verifica $0 \leq y(t) \leq p(t)$ y, además, como la función $\log\text{lip}$ es estrictamente creciente:

$$p'(t) = C \log\text{lip}(y(t)) \leq C \log\text{lip}(p(t)) = C p(t)(1 + |\ln(p(t))|).$$

Dada la hipótesis del absurdo y la construcción de p , esta función no negativa se anula en t_0 y es estrictamente positiva en t_1 , por lo que existirá un intervalo

$[t_2, t_3] \subseteq [t_0, t_1]$ como indica la gráfica intuitiva siguiente:



es decir, $0 < p(t) < 1$ para $t \in (t_2, t_3]$ y $p(t_2) = 0$. Pues bien, para terminar, definimos finalmente la función que nos va a proporcionar la contradicción

$$z : [0, (t_3 - t_2)) \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad z(s) := \left| \ln(p(t_3 - s)) \right| = -\ln(p(t_3 - s)).$$

Entonces, por un lado, de su definición deducimos lo siguiente:

$$\lim_{s \rightarrow (t_3 - t_2)} z(s) = - \lim_{s \rightarrow (t_3 - t_2)} \ln(p(t_3 - s)) = - \lim_{t \rightarrow t_2} \ln(p(t)) = -\ln(0) = \infty.$$

Sin embargo, por otro lado, según la estimación anterior, podemos obtener,

$$z'(s) = \frac{p'(t_3 - s)}{p(t_3 - s)} \leq \frac{C p(t_3 - s)(1 + |\ln(p(t_3 - s))|)}{p(t_3 - s)} = C(1 + z(s)),$$

lo que, integrando, nos produce la desigualdad integral siguiente:

$$z(s) \leq z(0) + C s + C \int_0^s z(\tau) d\tau \leq \left(z(0) + C(t_3 - t_2) \right) + C \int_0^s z(\tau) d\tau$$

y que, gracias al lema 46 (de Gronwall, ver Apéndice), conduce a la estimación

$$z(s) \leq \left(z(0) + C(t_3 - t_2) \right) e^{Cs},$$

lo que contradice el límite infinito que acabamos de establecer; de ahí la contradicción y el final de la demostración. \square

Con el Teorema 40 como herramienta, estamos en condiciones de comenzar a atacar nuestro problema de transporte (77) con condición inicial en $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$(78) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega + (u \cdot \nabla) \omega &= 0, & \text{con } u &= K * \omega, \\ \omega(0, x) &= \omega_0(x), & \text{con } \omega_0 &\in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

2.3. Linealización del problema: soluciones aproximadas. La idea básica para resolver (78) es: primero construir una sucesión de ecuaciones de transporte puro que seamos capaces de resolver (**construcción de soluciones aproximadas**); a continuación probar que tal sucesión posee un límite (**resultados de compacidad**); y por último ver que tal límite es la solución buscada de nuestro problema de valores iniciales(78).

Por lo tanto, como solo sabemos resolver transporte con condiciones iniciales regulares y sobre ω_0 solo sabemos que es $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, vamos a tomar una sucesión de funciones $\{\omega_{0,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$\omega_{0,n} \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \omega_{0,n} \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^2)} \omega_0, \quad \text{y } \|\omega_{0,n}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},$$

(véase Teorema 69 en el Apéndice A para ver la existencia de esta sucesión). Este paso es conocido como **regularización del dato inicial**. A continuación, vamos a

fijar un tiempo $T > 0$ (fijo pero arbitrario) para trabajar sobre el intervalo $[0, T]$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, troceamos este intervalo en n partes de tamaño $\varepsilon = T/n$. Notemos que cuando $n \rightarrow \infty$, el tamaño de los subintervalos tiende a cero, $\varepsilon \rightarrow 0$. Pues bien, ahora **linealizamos nuestra ecuación** como sigue: sobre cada subintervalo y de forma inductiva planteamos un problema de transporte puro lineal, que ya sabemos resolver, como sigue:

- En el primer trozo $[0, \varepsilon)$

tomamos $u^0(x) := K * \omega_{0,\varepsilon}(x)$ constante (resp. a t) en todo el intervalo,

y resolvemos $\frac{\partial}{\partial t} \omega^1 + (u^0 \cdot \nabla) \omega^1 = 0, t \in [0, \varepsilon]$

con dato inicial $\omega^1(0, x) = \omega_{0,n}(x),$

- y en los trozos siguientes, para cada $k = 2, 3, \dots, n$:

tomamos $u^{k-1}(x) := K * \omega^{k-1}((k-1)\varepsilon, x)$ cte. en todo el intervalo
y dada en función de la ω^{k-1} del paso anterior.

y resolvemos $\frac{\partial}{\partial t} \omega^k + (u^{k-1} \cdot \nabla) \omega^k = 0, t \in [(k-1)\varepsilon, k\varepsilon]$

con dato inicial $\omega^k((k-1)\varepsilon, x) = \omega^{k-1}((k-1)\varepsilon, x).$

Observemos esta construcción de manera gráfica en la Figura 2, y notemos que, en

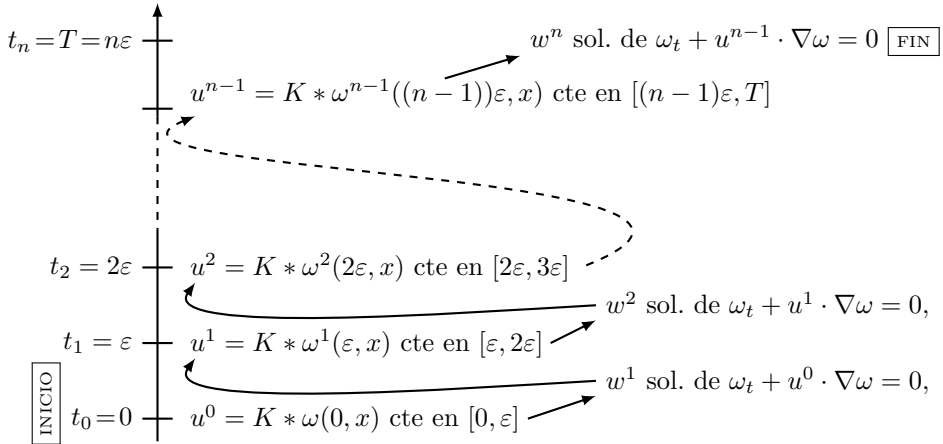


FIGURA 2. Construcción a trozos de las soluciones aproximadas.

cada paso, resolvemos una ecuación **lineal** de transporte puro para lo cual usamos las curvas características correspondientes

$$\begin{cases} \frac{dX^k}{dt}(t) = u^{k-1}(X^k(t)), & t \in [(k-1)\varepsilon, k\varepsilon] \\ X^k((k-1)\varepsilon) = x \end{cases}$$

que existen y son únicas gracias a las propiedades de logaritmo-lipschitzianidad y acotación (Proposición 39 y Teorema 40) deducidas para el campo $u^{k-1} := K * \omega^{k-1}$. En rigor, necesitamos comprobar que la ω^{k-1} de cada paso, verifica las hipótesis de la Proposición 39, esto es, ser $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ respecto a x , pero esto es fácil

de ver por inducción, ya que en cada paso $\operatorname{div}(u^{k-1}) = 0$ y esto (véase Ejercicio 6) implica que se preservan las normas L^1 y L^∞ , es decir:

- $\|\omega^k(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \|\omega^{k-1}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \dots = \|\omega_{0,n}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|\omega_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ y
- $\|\omega^k(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = \|\omega^{k-1}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = \dots = \|\omega_{0,n}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},$

para todo $k \in 1, \dots, n$.

Notemos, además, que a partir de las características podemos escribir la vorticidad ω^k en cada intervalo usando la fórmula de transporte:

$$\omega^k(t, X^k(t)) = \omega^{k-1}((k-1)\varepsilon, x), \quad t \in [(n-1)\varepsilon, n\varepsilon], \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Con todo este esquema, ya podemos definir nuestra solución aproximada como la yuxtaposición en tiempo de cada ω^k , es decir

$$\omega_n(t, x) := \begin{cases} \omega^1(t, x), & \text{si } t \in [0, \varepsilon], \\ \omega^2(t, x), & \text{si } t \in [\varepsilon, 2\varepsilon], \\ \vdots \\ \omega^n(t, x), & \text{si } t \in [(n-1)\varepsilon, T]. \end{cases}$$

Y para la velocidad hacemos la construcción análoga:

$$u_n(t, x) := u^k(x) \quad \text{si } t \in [(k-1)\varepsilon, k\varepsilon], \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

que, en este caso, resulta constante a trozos respecto de t .

2.4. Estimaciones a priori y paso al límite. En esta sección se aborda el paso más complejo de este tipo de procesos: *la compacidad*. De manera genérica, esto consiste en probar que la sucesión de soluciones aproximadas construida está dentro de algún conjunto compacto (con alguna topología) en algún espacio funcional, para que este hecho nos proporcione la existencia de una parcial convergente que, con suerte, sea la solución buscada. Las *estimaciones a priori* son típicamente propiedades de acotación de nuestra sucesión en alguna norma que la puedan situar dentro de ese buscado compacto. El tipo de convergencia que se obtenga de una parcial también será decisivo para establecer que su límite sea efectivamente solución del problema original y las no linealidades son, en general, el escollo más difícil de superar.

Para saber qué estimaciones necesitamos, tal vez sea mejor comenzar por establecer qué límite debemos tomar y dónde aparecen las dificultades. Partimos de la sucesión construida (ω_n, u_n) que es, en cada trozo, solución clásica de una ecuación de transporte puro. Por lo tanto, también es solución débil (recordemos la Sección 3.2); escribamos qué significa esto: Dada una función test $\phi \in C_0^1([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ tenemos, para cada $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \overbrace{\omega^k}^{=\omega_n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \overbrace{u^{k-1}}^{=u_n} \cdot \nabla \phi \right) dx dt &= \int_{\mathbb{R}^2} \overbrace{\omega^k}^{=\omega_n}(k\varepsilon, x) \phi(k\varepsilon, x) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \overbrace{\omega^{(k-1)}}^{=\omega_n}((k-1)\varepsilon, x) \phi((k-1)\varepsilon, x) dx, \end{aligned}$$

de modo que, si sumamos desde $k = 1$ hasta $k = n$ y observamos que:

$$\sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} \# dt = \int_0^T \# dt, \quad y \quad \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = \overbrace{a_n}^{=0} - a_0,$$

es decir, en el término de la izquierda la linealidad de la integral en el intervalo, y en el término de la derecha una *suma telescópica*, por lo que queda

$$(79) \quad \underbrace{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \omega_n \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt}_I \text{ (lineal)} + \underbrace{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \omega_n u_n \cdot \nabla \phi dx dt}_{II \text{ (no lineal)}} = - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} \omega_{0,n}(x) \varphi(0, x) dx}_{III \text{ (lineal)}}.$$

Observamos ya las partes fáciles y la difícil. El término *III*, lineal, gracias a cómo hemos creado la sucesión de condiciones iniciales $\omega_{0,n}$, convergerá sin dificultad. Para el primero, como ya hemos adelantado en la sección previa algunas estimaciones para ω_n , concretamente

$$(80) \quad \begin{cases} \|\omega_n\|_{L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{R}^2))} \leq \|\omega_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}, \\ \|\omega_n\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^2))} \leq \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}, \end{cases}$$

esto bastará (véase Teorema 64 en el Apéndice A) para establecer que ω_n posee una parcial convergente (débilmente) que permite tomar límite en *I*.

Por lo tanto, es el término *II* no lineal el que requiere más trabajo, ya que hay que combinar las convergencias de ω_n y u_n para pasar al límite y la convergencia débil no es suficiente. En este caso, aunque tras una tediosa cadena de argumentos como ya veremos, es posible probar la convergencia fuerte (uniforme sobre compactos) de u_n ; lo resumimos en el siguiente resultado cuya demostración realizaremos en el Apéndice B.3.

Lema 41. *A partir de la sucesión (ω_n, u_n) construida, es posible encontrar una función u continua en $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ tal que una sucesión parcial de u_n converge uniformemente sobre compactos a u . Además u es logarítmico-lipschitziana respecto a x y t , esto es*

$$|u(t, x) - u(s, y)| \leq C \operatorname{loglip}(|t - s| + |x - y|), \quad \forall t, s \in [0, T], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Una vez tenemos este resultado en las manos es fácil pasar al límite también en el término *II* de la formulación débil (79), ya que, sumando y restando $\omega_n u$ en la expresión, podemos escribir

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\omega_n u_n - \omega u) \cdot \nabla \phi dx dt \right| &\leq \|u_n - u\|_{L^\infty} \|\omega_n\|_{L^\infty} \|\nabla \phi\|_{L^1} \\ &\quad + \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\omega_n - \omega) u \cdot \nabla \phi dx dt \right|, \end{aligned}$$

que convergen a 0 gracias al Lema 41 y a la convergencia débil de ω_n , respectivamente. Así tomando límites en (79), obtenemos sendas funciones (ω, u) verificando

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi \right) dx dt = - \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) \varphi(0, x) dx,$$

es decir, que constituyen una solución débil de nuestro PVI (78), aunque aún nos falta comprobar que $u = K * \omega$, que es una de las relaciones que estableceremos en la siguiente sección.

2.5. Solución: relaciones y unicidad. Como acabamos de decir, restan algunos matices sobre la solución (ω, u) hayada como proceso del paso al límite. Esta vez comenzamos escribiendo directamente el resultado.

Teorema 42. *El par de funciones (ω, u) obtenido como límite del esquema iterativo anterior constituye la única solución del problema de Cauchy (78) asociado a la Ecuación de Euler. En particular, esa solución verifica:*

- i) *u se escribe como: $u = K * \omega$ y, por lo tanto, $\operatorname{div}(u) = 0$ y $\operatorname{rot}(u) = \omega$, al menos en sentido débil, y es continua y logarítmico-lipschitziana.*
- ii) *Existen unas únicas características $X(t) = X(t; s, x)$ soluciones de*

$$X'(t) = u(t, X(t)), \quad X(s) = x, \quad \forall s \in [0, T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

- iii) *Se verifica la fórmula del transporte: $\omega(t, x) = \omega_0(X(0; t, x))$;*

Demostración. Comenzaremos demostrando i). Dado que u_n es solo constante (respecto a t) a trozos y solo está relacionada con ω_n en los extremos de los subintervalos (concretamente $u_n(t, x) = K * \omega_n(\varepsilon k, x)$ siempre que t esté en el subintervalo $[k\varepsilon, (k+1)\varepsilon)$), necesitaremos hacer la siguiente definición auxiliar:

para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $t \in [0, T]$, sea $t_n = k\varepsilon$, tal que $t \in [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon)$,

es decir, en el paso n -ésimo, a cada t le asociamos un t_n que es el extremo inferior del subintervalo en el que esté. Así, para cada test ϕ , veamos que

$$(81) \quad \int_{\mathbb{R}^2} (\omega_n(t, x) - \omega(t_n, x)) \phi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En este caso, usamos que ω_n sí es regular y cumple la ecuación en sentido clásico, por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (\omega_n(t, x) - \omega_n(t_n, x)) \phi(x) dx &= \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \omega_n(s, x)}{\partial t} \phi(x) dx ds \\ &= - \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}^2} u_n(t_n, x) \cdot \nabla \omega_n(s, x) \phi(x) dx ds = \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}^2} \omega_n(s, x) u_n(t_n, x) \cdot \nabla \phi(x) dx ds \end{aligned}$$

donde, al integrar por partes, hemos usado que $\operatorname{div}(u_n(t_n, x)) = 0$. Tomando entonces valor absoluto, obtenemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} (\omega_n(t, x) - \omega(t_n, x)) \phi(x) dx \right| \leq \|\omega_n\|_{\infty} \|u_n\|_{\infty} \|\nabla \phi\|_1 |t - t_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

y, por lo tanto, (81). Con este resultado en la mano, vamos a ver que $u = K * \omega$ y, gracias a la Proposición 39, el resto del apartado i).

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (u_n(t, x) - K * \omega(t, x)) \phi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} K * (\omega_n(t_n, x) - \omega(t, x)) \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\omega_n(t_n, x) - \omega_n(t, x)) (\tilde{K} * \phi)(x) + (\omega_n(t, x) - \omega(t, x)) (\tilde{K} * \phi)(x) dx, \end{aligned}$$

donde $\tilde{K}(x) = K(-x)$. Como el primer término tiende a cero gracias a (81) y el segundo también gracias a la convergencia de ω_n , basta tomar valor absoluto y límite, para deducir que u_n converge a $K * \omega$, lo que concluye i).

Veámos ahora ii). Notemos que gracias al Lema 41, nuestro campo u es continuo y logarítmico lipschitziano respecto a x y es entonces el Teorema 40 el que nos garantiza la existencia de las únicas curvas características descritas en ii).

Por último, probemos iii). Por un lado, definimos $w(t, x) := \omega_0(X(0; t, x))$ y probamos que es solución débil de la ecuación *lineal* $w + u \cdot \nabla w = 0$ con condición inicial ω_0 . Para ello, tomamos un test ϕ sobre el conjunto $Q_T := [0, T) \times \mathbb{R}^2$ y calculamos como sigue;

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \omega_0(\overbrace{X(0; t, x)}^y) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi \right) dx dt = \left[\begin{array}{l} y = X(0; t, x) \leftrightarrow x = X(t; 0, y) \\ y \operatorname{div}(u) = 0 \Rightarrow dx = Jdy = dy \end{array} \right] \\ & = \int_{Q_T} \omega_0(y) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi \right) (t, X(t; 0, y)) dy dt = \int_{Q_T} \omega_0(y) \frac{d(\phi(t, X(t; 0, y)))}{dt} dy dt \\ & = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(y) \left[\phi(t, X(t; 0, y)) \right]_{t=0}^{t=T} dx = - \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(y) \phi(0, y) dx, \end{aligned}$$

como queríamos. Por otro lado, nuestra ω también es solución débil $w + u \cdot \nabla w = 0$ con la misma condición ω_0 (aunque cumple más cosas), por lo que podemos deducir lo siguiente:

$$(82) \quad \int_{Q_T} \left(\omega(t, x) - \omega_0(X(0; t, x)) \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi \right) dx dt = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(Q_T),$$

y la idea es aplicar el ejercicio 35 (lema fundamental del cálculo de variaciones) mediante la misma técnica para unicidad empleada en el Teorema 17. Dada una función test $\psi(t, x)$ cualquiera, resolvemos el problema de transporte

$$\frac{\partial \phi_\psi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi_\psi = \psi, \quad \phi_\psi(T, x) = 0,$$

que ya sabemos por el Capítulo 2 que posee solución clásica ϕ_ψ . Pues ahora simplemente tomando esta función ϕ_ψ como test en la fórmula (82) anterior, obtenemos

$$0 = \int_{Q_T} \left(\omega(t, x) - \omega_0(X(0; t, x)) \right) \psi(t, x) dx dt$$

y la arbitrariedad de ψ permite concluir que $\omega(t, x) = \omega_0(X(0; t, x))$.

En este punto, aparentemente hemos terminado, pues se ha establecido la relación cíclica única siguiente

$$u \mapsto X \mapsto \omega(t, x) = \omega_0(X(0; t, x)) \mapsto u = K * \omega,$$

pero en realidad, aún no hemos probado que no pueda haber dos posibles soluciones, cada una con su esquema único (u_1, X_1, ω_1) y (u_2, X_2, ω_2) . Vamos a ello usando las mismas ideas del Teorema 40 ya que, en esencia, es la logarítmico-lipschitzianidad la propiedad esencial. Supongamos igualmente que tenemos sendas soluciones (u_1, X_1, ω_1) y (u_2, X_2, ω_2) y sea $Y(t; x) := |X_1(t; 0, x) - X_2(t; 0, x)|$, entonces

$$\begin{aligned} Y(t; x) &= \left| x + \int_0^t u_1(s, X_1(s)) ds - x - \int_0^t u_2(s, X_2(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t \left| u_1(s, X_1(s)) - u_1(s, X_2(s)) \right| ds + \int_{t_0}^t \left| u_1(s, X_2(s)) - u_2(s, X_2(s)) \right| ds, \end{aligned}$$

y tratamos estas dos integrales I_1 e I_2 por separado. La primera, al aparecer involucrada solo el campo u_1 , se trata igual que en el Teorema 40, obteniendo

$$I_1 \leq C \int_{t_0}^t \operatorname{loglip}(|X_1(s) - X_2(s)|) ds \leq C \int_{t_0}^t \operatorname{loglip}(\|Y(s; \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}) ds.$$

Para la segunda, reescribimos $(u_1 - u_2)$ usando los apartados previos:

$$u_1 - u_2 = K * \omega_1 - K * \omega_2 = K * (\omega_0 \circ X_1(0; t, \cdot)) - K * (\omega_0 \circ X_2(0; t, \cdot))$$

por lo que, al aplicar el apartado iv) de la Proposición 39, obtenemos

$$\|u_1 - u_2\| \leq C \operatorname{loglip}(\|X_1(t; 0, \cdot) - X_2(t; 0, \cdot)\|_\infty).$$

Definiendo ahora $y(t) = \|Y(s; \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = \|X_1(t; 0, \cdot) - X_2(t; 0, \cdot)\|_\infty$ deducimos, exactamente la misma desigualdad que en el Teorema 40:

$$y(t) \leq 2C \int_{t_0}^t \operatorname{loglip}(y(s)) ds,$$

por lo que siguiendo el mismo argumento concluimos que $y = 0$ y que, por lo tanto, $X_1 = X_2$ y, volviendo a nuestro bucle, que $\omega_1 = \omega_2$ y $u_1 = u_2$. \square

Ejercicios

23. Calcula el flujo de momento para un fluido ideal.
24. Dado un vector no nulo $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$ y la matriz antisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

comprueba que e^A es la matriz de un giro en \mathbb{R}^3 de ángulo $|\eta|$ con respecto al vector η y en el sentido de la regla de la mano derecha.

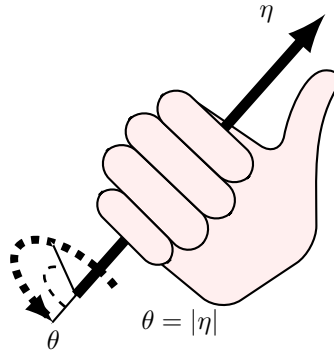


FIGURA 3. Regla de la mano derecha: alineando el pulgar derecho con el eje η , los dedos girados indican el sentido del giro. En este caso, además, el ángulo coincide con el módulo del vector η .

25. Dadas las funciones escalares $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y los campos $u, v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, todos suficientemente regulares, prueba las siguientes identidades:
- $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(u)) = 0$,
 - $\operatorname{rot}(\nabla f) = (0, 0, 0)$,
 - $\operatorname{div}(u \times v) = v \cdot \operatorname{rot}(u) - u \cdot \operatorname{rot}(v)$,
 - $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$,

- e) $\operatorname{rot}(u \times v) = u \operatorname{div}(v) - v \operatorname{div}(u) - u \cdot \nabla v + v \cdot \nabla u$,
 f) $\operatorname{rot}(fu) = \nabla f \times u + f \operatorname{rot}(u)$,
 g) $\nabla(u \cdot v) = u \cdot \nabla v + v \cdot \nabla u + v \times \operatorname{rot}(u) + u \times \operatorname{rot}(v)$,
 y, en particular: $u \cdot \nabla u = \frac{1}{2} \nabla(|u|^2) - u \times \operatorname{rot}(u)$.
 h) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(u)) = -\Delta(u) + \nabla(\operatorname{div}(u))$,
 y, en particular, para $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (ver página 86), se tiene:
 $\operatorname{rot}_{2D}(\operatorname{rot}_{1D}(\phi)) = -\Delta\phi$.

26. Para la función $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por (76) en la Proposición 39, prueba que:

- a) $|K(x)| = \frac{1}{2\pi|x|}$, y se cumplen las siguientes igualdades para $0 < d < 1$:

$$\int_{|x| \leq d} \frac{1}{|x|} dx = 2\pi d, \quad \int_{d \leq |x| \leq 1} \frac{1}{|x|^2} dx = 2\pi \ln(d),$$

- b) $|K(x) - K(y)| = \frac{1}{2\pi} \frac{|x - y|}{|x||y|}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$.
 c) $|K(x) - K(y)| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \right)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$.

27. Si $\omega \in L^p(\mathbb{R}^2) \cap L^q(\mathbb{R}^2)$, con $1 \leq p < 2 < q \leq \infty$, y $u = K * \omega$ es el campo definido en la Proposición 39, prueba que existe $C > 0$ tal que:

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C(\|\omega\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\omega\|_{L^q(\mathbb{R}^2)})$$

Parte 3

Apéndices

Nociones de cálculo y análisis

En este apéndice se recopilan algunas definiciones y resultados básicos tanto de ecuaciones diferenciales como de cálculo vectorial que aparecen en los contenidos del tema. Para un estudio en detalle ver [30].

1. Resultados clásicos de Ecuaciones Diferenciales

Comenzamos con un resultado que hemos usado varias veces a lo largo de las notas, aunque en el Capítulo 5 hemos probado uno más general para campos logarítmico-lipschitzianos. Este es el resultado clásico que garantiza la existencia y unicidad de solución de problemas de valores iniciales (PVI).

Teorema 43 (Picard-Lindelöf). *Dado un campo dado $a : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continuo y localmente lipschitziano respecto de la variable x , entonces el PVI*

$$X'(t) = a(t, X(t)), \quad X(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in \Omega,$$

posee una única solución definida en algún entorno del punto t_0 .

Además, si $\Omega = (a, b) \times \mathbb{R}^N$ y a es Lipschitziano en todo Ω , la solución X está definida en todo el intervalo (a, b) .

Recordamos que un campo a es localmente lipschitziano respecto a x si para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una cierta constante $C_K > 0$ tal que:

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leq C_K |x - y|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in K,$$

donde $|\cdot|$ representa alguna norma vectorial en \mathbb{R}^N . La primera parte constituye un resultado de tipo: **existencia local de solución** (en tiempo), ya que la solución está definida, en principio, solo en un pequeño entorno del punto t_0 . La segunda parte, por el contrario, cuando a es lipschitziano (la constante de Lipschitz C es la misma para cualquier compacto), es un resultado de tipo **existencia global**.

En la práctica, para verificar que el campo a sea *localmente lipschitziano*, basta con saber que es derivable, y para saber que es (globalmente) lipschitziano basta que su derivada esté acotada en su dominio Ω , y que este sea convexo.

Por último, cuando es necesario, la solución del PVI anterior se denota como $X(t; t_0, x_0)$ para resaltar la dependencia, aunque aparentemente implícita, de la condición inicial (t_0, x_0) . De hecho, cuando el campo a depende adicionalmente de un cierto parámetro $\lambda \in \mathbb{R}^p$, por la misma razón podemos denotar la solución como $X(t; t_0, x_0, \lambda)$. El siguiente resultado, el Teorema de Peano, establece como es esta dependencia bajo ciertas hipótesis de regularidad (véase por ejemplo [24]).

Teorema 44 (Teorema de Peano de dependencia diferenciable). *Dado un campo dado $a : \Omega \times \Lambda \subseteq \mathbb{R}^{N+1+p} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continuo en todas sus variables y derivable respecto de las variables x y λ . Entonces, la única solución $X(t; t_0, x_0, \lambda)$ del PVI*

$$X'(t) = a(t, X(t), \lambda), \quad X(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in \Omega, \quad \lambda \in \Lambda$$

es derivable con derivada continua respecto de todas sus variables.

Hacemos notar que el Lema 11, cuya demostración llevaremos a cabo en el Apéndice B, es en cierto sentido y cuando no hay parámetro, una generalización de este resultado con derivadas débiles. Al igual que en el Apéndice (ver ecuación (86)) las derivadas de X se pueden calcular a partir de las ecuaciones diferenciales que verifican, derivando formalmente el PVI, pero no lo vamos a usar por lo que lo omitimos en estas notas.

Otro de los resultados que hemos utilizado en el primer Capítulo es la expresión de una solución de un PVI lineal conocida como **fórmula de variación de las constantes**; veamos su descripción a modo de Teorema.

Teorema 45 (Fórmula de variación de constantes). Sean $\alpha, \beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^N$ funciones continuas y sea $y(t)$ la solución del PVI lineal:

$$y'(t) = \alpha(t) + \beta(t)y(t), \quad y(t_0) = y_0,$$

para ciertos $t_0 \in (a, b)$ e $y_0 \in \mathbb{R}^N$. Entonces $y(t)$ se escribe como

$$(83) \quad y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^t \beta(s)ds\right) + \int_{t_0}^t \alpha(s) \exp\left(\int_s^t \beta(\tau)d\tau\right)ds,$$

El siguiente es un resultado típico de comparación de ecuaciones. De hecho, lo colocamos a continuación del anterior para que el lector pueda establecer cierto paralelismo entre ambos. En realidad es un caso particular del **Lema de Gronwall**, como reza en el enunciado, pero es la versión que usamos en estas notas y una de las más utilizadas, en general.

Teorema 46 (Lema de Gronwall). Sea $y(t) : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua verificando

$$y(t) \leq y_0 + \int_s^t \beta(s)y(s) ds \quad \text{para cada } s, t \in (a, b),$$

para ciertas $y_0 \geq 0$ constante y $\beta(s) \geq 0$ función continua. Entonces,

$$y(t) \leq y_0 \exp\left(\int_s^t \beta(s)ds\right), \quad \text{para cada } s, t \in (a, b).$$

Por último, enunciamos aquí un teorema de punto fijo que hemos usado para probar la existencia de soluciones como puntos fijos de un operador (véase [51]).

Teorema 47. (Teorema de punto fijo de Banach) Sea $M \subset E$ un subconjunto cerrado no vacío de un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$, y sea $\mathcal{T} : M \rightarrow M$ un operador contractivo, esto es, que existe cierta constante $L < 1$ tal que

$$\|\mathcal{T}[u] - \mathcal{T}[v]\|_E \leq L\|u - v\|_E \quad \forall u, v \in M.$$

Entonces existe un único punto fijo \bar{u} del operador \mathcal{T} en el conjunto M .

Además, dado cualquier punto $u_0 \in M$, si se define la sucesión por recurrencia $u_{n+1} := \mathcal{T}[u_n]$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, entonces se tiene

$$\|u_n - \bar{u}\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2. Nociones de cálculo vectorial

Definición 48. (*Superficie parametrizada*) Una superficie parametrizada viene dada por una función $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua y biyectiva, de modo que ϕ constituye un homeomorfismo entre D y su imagen $S = \Phi(D)$. Propiamente llamamos superficie a S y a Φ una parametrización de S .

Definición 49. (*Plano tangente a una superficie en un punto*). Dada una superficie con parametrización regular

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad \Phi \in C^1(D),$$

en cada punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$ de S se definen sendos vectores tangentes:

$$T_u(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right),$$

$$T_v(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

Diremos que el punto p_0 es regular cuando estos vectores son independientes, esto es, cuando $T_u \times T_v \neq \vec{0}$, donde \times representa el producto vectorial. Pues bien, en todo punto p_0 regular se define el plano tangente a la superficie en él $T_{p_0}(S)$ como el plano afín que pasa por p_0 y con espacio de direcciones el generado por T_u y T_v . Si notamos que $T_u \times T_v$ es un vector normal al plano, el plano tangente viene dado por:

$$T_{p_0}(S) = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x - p_0) \cdot (T_u \times T_v) = 0\}.$$

Ejemplo 1 (Superficie grafo). Dada una función regular $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se puede definir una superficie en \mathbb{R}^3 mediante la parametrización

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \Phi(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Ejemplo 2 (Superficie reglada cilíndrica). Dada una función $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ inyectiva, se puede definir una superficie en \mathbb{R}^3 mediante la parametrización

$$\Phi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \Phi(u, v) = (u, g(u), v)$$

Ejemplo 3 (Superficie de rotación). Una parametrización que podemos adoptar para la esfera de \mathbb{R}^3 centrada en el origen y de radio r es la dada por las coordenadas esféricas, es decir,

$$\Phi : (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u, v) = (r \cos(u) \cos(v), r \cos(u) \sin(v), r \sin(u))$$

Definición 50. (*Integral de una función escalar sobre una superficie*). Si $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con valores reales definida en una superficie parametrizada S (basta que sea regular a trozos), definimos su integral sobre S como

$$\int_S f \, dS := \int_D f(\Phi(u, v)) |T_u(u, v) \times T_v(u, v)| \, du \, dv$$

Definición 51. (*Integral orientada de un campo vectorial*). Dado un campo vectorial $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido sobre una superficie parametrizada S (basta que sea regular a trozos), podemos definir la siguiente integral

$$\int_S F \cdot dS := \int_S (F \cdot n) \, dS,$$

donde n es el vector normal unitario $n = \frac{T_u(u,v) \times T_v(u,v)}{|T_u(u,v) \times T_v(u,v)|}$ asociado a Φ , es decir

$$\int_S F \cdot dS = \int_D F(\Phi(u,v)) \cdot (T_u(u,v) \times T_v(u,v)) du dv.$$

Nota 52. Es importante resaltar que la Definición 50 es independiente de la parametrización elegida Φ , mientras que la Definición 51 sí depende de Φ , concretamente de su orientación, ya que la integral cambia de signo según que el vector normal asociado a Φ apunte a un lado u otro de la superficie. Este hecho hace que solo tenga sentido usar este concepto sobre superficies orientables (que admitan una aplicación n , también llamada de Gauss, continua), normalmente aquellas que son fronteras de dominios regulares que constituyen su interior, y que son precisamente sobre las que se aplican los teoremas que siguen.

Definición 53 (Divergencia de un campo vectorial). Si consideramos el campo vectorial $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$, la divergencia de F es la función escalar

$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Teorema 54 (Teorema de Gauss o de la divergencia). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio acotado en el espacio cuya frontera $S = \partial\Omega$ es una superficie cerrada y regular a trozos y sea F un campo regular definido en $\bar{\Omega}$. Entonces se verifica:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n dS, \quad \left(\text{o bien } \int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot dS \right).$$

donde n es el normal **exterior** a Ω (ver Nota 52) en cada punto de la frontera S .

Este resultado no está limitado a dimensión 3, de hecho el análogo es cierto para $\Omega \subset \mathbb{N}^N$, lo que solo requiere generalizar las Definiciones 50 y 51 a hipersuperficies como $\partial\Omega$. Por completitud, lo enunciamos aquí en 2-D.

Teorema 55 (Teorema de Gauss o de la divergencia en 2-D). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado en el plano cuya frontera $\Gamma = \partial\Omega$ es una curva cerrada y regular a trozos y sea F un campo regular definido en $\bar{\Omega}$. Entonces se verifica:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n dS,$$

donde n es el normal **exterior** a Ω en cada punto de la frontera S . Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una parametrización regular (a trozos) de la curva cerrada $\Gamma = \partial\Omega$ orientada en sentido antihorario, la integral de línea de derecha se puede escribir como

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n dS = \int_a^b F(\gamma(\xi)) \cdot n(\gamma(\xi)) |\gamma'(\xi)| d\xi = \int_a^b F(\gamma(\xi)) \cdot A\gamma'(\xi) d\xi,$$

donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz del giro de 90° a la derecha.

Veamos otros dos resultados muy interesantes equivalentes a este teorema.

Teorema 56 (Integración por partes en \mathbb{R}^3). Sean u y v funciones de $C^1(\bar{\Omega})$ siendo $S = \partial\Omega$ una superficie regular a trozos. Entonces se verifica la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int_{\Omega} v(x) \partial_{x_i} u(x) dx = \int_{\partial\Omega} v(x) u(x) n_i d\sigma(x) - \int_{\Omega} u(x) \partial_{x_i} v(x) dx$$

donde $i = 1, 2, 3$, y $n_i(x)$ es la componente i -ésima del vector normal exterior n .

Teorema 57 (Primera identidad de Green). Sean u y v funciones de $C^2(\bar{\Omega})$ siendo $S = \partial\Omega$ una superficie regular a trozos, entonces se verifica la siguiente identidad:

$$(84) \quad \int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} v (\nabla u \cdot n) \, dS - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx$$

donde n es el vector normal exterior en cada punto.

Ejercicios

28. Calcula sendas fórmulas para las áreas de las superficies de los ejemplos 1 y 2 de la página 101.
29. Verifica, con el siguiente ejemplo, que la hipótesis de regularidad de F del teorema de la divergencia es necesaria. Considera el campo vectorial

$$F(x) = \frac{x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 - \{0\},$$

que claramente no es regular y el dominio $\Omega = B(0, r)$, la bola de centro 0 y radio r . Verifica que las dos integrales involucradas en el teorema de la divergencia son

$$\int_{B(0,r)} \operatorname{div}(F) \, dx = 0 \quad \text{pero} \quad \int_{rS^2} F \cdot n \, dS = 4\pi.$$

Indicación: para la primera demostración que $\operatorname{div}(F) = 0$ en todo punto no nulo y para la segunda que $F \cdot n$ resulta constantemente $1/r^2$.

30. (Divergencia y Teorema de Gauss de un campo tensorial). Si consideramos el campo tensorial

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{M}_3 \quad \text{dado por} \quad T(x, y, z) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} (x, y, z),$$

la divergencia de T se define como el campo vectorial

$$\operatorname{Div}(T) = \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z}, \frac{\partial T_{21}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + \frac{\partial T_{23}}{\partial z}, \frac{\partial T_{31}}{\partial x} + \frac{\partial T_{32}}{\partial y} + \frac{\partial T_{33}}{\partial z} \right)$$

Prueba que bajo las mismas hipótesis del teorema 54 se verifica que

$$\int_{\Omega} \operatorname{Div}(T) \, dx = \int_{\partial\Omega} T \cdot n \, dS,$$

donde $T \cdot n$ indica el producto de la matriz T por el vector n .

3. Espacios L^q y espacios de Sobolev

Recordamos ahora ciertas nociones básicas sobre espacios L^p , para lo que supondremos conocidos resultados básicos sobre integrabilidad de funciones respecto a la medida de Lebesgue. En [11, 18] se pueden encontrar las demostraciones de los resultados que aquí se enuncian de una forma sintética, aunque podemos asegurar que este tema podría ser, por sí mismo, el objeto de un curso completo (ver [1] para profundizar).

Definición y propiedades sobre espacios L^p .

Dado un abierto Ω de \mathbb{R}^N , definimos el espacio $L^p(\Omega)$ con $p \in [1, \infty)$ como el espacio vectorial de todas aquellas funciones medibles, definidas *casi por doquier*, y con norma p integrable, es decir,

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} ; \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}, \quad p \in [1, \infty).$$

También definimos $L^\infty(\Omega)$ como el espacio vectorial de las aquellas funciones medibles y acotadas *casi por doquier*, es decir

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} ; \exists L > 0 \text{ tal que } \left| \{x \in \omega : |f(x)| > L\} \right| = 0 \right\}.$$

Por último, diremos que una función f está en $L^p_{loc}(\Omega)$ cuando dicha función pertenece a $L^p(K)$ al ser restringida a cualquier compacto $K \subseteq \Omega$.

Recordamos que en estos espacios **se identifican las funciones** que son iguales *casi por doquier* (c.p.d. o en casi todo punto), es decir, **que difieren como mucho en un conjunto de medida nula**. El hecho de que estas funciones estén definidas c.p.d. tiene diversas repercusiones en la forma de trabajar con ellas; por ejemplo, el valor en un punto de una función $f \in L^p(\Omega)$ es algo que carece de sentido, puesto que un punto constituye un conjunto de medida nula. Para ser matemáticamente rigurosos tendríamos que trabajar con clases de equivalencia en vez de con funciones, pero no lo haremos porque no se hace en la mayoría de los textos y porque añade una complejidad innecesaria para los objetivos de esta asignatura.

Un hecho realmente fundamental es que los espacios $L^p(\Omega)$ se convierten en espacios completos, o **espacios de Banach**, si se dotan de las siguientes normas:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p \in [1, \infty), \\ \|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= \inf \left\{ L > 0 ; |f(x)| < L \text{ c.p.d. en } \Omega \right\}. \end{aligned}$$

Además de ser espacios normados completos, los espacios $L^p(\Omega)$ poseen otras propiedades muy útiles que vamos a enunciar, pero antes, necesitamos un concepto habitual: diremos que **dos exponentes** $1 \leq p, p' \leq \infty$ **son conjugados cuando**

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}, \quad \text{en general y, en particular } 1' = \infty \text{ y } \infty' = 1.$$

Enunciamos ahora algunas de estas propiedades tan importantes.

1. Desigualdad de Hölder.

Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$, p y p' conjugados, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y además

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

2. Desigualdad de interpolación.

Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ con $1 \leq p < q \leq \infty$, entonces $f \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p, q]$, y además podemos estimar su norma:

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}, \quad \text{con } \alpha \in [0, 1] \text{ tal que } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}.$$

3. **Algunas inclusiones.** Usando Hölder, es fácil probar que (véanse los ejercicios 32 y 33):

3.1. Para cualquier p , se tiene: $L^\infty(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$.

3.2. Cuando el abierto Ω es finito, entonces si $q > p$ se tiene $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Derivación de funciones de L^p : derivada débil.

A continuación vamos a introducir una nueva noción de *derivada* válida incluso para las funciones de $L^p(\Omega)$. Aunque evidentemente esta nueva noción no puede coincidir con la de derivada clásica, tampoco parece razonable proponer un concepto que no tenga ninguna relación con ella. Por ello vamos a aprovechar una propiedad global que cumplen las funciones derivables (en sentido clásico) que caracteriza a su derivada y que sí vamos a poder generalizar.

Para ello, necesitamos introducir un nuevo conjunto, el de las **funciones test**: llamaremos función test: ϕ , a una función de clase $C^\infty(\Omega)$ cuyo soporte sea un conjunto cerrado y acotado (en términos matemáticos, un compacto) contenido en Ω . Para nuestro objetivo, las funciones test son simplemente funciones tan regulares como queramos y que se hacen cero antes de llegar al borde de Ω . Al conjunto de funciones test se le suele denotar por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Pues bien, ya podemos dar la propiedad sobre las derivadas de la que hablamos anteriormente y que queremos generalizar; dada una función derivable $f \in C^1(\Omega)$, podemos asegurar que las siguientes cantidades son finitas y cumplen la igualdad:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \phi \, dx = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx, \quad i = 1, \dots, N,$$

para cualquier función test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. A esta fórmula la podemos llamar temporalmente: **integración por partes** (aunque la fórmula original incluye otros términos que aquí no aparecen, por ser nulos). Como ya adelantamos, esta fórmula posee dos claves fundamentales; 1: la parte derecha de la igualdad tiene sentido para funciones no necesariamente derivables y 2: caracteriza las derivadas de f en el siguiente sentido: si encontrásemos “otra” función g continua tal que

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx = - \int_{\Omega} g \phi \, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

entonces esta función g es necesariamente la derivada $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (ver ejercicio propuesto 36). Gracias a ello, podemos hacer la siguiente definición de *derivada*, que englobará a la clásica, pero que se aplicará a un conjunto de funciones muchísimo mayor.

Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$; entonces diremos que f **tiene derivada débil con respecto a x_i y su derivada débil es $g \in L^1_{loc}(\Omega)$** cuando:

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx = - \int_{\Omega} g \phi \, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Cuando exista esta derivada débil de f , por consistencia con la notación clásica, se le notará directamente como $g := \frac{\partial f}{\partial x_i}$. A continuación, vamos a dar unas pinceladas sobre los espacios vectoriales en los que *viven* las funciones que tienen derivadas débiles, su nombre, su norma y algunas de sus propiedades.

Espacios de Sobolev.

De forma parecida a como se define $\mathcal{C}^1(\Omega)$, para la derivación débil se definen los **espacios de Sobolev**, para $1 \leq p \leq \infty$, como:

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ v \in L^p(\Omega) \text{ t.q. existen sus derivadas débiles y también son } L^p \right\}.$$

Al igual que $L^p(\Omega)$, los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ son espacios completos, si se dotan de las siguientes normas:

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\|v\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{1 \leq i \leq N} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } p \in [1, \infty),$$

$$\|v\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \max \left\{ \|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty(\Omega)}, \dots, \left\| \frac{\partial v}{\partial x_N} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}, \quad \text{si } p = \infty.$$

Estos espacios son hoy día una herramienta básica en el análisis de ecuaciones en derivadas parciales, aunque así definidos no parezcan nada naturales. Para que nos sirva como ejemplo a todos aquellos que hayan estudiado algo de teoría cuántica, podemos señalar que las soluciones de la ecuación de Schrödinger: $\partial_t \phi = i\Delta \phi + V\phi$ están en el espacio de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$, usualmente también denotado por $H^1(\Omega)$, cuya norma está inducida por el siguiente producto escalar:

$$\langle u, v \rangle = \mathcal{R}e \left(\int_{\Omega} u(x) \bar{v}(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \overline{\nabla v(x)} dx \right)$$

donde $\mathcal{R}e$ denota la parte real. En este caso ambos términos tienen un significado físico, ya que si ϕ es la *función de onda* de un electrón, entonces

$$\mathcal{R}e \int_{\Omega} \phi \bar{\phi} dx = \int_{\Omega} |\phi|^2 dx$$

es una medida de la probabilidad de encontrar al electrón en Ω , mientras que

$$\mathcal{R}e \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \phi \overline{\nabla \phi} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx$$

es la denominada energía cinética del electrón (el lector interesado puede profundizar en [14]). En [11, 18] se puede encontrar el análisis de otro tipo de ecuaciones clásicas cuyas soluciones están en estos espacios. En el resto del capítulo realizaremos este análisis para las ecuaciones de transporte lo que, más allá de una justificación rigurosa matemática, será el pilar que sustenta otros análisis como las técnicas numéricas para aproximar soluciones (método de elementos finitos, métodos de partículas, etc.) o las variacionales para analizar estabilidad de soluciones.

Por supuesto, la derivación débil también permite considerar derivadas de orden superior. Puesto que las derivadas débiles de una función de $W^{1,p}$ son a su vez funciones de $L^p(\Omega)$, estas pueden tener a su vez derivadas, que llamaremos derivadas débiles segundas de la función original y, por supuesto, se notarán empleando la misma notación que en el caso clásico, mediante **multi-índices**. Un multi-índice es un vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$, cuyas componentes son naturales (incluyendo

al 0), que permite notar las derivadas de orden superior del siguiente modo:

$$D^\alpha v := \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, \text{ siendo } D^0 v = v,$$

y donde $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ es el orden de la derivada. De esta forma, dado un número natural $m \in \mathbb{N}$, el papel análogo a los espacios $C^m(\Omega)$ lo jugarán los siguientes **espacios de Sobolev**: para cada $1 \leq p \leq \infty$:

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ v \in L^p(\Omega) : \begin{array}{l} \text{existen todas sus derivadas débiles} \\ \text{hasta el orden } m \text{ y también son } L^p \end{array} \right\}.$$

De nuevo se convierten es espacios completos si los dotamos de las normas:

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N, |\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } p \in [1, \infty),$$

$$\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \text{máx} \left\{ \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)} : \alpha \in \mathbb{N}_0^N, |\alpha| \leq m \right\}, \quad \text{si } p = \infty.$$

Con el fin de familiarizarnos con estos espacios y, de camino, hacer estas notas autocontenidas (en la medida de lo posible) vamos a enunciar y comentar algunas propiedades y reglas de derivación (débil) de estas funciones (ver demostraciones en [11, Cap. VIII y IX]).

Teorema 58. (Caracterización de los espacios de Sobolev). *Sea $v \in L^p(\Omega)$ con $1 < p \leq \infty$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (i) $v \in W^{1,p}(\Omega)$.
- (ii) Existe $C > 0$ tal que $\left| \int_{\Omega} v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\phi\|_{L^{p'}}$ para todo test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
- (iii) Existe $C > 0$ tal que para todo abierto ω contenido estrictamente en Ω y todo $h \in \mathbb{R}^N$ con $|h|$ inferior a la distancia entre ω y \mathbb{R}^N/Ω , se verifica

$$\|v(\cdot + h) - v(\cdot)\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|$$

Además la constante C en los dos últimos puntos se puede tomar $C = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$.

Nota 59. *En el caso $p = 1$ solo se verifica (i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii). Las funciones que verifican (ii) con $p = 1$ se denominan funciones de variación acotada, también relevantes en otro tipo de aplicaciones.*

Observemos que la propiedad (iii) es del tipo Lipschitziano, y suele aparecer en los argumentos de unicidad. Ahora presentamos las reglas de derivación del producto y de la cadena en el caso de derivadas débiles.

Proposición 60. (Reglas de derivación débil).

1. **Derivada de un producto.** *Sean dos funciones $v, w \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $v w \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y*

$$\frac{\partial(vw)}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} w + v \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

2. **Derivada de una composición.** *Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ verificando $G(0) = 0$ y $|G'(s)| \leq M$ para todo $s \in \mathbb{R}$, y sea $v \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces:*

$$G \circ v \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad \frac{\partial(G \circ v)}{\partial x_i} = (G' \circ v) \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Además, cuando $p = \infty$, el resultado es cierto sin pedir $G(0) = 0$.

3. **Regularidad débil también produce clásica, pero bajando un grado.** Sea $w \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$, con $p > N$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces existe una función $\bar{w} \in C^{k-1}(\mathbb{R}^N)$ que es igual a w en casi todo punto.

Estos resultados son válidos en cualquier dimensión (recordemos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$), sin embargo, hay resultados especialmente interesantes válidos únicamente en dimensión $N = 1$ que nos van a ser de utilidad en estas notas ya que la variable temporal t de las soluciones de nuestras ecuaciones de transporte es $1D$.

Teorema 61. (Propiedades especiales en $1D$). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Entonces son válidas las siguientes afirmaciones.

- (i) Sea $w \in L^1_{loc}(I)$ e $t_0 \in I$ un punto cualquiera. Entonces la función

$$v(t) = \int_{t_0}^t w(s) ds, \quad t \in I$$

es continua y $v' = w$, es decir, tiene derivada débil y es w .

- (ii) Sea $w \in L^1_{loc}(I)$ tal que

$$\int_I w(s)\phi'(s) ds = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(I),$$

entonces, existe una constante C tal que $w(x) = C$ c.p.d.

- (iii) Sea $w \in W^{k,p}(I)$, con $1 \leq p \leq \infty$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces existe una función $\bar{w} \in C^{k-1}(I)$ que es igual a w en casi todo punto y verifica

$$\bar{w}(t) = \bar{w}(t_0) + \int_{t_0}^t w'(s) ds.$$

Estas propiedades así vistas pueden parecer muy abstractas, por lo que vamos a releerlas en otros términos para mejorar su comprensión.

La propiedad (i) es la análoga al **teorema fundamental del cálculo integral** que todos estudiamos en un curso de Cálculo básico y que permite calcular primitivas mediante la integral indefinida. Si leemos el punto (ii) de la siguiente forma: “una función derivable en sentido débil y con derivada nula es constante” nos es muy familiar (si cambiamos la palabra débil por clásico). Y por último, el punto (iii) es el que denominaremos como **existencia de representante continuo**, ya que nos dice que una función de $W^{1,p}(I)$ es esencialmente una función continua. Esto es un caso muy particular de lo que se llama **embebimiento de Sobolev** ya que estamos afirmando en cierto sentido que $W^{1,p}(I)$ **se puede meter dentro de $C(I)$** , lo cual en los textos matemáticos se notará como $W^{1,p}(I) \subset C(I)$. Esto justifica que en muchos resultados que enunciamos a continuación para demostrar que una función sea continua probemos que está en $W^{1,p}(I)$.

Los espacios $L^p(0, T, W^{m,q}(\mathbb{R}^N))$ de Lebesgue-Bochner.

Por último, en esta introducción, hacemos notar que cuando las soluciones de una ecuación dependen de forma diferente de sus variables, del espacio y del tiempo en el caso, es probable que tengan distinta regularidad con respecto a una u otra variable y, por lo tanto, los espacios funcionales de trabajo deben reflejar esta particularidad.

Por ello, a partir de ahora y en todo lo que sigue, consideraremos que la variable temporal t , se va a mover en el intervalo $[0, T]$, para $T > 0$, mientras que la variable

espacial x estará en \mathbb{R}^N . Con esto, los espacios funcionales con los que vamos a trabajar son los siguientes. Dada una función $w : [0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que pertenece al espacio $L^p(0, T; W^{m,q}(\mathbb{R}^N))$ si cuando fijamos $t \in [0, T]$ (casi todo t), la función resultante y que sólo dependerá de x , cumple:

$$w(t) \equiv w(t, \cdot) \in W^{m,q}(\mathbb{R}^N)$$

y además la aplicación $t \mapsto \|w(t, \cdot)\|_{W^{m,q}(\mathbb{R}^N)}$ pertenece a $L^p(0, T)$, esto es

$$\left(\int_0^T \|w(t)\|_{W^{m,q}(\mathbb{R}^N)}^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Es fácil intuir que este espacio dotado de la norma

$$\|w\|_{L^p(0,T;W^{m,q}(\mathbb{R}^N))} := \left(\int_0^T \|w(t, \cdot)\|_{W^{m,q}(\mathbb{R}^N)}^p dt \right)^{1/p},$$

heredará muchas de las propiedades antes enunciadas y, en particular, es un espacio de Banach. En el caso de que, además, existan las derivadas parciales débiles $\partial_t w, \partial_t^2 w, \dots, \partial_t^k w$, hasta cierto natural $k \geq 1$, y además dichas derivadas pertenezcan a $L^p(0, T; W^{m,q}(\mathbb{R}^N))$ entonces diremos que dicha función está en

$$W^{k,p}(0, T; W^{m,q}(\mathbb{R}^N))$$

y se le puede asociar la correspondiente norma. En los libros de texto especializados en el análisis de ecuaciones en derivadas parciales [14, 18] encontraremos la definición de los espacios $L^p(0, T; X)$ y $W^{m,p}(0, T; X)$ siendo X un espacio de Banach cualquiera, aunque en estas notas preferimos obviar esta generalización para pasar rápidamente a estudiar nuestro problema.

Por último, y de forma totalmente análoga, se define el espacio

$$C(0, T; W^{m,q}(\mathbb{R}^N)),$$

que se obtiene cuando $t \mapsto \|w(t, \cdot)\|_{W^{m,q}(\mathbb{R}^N)}$ resulta ser una aplicación continua desde $[0, T]$ en $W^{m,q}(\mathbb{R}^N)$.

Ejercicios

31. Dada $\alpha > 0$ y los conjuntos de \mathbb{R}^3 dados por $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$ y $B^c = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > 1\}$, prueba que

$$\frac{1}{|x|^\alpha} \in L^p(B) \Leftrightarrow \alpha p < 3, \quad \text{y} \quad \frac{1}{|x|^\alpha} \in L^p(B^c) \Leftrightarrow \alpha p > 3.$$

32. Demuestra que $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ está contenido en $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [1, \infty)$.

33. Demuestra que cuando $|\Omega| < \infty$, entonces $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ si $q > p$.

34. Si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ entonces cualquier derivada suya también es una función test.

35. **Lema fundamental del cálculo de variaciones.** Sea h una función continua tal que

$$\int_{\Omega} h\phi dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Probar que entonces $h = 0$.

36. Emplea el ejercicio 35 para demostrar que si tenemos $f \in C^1(\Omega)$ y existe una función continua g_i tal que

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \phi dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

entonces $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

37. Si uno compara las hipótesis exigidas a las funciones en la Proposición 60 con los resultados análogos clásicos, aparecen hipótesis extras. ¿Podrías justificar la necesidad de éstas a la vista de los resultados obtenidos? El ejercicio 31 te puede servir para buscar ejemplos de la necesidad de estas condiciones. No obstante en el caso unidimensional algunas de estas condiciones se pueden obviar (ver [11, Corolario 8.11]).

4. Nociones de análisis funcional

En esta sección vamos a enunciar algunos de los resultados de compacidad y densidad que han sido utilizados en estas notas.

Teorema 62. (*Teorema de Ascolí-Arcelà*). Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto compacto de \mathbb{R}^N y consideremos una familia $F \subset C(K)$ acotada. Si, además, verifica la propiedad de equicontinuidad, esto es:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que si } x, y \in K, |x - y| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon \quad \forall u \in F,$$

entonces, el conjunto F es precompacto en $C(K)$.

Este resultado de compacidad es habitualmente usado, y así lo hemos hecho, en su siguiente formato.

Corolario 63. (*Teorema de Ascolí-Arcelà*). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio de \mathbb{R}^N y consideremos una sucesión $\{u_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ uniformemente acotada de funciones continuas sobre Ω . Si, además, esta sucesión es equicontinua, entonces existe una función continua u y una sucesión parcial $\sigma(n)$ tal que $u_{\sigma(n)}$ converge uniformemente a u sobre compactos de Ω .

En el último Capítulo hemos usado este resultado para demostrar que la sucesión de soluciones aproximadas u_n converge uniformemente. La clave es el Lema 41, pues a partir de la logarítmico-lipschitzianidad de esta sucesión

$$|u_n(t, x) - u_n(s, y)| \leq C \text{loglip}(|t - s| + |x - y|), \quad \forall t, s \in [0, T], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

es inmediato probar que tal sucesión ha de ser equicontinua ya que la función loglip es una función uniformemente continua en \mathbb{R}^+ .

Teorema 64. (*Banach-Alaoglu-Bourbaki para L^p*) Sea $1 < p \leq \infty$ y p' su exponente conjugado, es decir $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (siendo $\infty' = 1$). Sea también $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio de \mathbb{R}^N y consideremos una sucesión de funciones $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ acotada, es decir, $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe una función $u \in L^p(\Omega)$ y una sucesión parcial $\sigma(n)$ tal que:

$$\forall \phi \in L^{p'}(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} u_{\sigma(n)}(x) \phi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(x) \phi(x) dx.$$

Nota 65. Esta convergencia se conoce como convergencia débil estrella en $L^p(\Omega)$. Es importante resaltar en este Teorema que $p = 1$ está excluido, de hecho, el resultado no es cierto para este caso. Sin embargo, sí se puede demostrar el siguiente resultado combinado.

Corolario 66. Sea una sucesión de funciones $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ en las condiciones del Teorema 64 anterior. Entonces, si además está acotada en $L^1(\Omega)$, el límite u anterior también es una función de $L^1(\Omega)$.

El siguiente resultado puede resultar un tanto abstracto; sin embargo, una vez se traduce a este lenguaje el concepto de solución débil de ciertas ecuaciones lineales, sobre todo elípticas como veremos inmediatamente, proporciona directamente una solución de las mismas.

Teorema 67. (Lax-Milgram) Sea H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal y continua. Si, además, a es coerciva, esto es,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H,$$

entonces, para cada $\tilde{f} : H \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua, el problema

$$(85) \quad \begin{cases} \text{encontrar } u \in H, \\ \text{tal que } a(u, v) = \tilde{f}(v), \quad \forall v \in H. \end{cases}$$

posee una única solución $u_{\tilde{f}}$ que, además, cumple $\|u_{\tilde{f}}\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|\tilde{f}\|_{H'}$, es decir, la aplicación lineal que a cada \tilde{f} le hace corresponder la solución $u_{\tilde{f}}$ de (85), es continua.

Como decíamos, este resultado proporciona una herramienta para obtener la existencia y unicidad de solución en ecuaciones elípticas. Enunciamos aquí algunos de estos resultados y que hemos usado en estas notas.

Corolario 68. (Ecuación de Poisson). Dada una función $f \in L^2(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio y consideremos la ecuación

$$-\Delta u = f.$$

Entonces, según las condiciones de frontera, tenemos los siguientes resultados:

- La ecuación posee una única solución (débil) en $H_0^1(\Omega)$ (Problema de Dirichlet con condiciones nulas en la frontera).
- La ecuación posee, salvo constante aditiva, una única solución (débil) en $H^1(\Omega)$ cumpliendo $|\nabla u| = 0$ en $\partial\Omega$ (Problema de Newman con condiciones homogéneas en la frontera).

La clave de la demostración, aunque no la incluimos aquí, consiste esencialmente en la relectura de la formulación débil en los mismos términos que (85). Concretamente, una solución débil de $-\Delta u = f$ cumple

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v \, dx}_{\tilde{f}(v)},$$

para cada v en el espacio adecuado. La justificación de este y otros hechos relevantes sobre las soluciones de esta ecuación requiere de una revisión de teoría del potencial que puede ser consultada en [41, Preliminaries], [18, Chap II, Th 9].

Teorema 69. (Densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$ para $p < \infty$). Sea $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio de \mathbb{R}^N . Entonces, dada una función $\omega \in L^p(\Omega)$ es posible encontrar una sucesión $\omega_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\|\omega_n - \omega\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Además, si p' es su exponente conjugado, es decir $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (siendo $1' = \infty$), se tiene

$$\forall \phi \in L^{p'}(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} \omega_{\sigma(n)}(x) \phi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \omega(x) \phi(x) dx.$$

Nota 70. Esta convergencia se conoce como convergencia débil en $L^p(\Omega)$ y coincide con la convergencia débil estrella mencionada en la Nota 65 solo cuando $1 < p < \infty$.

Es importante resaltar en este Teorema que $p = \infty$ está excluido, de hecho, el resultado no es cierto para este caso, ya que el límite uniforme de funciones continuas es continuo y en $L^\infty(\Omega)$ existen funciones no continuas.

Demostraciones

1. Demostración del Lema 11

Recordamos el enunciado de este *Teorema de Peano* en versión débil.

Lema 11. Dependencia respecto de la condición inicial. Sean $X(t; s, x)$ las curvas características asociadas a un campo de transporte a , esto es, las soluciones del PVI (16). Si las componentes de a verifican

$$a_i \in L^\infty(0, T; W^{3,\infty}(\mathbb{R}^N)), \quad 1 \leq i \leq N,$$

entonces $X(t; s, x)$ posee derivadas débiles respecto de x cumpliendo:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(\cdot; s, \cdot) \in C(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)) : 1 \leq i, j \leq N.$$

Demostración. Veamos, si existieran, qué ecuación deberían verificar las derivadas de cada X_i respecto de cada x_j , para cada $1 \leq i, j \leq N$. Derivando la ecuación (16) respecto de x_j (nótese que, gracias a las propiedades 2. y 3. de la Proposición 60, el campo a es derivable en sentido clásico respecto a x y se puede usar la regla de la cadena), obtendríamos

$$(86) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) (t) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial a_i}{\partial x_k} (t, X(t)) \frac{\partial X_k}{\partial x_j} (t), & 1 \leq i, j \leq N \\ \frac{\partial X_i}{\partial x_j} (s) = \delta_{ij}. \end{cases}$$

que es un sistema lineal homogéneo cuyos coeficientes están bien definidos:

$$A_{i,k}(t) := \frac{\partial a_i}{\partial x_k} (t, X(t; s, x)) \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^N)), \quad 1 \leq i, k \leq N,$$

puesto que ya conocemos X y a es dado y existen sus derivadas respecto a x . Razonando como en el Lema 10 (ver Ejercicio 8 al final de esta sección), sabemos que (86) posee una única solución global $Y_{i,j} \in C(0, T)$ para cada $1 \leq i, j \leq N$, y la idea es entonces probar que estas soluciones son efectivamente las derivadas de X_i respecto de x_j . Para ello, nos planteamos el sistema conjunto

$$\begin{cases} X'(t) = a(t, X(t)), & t \in (0, T) \\ Y'_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^N A_{i,k}(t) Y_{k,j}(t) & 1 \leq i, j \leq N \\ X(s) = x, & (s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N \text{ fijo,} \\ Y_{i,j}(s) = \delta_{ij}, & (\delta_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j). \end{cases}$$

que, razonando de nuevo como en el Lema 10, posee una única solución global. Pero lo que nos va a interesar es que la **sucesión de iterantes de Picard** converge

uniformemente a dicha solución, esto es, si construimos $X^0(t) \equiv x$ e $Y_{i,j}^0(t) \equiv \delta_{i,j}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$X^{n+1}(t) = x + \int_s^t a(\tau, X^n(\tau)) d\tau, \quad Y_{i,j}^{n+1}(t) = \delta_{i,j} + \int_s^t \sum_{k=1}^N A_{i,k}(\tau) Y_{k,j}^n(\tau) d\tau,$$

sabemos que estas sucesiones convergen uniformemente a la solución. obsérvese que, para simplificar la notación, cuando no sea necesario escribimos simplemente $X^n(t)$ en lugar de $X^n(t; s, x)$. A continuación observamos, por inducción, y dado que viene definida a través de una integral, que la sucesión $X^n(t; s, x)$ es $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ respecto de x , y que sus derivadas débiles verifican la fórmula recursiva siguiente:

$$Jac_x(X^{n+1})(t; s, x) = I_N + \int_s^t Jac_x(a)(\tau, X^n(\tau; s, x)) Jac_x(X^n)(\tau; s, x) d\tau,$$

donde I_N es la matriz identidad y donde hemos agrupado todas las derivadas, como es habitual, en matrices jacobianas para simplificar la notación. Notemos que el objetivo es probar que esta sucesión de derivadas converge y que su límite es Y es decir, la matriz formada por los límites de los iterantes de Picard asociados a las $Y_{i,j}^n$, es decir,

$$\alpha^{n+1}(t) := \left(Jac_x(X^{n+1})(t; s, x) - Y^{n+1}(t) \right) \xrightarrow{?} 0.$$

Para probar este hecho, reescribimos esta matriz $\alpha^{n+1}(t)$; primero notamos que la matriz $Jac_x(a)(\tau, X(\tau; s, x))$ es la misma matriz $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^{N,N}$ anterior, y reescribimos

$$\alpha^{n+1}(t) := \int_s^t Jac_x(a)(\tau, X^n(\tau)) Jac_x(X^n)(\tau) - Jac_x(a)(\tau, X(\tau)) Y^n(\tau) d\tau.$$

Ahora, sumando y restando $Jac_x(a)(\tau, X^n(\tau)) Y^n(\tau)$ en la integral, obtenemos,

$$(87) \quad \begin{aligned} \alpha^{n+1}(t) &:= \int_s^t Jac_x(a)(\tau, X^n(\tau)) \alpha^n(\tau) d\tau \\ &+ \int_s^t \left(Jac_x(a)(\tau, X^n(\tau)) - Jac_x(a)(\tau, X(\tau)) \right) Y^n(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Veamos, a partir de esta expresión, que efectivamente $\alpha^n \rightarrow 0$ uniformemente en compactos. Para ello, definimos las siguientes constantes:

- $M_a = \max_{(t,x) \in \mathbb{R}^{N+1}} \|Jac_x(a)(t, x)\|$, lo que nos permite trabajar en el intervalo compacto $I_\delta = [s - \delta, s + \delta]$ de manera que $\delta M_a < 1/2$.
- $M_Y = \max_{t \in I_\delta} \|Y^n(t)\|$; existe puesto que $Y^n \rightarrow Y$ uniformemente en I_δ .
- Como $X^n \rightarrow X$ uniformemente en I_δ y $Jac_x(f)$ es continua y, por lo tanto, uniformemente continua en K , sabemos que $Jac_x(f)(t, X^n(t))$ converge a $Jac_x(f)(t, X(t))$ uniformemente en I_δ y podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \beta_n &:= \max_{t \in I_\delta} \left| \int_s^t \left(Jac_x(a)(\tau, X^n(\tau)) - Jac_x(a)(\tau, X(\tau)) \right) Y^n(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \delta M_Y \max_{\tau \in I_\delta} \left| Jac_x(a)(\tau, X^n(\tau)) - Jac_x(a)(\tau, X(\tau)) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

- Finalmente llamamos $\alpha_n := \max_{t \in I_\delta} \|\alpha^n(t)\|$ y, tomando máximos en (87), obtenemos

$$(88) \quad 0 \leq \alpha_{n+1} \leq \delta M_a \alpha_n + \beta_n \leq \frac{1}{2} \alpha_n + \beta_n, \quad \text{con } 0 \leq \beta_n \rightarrow 0.$$

Así, para concluir que $\alpha^n(t)$ converge a cero uniformemente en I_δ , veamos que toda sucesión de números α_n cumpliendo (88) converge a 0; lo hacemos desde la definición pura de convergencia. Dado $\varepsilon > 0$ y, usando la convergencia de β_n , existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\beta_n| < \varepsilon/4$ para todo $n \geq n_0$. Llamando $C := |\alpha_{n_0}|$ y usando (88) podemos argumentar como sigue

$$\begin{aligned} \alpha_{n_0+1} &\leq \frac{1}{2} \alpha_{n_0} + \beta_{n_0} \leq \frac{C}{2} + \frac{\varepsilon}{4}; \\ \alpha_{n_0+2} &\leq \frac{1}{2} \alpha_{n_0+1} + \beta_{n_0+1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{C}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \right) + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{C}{4} + \varepsilon \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right); \\ \alpha_{n_0+3} &\leq \frac{1}{2} \alpha_{n_0+2} + \beta_{n_0+2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{C}{4} + \varepsilon \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) \right) + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{C}{8} + \varepsilon \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right); \end{aligned}$$

de donde adivinamos el argumento inductivo que nos lleva a probar que

$$\alpha_{n_0+k} \leq \frac{C}{2^k} + \varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \leq \frac{C}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $k \geq 1$. Por lo tanto, si tomamos un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C/2^{k_0} < \varepsilon/2$, deducimos que, para todo $n \geq k_0 + n_0$, se tiene $\alpha_n < \varepsilon$, y se concluye la convergencia. Nótese que, aunque δ es pequeño y el intervalo I_δ no abarca en principio cualquier compacto, redefiniendo

$$\begin{aligned} X^{n+1}(t) &= X^{n+1}(s \pm \delta) + \int_{s \pm \delta}^t a(\tau, X^n(\tau)) d\tau, \\ Y_{i,j}^{n+1}(t) &= \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(s \pm \delta) + \int_{s \pm \delta}^t \sum_{k=1}^N A_{i,k}(\tau) Y_{k,j}^n(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

es posible extender el argumento a izquierda y derecha de s tan lejos como se quiera y, en un número finito de pasos, cubrir cualquier compacto.

Volviendo atrás en nuestro argumento, hemos deducido que $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = Y_{i,j}$, que se verifica (86) y además

$$(89) \quad \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t; s, x) = \delta_{ij} + \int_s^t \sum_{k=1}^N \frac{\partial a_i}{\partial x_k}(\tau, X(\tau; s, x)) \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(\tau; s, x) d\tau.$$

Para continuar, usando esta **ecuación integral** (89) vamos a ver que estas derivadas débiles están en $L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^N))$. Para ello, vamos a aplicar el Teorema 46, conocido como **Lema de Gronwall**. Para ello, tomamos normas matriciales en (89). Llamando $y(t) := \|\text{Jac}_x(X)(t)\|$ y, como antes, $M_a = \max_{(t,x) \in \mathbb{R}^{N+1}} \|\text{Jac}_x(a)(t, x)\|$, deducimos

$$y(t) \leq 1 + M_a \left| \int_s^t y(\tau) d\tau \right|.$$

Así, aplicando directamente el Teorema 46, obtenemos $\|\text{Jac}_x(X)(t)\| \leq e^{M_a|t-s|}$, por lo que cada una de las componentes de la jacobiana estarán acotadas,

$$\left| \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t; s, x) \right| \leq e^{M_a|t-s|}, \quad 1 \leq i, j \leq N \quad \forall t, s \in [0, T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

lo que nos indica que

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(\cdot; s, \cdot) \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^N)).$$

Per, además, sustituyendo la estimación anterior en la ecuación (86) obtenemos

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t; s, x) \right| \sum_{k=1}^N \leq M_a e^{M_a |t-s|}, \quad 1 \leq i, j \leq N \quad \forall t, s \in [0, T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

lo que produce una estimación extra sobre su derivada temporal:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(\cdot; s, \cdot) \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^N)),$$

y juntando ambas obtenemos

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(\cdot; s, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^N)) \subset C(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^N)).$$

Para subir un grado de derivación (en x) hasta $C(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N))$ simplemente hemos de iterar el (tedioso) argumento realizado hasta aquí, por lo que sólo hacemos un esbozo. Derivando de nuevo en (86) obtendríamos el siguiente sistema lineal no homogéneo (aquí se usa la regularidad pedida a a , pues al ser $W^{3,\infty}$ respecto a x , la Proposición 60. punto 3. nos garantiza que es C^2),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_p} \right] = \sum_{k=1}^N \left\{ \overbrace{A_{i,k}(t)}^{Z_{p,i,j}} \left[\frac{\partial^2 X_k}{\partial x_p \partial x_j} \right] + \sum_{m=1}^N \overbrace{\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_m \partial x_k}(t, X(t)) \frac{\partial X_m}{\partial x_p} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}}^{B_{i,k,j}} \right\} \\ \frac{\partial^2 X_p}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \end{array} \right.$$

cuyas soluciones $Z_{p,i,j}$ podemos probar análogamente, argumentando sobre los iterantes de Picard, que son las derivadas segundas $\frac{\partial^2 X_p}{\partial x_i \partial x_j}$ y, de nuevo estimando y usando el Teorema 46 (Lema de Gronwall), probar que cumplen

$$\frac{\partial^2 X_p}{\partial x_i \partial x_j}(\cdot; s, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^N)) \subset C(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^N)),$$

lo que, en conjunto, nos da justo lo que queríamos

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(\cdot; s, \cdot) \in W^{1,\infty}(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)) \subset C(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)). \quad \square$$

2. Demostración de la Proposición 39

Recordamos primero el enunciado.

Proposición 39. Dada una función escalar $\omega \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, y K dada por (76), el campo $u = K * \omega$ es el único que verifica las siguientes tres relaciones:

$$(90) \quad \omega = \text{rot}(u), \quad \text{div}(u) = 0, \quad \text{y} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u(x)| = 0.$$

Además, existe $C > 0$ dependiente únicamente de $\|\omega\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ y $\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ tal que:

- i) u está acotado: $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C$;
- ii) u es *logarítmico-lipschitziano*: $|u(x+y) - u(x)| \leq C \log \text{lip}(|y|)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$;

Finalmente si ϕ y ψ representan sendos difeomorfismos de \mathbb{R}^2 que preservan la medida (lo aplicaremos a los flujos de transporte $\phi(x) = X(t; s, x)$ asociados a características con jacobiano $J = 1$) entonces

- iii) $|K * (\omega \circ \phi)(x) - K * \omega(x)| \leq C \operatorname{loglip}(\|I - \phi\|)$, y
- iv) $|K * (\omega \circ \phi)(x) - K * (\omega \circ \psi)(x)| \leq C \operatorname{loglip}(\|\psi^{-1} - \phi^{-1}\|)$,

donde $C > 0$, de nuevo, depende únicamente de $\|\omega\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ y $\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$.

Demostración. Dado que este resultado engloba a su vez tres resultados cuyo enunciado y demostración son variados, optamos por dividir esta demostración en tres partes:

Parte I. Probar que $u = K * w$ es el único campo verificando (90);

Parte II. Probar i) e ii) mediante propiedades de integración de la función K ;

Parte III. Probar iii) e iv) como generalización de ii).

Demostración: **Parte I.** A partir de $\omega \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, planteamos el siguiente problema (elíptico) de Neumann

$$\text{encontrar } \psi \text{ resolviendo: } \begin{cases} -\Delta \psi = \omega & x \in \mathbb{R}^2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} |\nabla \psi(x)| = 0 \end{cases}$$

cuya solución está garantizada (Corolario 68 del Teorema de Lax-Milgram) y es única salvo constante aditiva, pues obviamente si ψ es solución, entonces $\psi + C$ también. De hecho, es posible describir explícitamente la solución en $H_0^1(\mathbb{R}^2)$ como convolución con la solución fundamental de $-\Delta$ en 2-D, esto es:

$$\psi = G * \omega, \quad \text{donde } G(x) := \frac{-1}{2\pi} \ln(|x|).$$

Tomamos entonces $u = \operatorname{rot} \psi$ y vemos que es el campo del enunciado. Como K es, según la Definición 76, precisamente el rotacional de G , se tiene

$$u = \operatorname{rot} \psi = \operatorname{rot}(G * \omega) = (\operatorname{rot} G) * \omega = K * \omega,$$

como queríamos. A continuación, vemos que ω es su rotacional y que tiene divergencia nula (ver Ejercicio 25):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(u) &= \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \psi) = \operatorname{rot}_{2D}(\operatorname{rot}_{1D}(\psi)) = -\Delta \psi = \omega; \\ \operatorname{div}(u) &= \operatorname{div}(\operatorname{rot} \psi) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, como $\operatorname{rot} \psi$ y $\nabla \psi$ son vectores girados,

$$\operatorname{rot} \psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \operatorname{Giro}_{90^\circ}(\nabla \psi),$$

y los giros son isometrías de \mathbb{R}^2 , podemos establecer la propiedad de caída en infinito observando simplemente que:

$$|u| = |\operatorname{rot} \psi| = |\nabla \psi| \Rightarrow \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u(x)| = \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\nabla \psi| = 0.$$

Solo resta ver la unicidad de u . Para ello, supongamos que tenemos dos posibles campos u_1 y u_2 verificando (90) y llamamos $\tilde{u} = u_1 - u_2 = (P, Q)$. Inmediatamente tenemos:

$$0 = \operatorname{rot}(\tilde{u}) \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial x_2}, \quad \operatorname{div}(\tilde{u}) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\tilde{u}(x)|$$

La primera condición permite establecer (recuérdese el concepto de diferencial exacta) la existencia de una función potencial $F(x)$ tal que $(P, Q) = \nabla F$, lo que, unido a la segunda y tercera condiciones produce

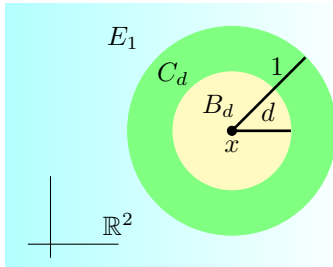
$$\Delta F = \operatorname{div}(\nabla F) = \operatorname{div}(\tilde{u}) = 0, \text{ con } \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\nabla F| = 0,$$

que, de nuevo, es un problema elíptico de tipo Neumann cuya solución es 0 (salvo constante) y, por lo tanto:

$$F = C \Rightarrow \tilde{u} = \nabla F = 0 \Rightarrow u_1 = u_2,$$

como queríamos probar.

Demostración: **Parte II.** Primero fijamos $x \in \mathbb{R}^2$ y $0 < d \leq 1$, y tomamos los siguientes conjuntos (bola, corona y exterior de bola, útiles para descomponer \mathbb{R}^2):



$$B_d := \{z \in \mathbb{R}^2 : |z - x| \leq d\},$$

$$C_d := \{z \in \mathbb{R}^2 : d < |z - x| \leq 1\},$$

$$E_1 = \mathbb{R}^2 \setminus B_1 := \{z \in \mathbb{R}^2 : |z - x| > 1\},$$

$$\mathbb{R}^2 = B_1 \cup E_1 \text{ o bien } \mathbb{R}^2 = B_d \cup C_d \cup E_1.$$

Además, para la demostración utilizaremos las siguientes propiedades elementales de la función $K(x)$ (propuestas en el Ejercicio 26 para bolas centradas en 0):

$$1. |K(x)| = \frac{1}{2\pi|x|}, \quad \int_{B_d} \frac{dx}{|x-z|} = 2\pi d, \text{ y } \int_{C_d} \frac{dx}{|x-z|^2} = 2\pi |\ln(d)|, \quad (\text{k1})$$

$$2. |K(x) - K(y)| = \frac{1}{2\pi} \frac{|x-y|}{|x||y|} \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{k2})$$

$$3. |K(x) - K(y)| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \right) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{k3})$$

Para probar i), basta dividir la integral como sigue, usando la descomposición: $\mathbb{R}^2 = B_1 \cup E_1$:

$$\begin{aligned} |u(x)| &= |K * \omega(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\omega(z)|}{2\pi|x-z|} dz = \int_{B_1} \frac{|\omega(z)|}{2\pi|x-z|} dz + \int_{E_1} \frac{|\omega(z)|}{2\pi|x-z|} dz \\ &\leq \frac{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}}{2\pi} \int_{B_1} \frac{dz}{|x-z|} + \frac{1}{2\pi} \int_{E_1} |\omega(z)| dz \leq \|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \frac{\|\omega\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}}{2\pi} \leq C, \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad (k1) para el cálculo de la primera integral.

Para probar ii) primero notamos que cuando $|y| \geq \frac{1}{2}$, la desigualdad ii) es trivial a partir del apartado i) anterior, ya que:

$$|u(x+y) - u(x)| \leq 2C = 2C \frac{\operatorname{loglip}(\frac{1}{2})}{\operatorname{loglip}(\frac{1}{2})} \leq \frac{2C}{\operatorname{loglip}(\frac{1}{2})} \operatorname{loglip}(|y|) = C' \operatorname{loglip}(|y|),$$

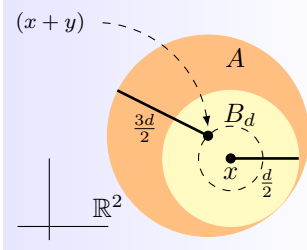
por ser loglip una función creciente. Por lo tanto, suponemos $|y| < \frac{1}{2}$ y usando ahora la descomposición: $\mathbb{R}^2 = B_d \cup C_d \cup E_1$ con $\boxed{d := 2|y| < 1}$, tenemos:

$$|u(x+y) - u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^2} \overbrace{|\omega(z)| |K(x+y-z) - K(x-z)|}^{\#} dz = \int_{B_d} \# + \int_{C_d} \# + \int_{E_1} \#.$$

Estimamos por separado estas tres integrales. Para la **primera**, usamos la propiedad (k3) para escribir

$$\int_{B_d} \# \leq \frac{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}}{2\pi} \int_{B_d} \left(\frac{1}{|x+y-z|} + \frac{1}{|x-z|} \right) dz,$$

y ahora, usando que cuando $z \in B_d$ se cumple lo siguiente:



$$\begin{aligned} |x+y-z| &\leq |x-z| + |y| \leq d + |y| = \frac{3}{2}d, \\ \Rightarrow B_d &\subset A := \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : |z - (x+y)| \leq \frac{3d}{2} \right\}, \end{aligned}$$

podemos estimar la primera integral en B_d por otra en el conjunto A , que es más grande y donde se puede usar de nuevo la propiedad (k1) para concluir que

$$(91) \quad \int_{B_d} \# \leq \frac{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}}{2\pi} \left(2\pi \frac{3d}{2} + 2\pi d \right) = C|y|.$$

Para la **segunda** integral, usamos la propiedad (k2) para escribir

$$\int_{C_d} \# \leq \frac{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}}{2\pi} \int_{C_d} \frac{|y|}{|x+y-z||x-z|} dz,$$

y ahora notamos que

$$\left. \begin{aligned} z \in C_d &\Rightarrow d < |x-z| \\ &\Rightarrow |y| = \frac{d}{2} \leq \frac{|x-z|}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |x+y-z| \geq |x-z| - |y| \geq \frac{|x-z|}{2},$$

lo que nos permite concluir de nuevo usando (k1), que

$$(92) \quad \int_{C_d} \# \leq \frac{|y|}{2\pi} \|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{C_d} \frac{2 dz}{|x-z|^2} dz = C|y| |\ln(d)| \leq C|y| \left(|\ln(|y|)| + \ln 2 \right).$$

Por último, para la **tercera** integral, razonamos de forma parecida. Primero usamos la propiedad (k2) para escribir

$$\int_{E_1} \# \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_d} \frac{|y|\omega(z)|}{|x+y-z||x-z|} dz,$$

y ahora usamos que

$$\left. \begin{aligned} z \in E_1 &\Rightarrow 1 < |x-z| \\ d < 1 &\Rightarrow |y| = \frac{d}{2} < \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |x+y-z| \geq |x-z| - |y| > \frac{1}{2},$$

lo que nos lleva a

$$(93) \quad \int_{E_1} \# \leq \frac{|y|}{2\pi} \int_{C_d} 2|\omega(z)| dz \leq C|y| \|\omega\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Uniendo (91), (92) y (93) y tomando como C el máximo de las tres constantes que aparecen, deducimos finalmente ii)

$$|u(x+y) - u(x)| \leq \int_{B_d} \# + \int_{C_d} \# + \int_{E_1} \# \leq C|y| \left(1 + |\ln(|y|)|\right) = C \log \text{lip}(|y|).$$

Demostración: **Parte III.** Como adelantamos, las propiedades iii) e iv) son en definitiva una generalización de ii), por lo que, aunque tiene aún más complejidad técnica, las ideas son las mismas. Comenzamos por iii), reescribiendo la expresión de partida:

$$\begin{aligned} K * (\omega \circ \phi)(x) - K * \omega(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} K(x-y)\omega(\phi(y)) dy - \int_{\mathbb{R}^2} K(x-z)\omega(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \omega(z) \left(K(x - \phi^{-1}(z)) - K(x-z) \right) dz, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el cambio de variable $z = \phi(y)$ (cuyo jacobiano es 1, y no aparece). Al igual que ii) era trivial para $|y| > 1/2$, la desigualdad iii) lo es para $\|I - \phi\| \geq 1/2$ por lo que podemos suponer que $\|I - \phi\| < 1/2$ y usar la descomposición: $\mathbb{R}^2 = B_d \cup C_d \cup E_1$ con $d := 2\|I - \phi\| < 1$. Notemos antes de seguir que, dado que ϕ es una biyección de \mathbb{R}^2 , podemos escribir d de dos formas,

$$\frac{d}{2} = \|I - \phi\| := \sup_{z \in \mathbb{R}^2} |z - \phi(z)| \stackrel{y=\phi(z)}{=} \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |\phi^{-1}(y) - y| = \|I - \phi^{-1}\|,$$

lo que nos permitirá cambiar $\|I - \phi^{-1}\|$ por $\|I - \phi\|$ cada vez que queramos. Tomando normas en la igualdad anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} |K * (\omega \circ \phi)(x) - K * \omega(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \overbrace{|\omega(z)| \left| K(x - \phi^{-1}(z)) - K(x-z) \right|}^{\#} dz \\ (94) \qquad \qquad \qquad &= \int_{B_d} \# + \int_{C_d} \# + \int_{E_1} \#. \end{aligned}$$

De nuevo, estimamos por separado estas tres integrales. Para la **primera**, usamos la propiedad (k3) para escribir

$$\int_{B_d} \# \leq \frac{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}}{2\pi} \int_{B_d} \left(\frac{1}{|x - \phi^{-1}(z)|} + \frac{1}{|x - z|} \right) dz,$$

y ahora, usando que cuando $z \in B_d$, se tiene

$$|x - \phi^{-1}(z)| \leq |x - z| + |z - \phi^{-1}(z)| \leq d + \|I - \phi^{-1}\| = \frac{3}{2}d,$$

deducimos que

$$B_d \subset A := \{z \in \mathbb{R}^2 : |x - \phi^{-1}(z)| \leq 3d/2\}$$

y podemos estimar la primera integral por otra en el conjunto A , que es más grande, y calcularla mediante el cambio de variable $z = \phi(y)$ y la propiedad (k1),

$$\int_A \frac{1}{|x - \phi^{-1}(z)|} dz = \int_{B_{3d/2}} \frac{dy}{|x - y|} = 3\pi d, \qquad \int_{B_d} \frac{1}{|x - z|} dz = 2\pi d,$$

concluyendo finalmente que,

$$(95) \qquad \int_{B_d} \# \leq \frac{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}}{2\pi} 5\pi d = C \|I - \phi\|.$$

Para la **segunda** integral en (94), usamos la propiedad (k2) para escribir

$$\int_{C_d} \# \leq \frac{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}}{2\pi} \int_{C_d} \frac{|z - \phi^{-1}(z)|}{|x - \phi^{-1}(z)||x - z|} dz \leq C \int_{C_d} \frac{\|I - \phi^{-1}\|}{|x - \phi^{-1}(z)||x - z|} dz,$$

y ahora notamos que en la corona C_d tenemos $|x - z| > d$ y, por lo tanto,

$$|z - \phi^{-1}(z)| \leq \|I - \phi^{-1}\| = \frac{d}{2} < \frac{|x - z|}{2},$$

y podemos estimar como en la Parte II:

$$|x - \phi^{-1}(z)| \geq |x - z| - |z - \phi^{-1}(z)| > \frac{|x - z|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x - \phi^{-1}(z)|} \leq \frac{2}{|x - z|},$$

lo que nos permite concluir de forma análoga a (92), de nuevo usando (k1), que

$$(96) \quad \int_{C_d} \# \leq C \int_{C_d} \frac{2d}{|x - z|^2} dz = Cd |\ln d| \leq C \log \text{lip}(\|I - \phi\|).$$

Por último, atacamos la **tercera** integral de (94). Usamos de nuevo la propiedad (k2) para escribir

$$\int_{E_1} \# \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_d} \frac{|z - \phi^{-1}(z)||\omega(z)|}{|z - \phi^{-1}(z)||x - z|} dz \leq C \|I - \phi^{-1}\| \int_{C_d} \frac{|\omega(z)|}{|x - \phi^{-1}(z)||x - z|} dz$$

y ahora, al igual que en (93), estimamos los denominadores cuando $z \in E_1$. Por un lado obviamente $|x - z| > 1$ y, por otro:

$$|z - \phi^{-1}(z)| \leq \|I - \phi^{-1}\| < \frac{1}{2} \Rightarrow |x - \phi^{-1}(z)| \geq |x - z| - |z - \phi^{-1}(z)| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

lo que nos lleva a

$$(97) \quad \int_{E_1} \# \leq C \|I - \phi\| \int_{C_d} 2|\omega(z)| dz \leq C \|\omega\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|I - \phi\|.$$

Uniendo (95), (96) y (97) y sustituyendo en (94) finalmente iii).

Finalmente iv) se obtiene trivialmente a partir de iii), aplicándola a $\Phi = \psi^{-1}\phi$, ya que usando que son biyecciones y haciendo el cambio siguiente,

$$\|I - \psi^{-1} \circ \phi\| := \sup_{z \in \mathbb{R}^2} |z - \psi^{-1}(\phi(z))| \stackrel{y=\phi(z)}{=} \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |\phi^{-1}(y) - \psi^{-1}(y)| = \|\psi^{-1} - \phi^{-1}\|,$$

obtenemos directamente la segunda desigualdad de iii). \square

3. Demostración del Lema 41

Recordamos el enunciado:

Lema 41. A partir de la sucesión (ω_n, u_n) construida en la Sección 2.3, es posible encontrar una función u continua en $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ tal que una sucesión parcial de u_n converge uniformemente sobre compactos a u . Además u es logarítmico-lipschitziana respecto a x y t , esto es

$$|u(t, x) - u(s, y)| \leq C \log \text{lip}(|t - s| + |x - y|), \quad \forall t, s \in [0, T], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Demostración. Primero notamos que, por construcción:

$$u_n(t, x) = K * \omega_n(k\epsilon, x), \quad t \in [k\epsilon, (k+1)\epsilon),$$

lo que, combinado con la cota (80) en $L^1(\mathbb{R}^2)$ y $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ de ω_n y las propiedades i) y ii) de la Proposición 39, nos dan directamente

$$(98) \quad \|u_n\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)} \leq C$$

$$(99) \quad |u_n(t, x) - u_n(t, y)| \leq C \log \text{lip}(|x - y|), \quad \forall t \in [0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}^2,$$

con una constante $C > 0$ que depende únicamente de ω_0 y, por lo tanto, es independiente de $n \in \mathbb{N}$. Notemos que, si no hubiera variable t , estas dos propiedades junto al teorema de Ascolí-Arcelá, bastarían para extraer una parcial uniformemente convergente. La clave para “arreglar” este problema en t (u_n no es ni siquiera continua respecto de t) y hacer esta demostración es la construcción de una sucesión paralela \bar{u}_n que sí sea continua respecto a t , que se comporte en el límite igual que u , y a la que sí sea posible aplicar el Teorema 62 de Ascolí-Arcelá. La idea es simplemente interpolar en tiempo como muestra el dibujo siguiente, lo que podemos escribir

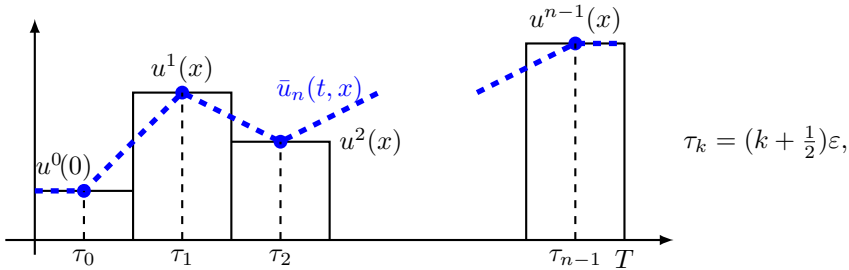


FIGURA 1. Construcción de la versión continua \bar{u}_n a partir de u_n .

analíticamente, llamando $\tau_k = (k + \frac{1}{2})\varepsilon$ a los puntos medios de cada subintervalo, como sigue:

$$(100) \quad \bar{u}_n(t, x) := \begin{cases} u^0(x) & \text{si } t \in [0, \varepsilon/2] \\ u^k(x) + \frac{t - \tau_k}{\varepsilon} (u^{k+1}(x) - u^k(x)) & \text{si } t \in [\tau_k, \tau_{k+1}], \\ & k = 0, 1, \dots, n-2 \\ u^{n-1}(x) & \text{si } t \in [\tau_{n-1}, T]. \end{cases}$$

A partir de esta construcción, la demostración se basará en dos claves que podemos resumir como sigue:

$$(101) \quad \|u_n - \bar{u}_n\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)} \rightarrow 0, \quad (\Rightarrow \text{si una tiene límite, la otra también});$$

$$(102) \quad \bar{u}_n \text{ acotada y equicontinua,} \quad (\Rightarrow \text{se le puede aplicar Ascolí-Arcelá}).$$

Además, como veremos al probar (102), la sucesión \bar{u}_n (y, por lo tanto, su límite), será logarítmico-lipschitziana tanto respecto a x como respecto a t .

Lo primero que necesitamos es un resultado técnico (aunque esencial), que es una “especie de” continuidad en tiempo de u_n y que enunciamos como sigue:

$$(103) \quad |u_n(k\varepsilon, x) - u_n(m\varepsilon, x)| \leq C \log \text{lip}(|k\varepsilon - m\varepsilon|), \quad \forall k, m = 0, 1, \dots, n, \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Para probarlo, suponemos que $k < m$ y escribimos

$$|u_n(k\varepsilon, x) - u_n(m\varepsilon, x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^2} K(x-y) (\omega^k(k\varepsilon, y) - \omega^m(m\varepsilon, y)) dy \right|.$$

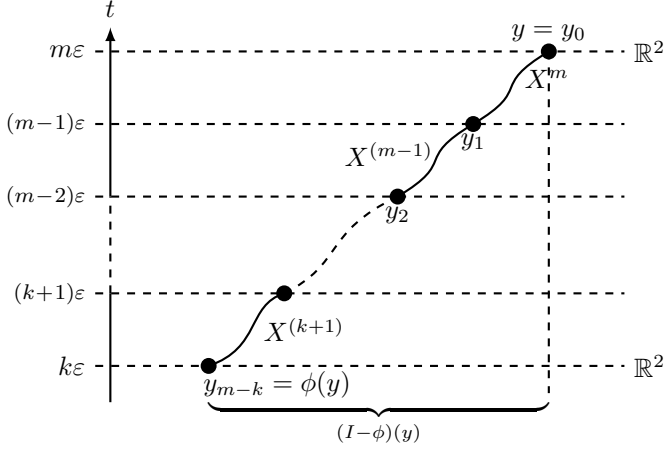
Ahora se trata simplemente de usar el transporte en cada trozo (véase la construcción hecha en la Sección 2.3) para reescribir $\omega^m(m\varepsilon, y) = \omega^k(k\varepsilon, \phi(y))$ para cierto

cambio de variables ϕ . Veámoslo en el siguiente esquema, que combina la fórmula de transporte puro con la condición inicial de cada uno de los problemas lineales construidos. En el primer trozo, para “bajar” de $t = m\varepsilon$ a $t = (m - 1)\varepsilon$ hacemos

$$y_1 := X^m((m - 1)\varepsilon; m\varepsilon, y),$$

$$\Rightarrow \omega^m(m\varepsilon, y) \stackrel{\text{formula transporte}}{=} \omega^m((m - 1)\varepsilon, y_1) \stackrel{\text{condicion inicial}}{=} \omega^{(m-1)}((m - 1)\varepsilon, y_1),$$

e, iterando el proceso hasta $t = k\varepsilon$:



$$y_2 := X^{(m-1)}((m-2)\varepsilon; (m-1)\varepsilon, y_1) \Rightarrow \omega^{(m-1)}((m-1)\varepsilon, y_1) = \omega^{(m-2)}((m-2)\varepsilon, y_2);$$

$$\vdots$$

$$y_{m-k} = \phi(y) := X^{(k+1)}(\varepsilon; (k+1)\varepsilon, y_{m-k+1}),$$

$$\Rightarrow \omega^{(k+1)}((k+1)\varepsilon, y_{m-k+1}) = \omega^k(k\varepsilon, y_{m-k}) = \omega^k(k\varepsilon, \phi(y)).$$

Observamos que cada punto $y = y_0 \in \mathbb{R}^2$ se va transportando por los sucesivos flujos asociados a las catacterísticas en cada trozo (todos ellos con jacobiano igual a 1 y, por lo tanto, que preservan la medida) de manera que podemos aplicar el apartado *iii*) de la Proposición 39 y obtener

$$|u_n(k\varepsilon, x) - u_n(m\varepsilon, x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^2} K(x - y) \left(\omega^k(k\varepsilon, y) - \omega^k(k\varepsilon, \phi(y)) \right) dy \right|$$

$$\leq C \text{loglip}(\|I - \phi\|).$$

Vamos a ver finalmente que $\|I - \phi\| \leq C|k\varepsilon - m\varepsilon|$, lo que nos permite concluir (103) al ser loglip una función creciente que, además, cumple

$$\text{loglip}(Cr) = Cr(1 + |\ln(Cr)|) = Cr(1 + |\ln C| + \ln(r)) \leq C' \text{loglip}(r).$$

Siguiendo el esquema anterior, estudiemos cada trozo. En el primer paso, al “bajar” de $t = m\varepsilon$ a $t = (m - 1)\varepsilon$ tenemos

$$y_0 - y_1 = y - X^m((m - 1)\varepsilon) = \int_{(m-1)\varepsilon}^{m\varepsilon} u^{m-1}(X^m(s)) ds$$

por lo que podemos tomar normas y usar la cota (98) de u_n :

$$|y_0 - y_1| \leq \int_{(m-1)\varepsilon}^{m\varepsilon} |u^{m-1}(X^m(s))| ds \leq \int_{(m-1)\varepsilon}^{m\varepsilon} C ds = C\varepsilon.$$

La misma estimación se puede escribir para cada diferencia consecutiva $|y_j - y_{j+1}|$, por lo que finalmente, escribiendo $y - \phi(y)$ en forma de suma telescópica, tenemos

$$|y - \phi(y)| = \left| \sum_{j=0}^{m-k} (y_j - y_{j+1}) \right| \leq (m-k)C\varepsilon = C|k\varepsilon - m\varepsilon|,$$

como queríamos demostrar. Una vez probado (103), ya estamos en condiciones de demostrar (101) de manera inmediata, puesto que, a partir de la construcción (100) tenemos, para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} |\bar{u}_n(t, x) - u_n(t, x)| &= \frac{|t - \tau_k|}{\varepsilon} |u^{k+1}(x) - u^k(x)| \leq \frac{1}{2} |u^{k+1}(x) - u^k(x)| \\ &= \frac{1}{2} |u_n((k+1)\varepsilon, x) - u_n(k\varepsilon, x)| \stackrel{(103)}{\leq} C \log\text{lip}(\varepsilon) = C \log\text{lip}(T/n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Para concluir la otra clave (101) de nuestra demostración vamos a ver que nuestra función continua \bar{u}_n está acotada y es logarítmico lipschitziana respecto de x y t , concretamente:

$$(104) \quad \|\bar{u}_n\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \leq C$$

$$(105) \quad |\bar{u}_n(t, x) - \bar{u}_n(t, y)| \leq C \log\text{lip}(|x - y|), \quad \forall t \in [0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}^2,$$

$$(106) \quad |\bar{u}_n(t, x) - \bar{u}_n(s, x)| \leq C \log\text{lip}(|t - s|), \quad \forall t, s \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

para una constante $C > 0$ que depende únicamente de ω_0 y, por lo tanto, es independiente de $n \in \mathbb{N}$. Notemos que a partir de la definición (100) de \bar{u}_n (respecto de x , \bar{u}_n no es más que una combinación convexa de u_n 's), es inmediato probar (104) a partir de (98) y (105) a partir de (99). Tan solo resta la propiedad (106) asociada a la continuidad en t , que es, en última instancia, para lo que \bar{u}_n ha sido creada; veamos que es bastante fácil a partir de la propiedad (103). Dados $t, s \in [0, T]$, suponemos $s < t$ y tomamos $k < m \in \mathbb{N}$ tales que

$$s \in [\tau_{k-1}, \tau_k], \quad t \in [\tau_m, \tau_{m+1}],$$

(nótese que, para n suficientemente grande, siempre es posible separarlos en trozos disjuntos, es decir, elegir $k < m$). Ahora sí, aplicando sencillamente la desigualdad triangular, la definición de \bar{u}_n y (103), deducimos:

$$\begin{aligned} &|\bar{u}_n(t, x) - \bar{u}_n(s, x)| \\ &\leq |\bar{u}_n(t, x) - \bar{u}_n(\tau_m, x)| + |\bar{u}_n(\tau_m, x) - \bar{u}_n(\tau_k, x)| + |\bar{u}_n(\tau_k, x) - \bar{u}_n(s, x)| \\ &\leq |u^{m+1}(x) - u^m(x)| + |u_n(m\varepsilon, x) - u_n(k\varepsilon, x)| + |u^k(x) - u^{k-1}(x)| \\ &\leq C \log\text{lip}(\varepsilon) + C \log\text{lip}(|m - k|\varepsilon) + C \log\text{lip}(\varepsilon) \leq 3C \log\text{lip}(|t - s|), \end{aligned}$$

donde, hemos usado de nuevo que $\log\text{lip}$ es creciente y que tanto ε como $|m - k|\varepsilon$ son inferiores a $|t - s|$.

Ya podemos concluir nuestro Lema, pues (104) nos da la acotación uniforme de \bar{u}_n y las propiedades (105) y (106) nos dicen que es una sucesión equicontinua, por lo que podemos aplicar Ascoli-Arcelá y extraer una parcial que converge uniformemente sobre compactos a una función u continua y que también verifica (105) y (106). Finalmente, la propiedad clave (101) nos dice que tanto u como \bar{u} poseen el mismo límite y concluye la demostración. \square

Bibliografía

- [1] R. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press (1975).
- [2] A. AW, M. RASCLE, *Resurrection of second order models of traffic flow*. SIAM Journal of Applied Mathematics **60** (2000), 281-345.
- [3] H. BAUER, *Probability theory and elements of measure theory*, Holt, Rhinehart and Winston, New York, (1968).
- [4] N. BELLOMO, A. BELLOUQUID, J. NIETO, J. SOLER, *On the asymptotic theory from microscopic to macroscopic growing tissue models: an overview with perspectives*, Math. Mod. and Meth. in Appl. Sci. **22**(1) (2012), 1130001 .
- [5] S. BENZEKRY, PhD thesis: Modeling, mathematical and numerical analysis of anti-cancerous therapies for metastatic cancers. (2011) <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01658210/document>
- [6] D. BROIZAT, *A kinetic model for coagulation-fragmentation*, Ann. I. H. Poincaré - AN **27** (2010), 809-836.
- [7] D. BURINI, AND N. CHOUHAD, A multiscale view of nonlinear diffusion in biology: from cells to tissues, Math. Mod. and Meth. in Appl. Sci. **29** (2019), 791-823.
- [8] J. BINNEY, S. TREMAINE. *Galactic dynamics*, Princeton University Press, Princeton, (1987).
- [9] I. BRAZZOLI, E. D. ANGELIS, P.-E. JABIN, A mathematical model of immune competition related to cancer dynamics, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **33** (2009).
- [10] A. BRESSAN, *Hyperbolic Conservation Laws*. An Illustrated Tutorial. Notes for a summer course, Cetraro (2009). <http://personal.psu.edu/axb62/PSPDF/clawtut09.pdf>
- [11] H. BRÉZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London Alianza Editorial, Madrid, 2011. Versión revisada de *Analyse fonctionnelle*, Masson, París, (1983).
- [12] S. CALOGERO, J. CALVO, O. SÁNCHEZ, J. SOLER *Dispersive behaviour in galactic dynamics*, Disc. and Cont. Dynamical Systems Series B **14**(1), (2010), 1-16.
- [13] J. CALVO, J. NIETO, J. SOLER, M.O. VÁSQUEZ, *On a dispersive model for the unzipping of double-stranded DNA molecules*, Math. Mod. and Meth. in Appl. Sci. **24**(3), (2014), 495-511.
- [14] T. CAZENAVE, *Semilinear Schrödinger equations*, AMS, (2003).
- [15] C. CERCIGNANI, *The Boltzmann Equation and Its Applications*. Springer-Verlag, New York, (1988).
- [16] A.J. CHORIN, J.E. MARSDEN, *A mathematical introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1993).
- [17] R. EFTIMIE, *Hyperbolic and kinetic models for self-organized biological aggregations and movement: a brief review*, J. Math. Biol. **65** (2012), 35–75.
- [18] L.C. EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1998).
- [19] R.R. GLASSEY, *The Cauchy Problem in Kinetic Theory*, SIAM, Philadelphia (1996).
- [20] P. GERARD, P. A. MARKOWICH, N. J. MAUSER, F. POUPAUD, *Homogenization limits and Wigner transforms*, Comm. Pure Appl. Math. **50**, (1997), 323-379.
- [21] R. GRANERO Y J.M. MORENO, *Ecuación de Burgers y fluidos incompresibles*, Gaceta de la RSME, vol 15, no. 3, (2012).
- [22] Y. GUO, *Global weak solutions of the Vlasov-Maxwell system with boundary conditions*, Comm. Math. Phys. **154**(2), (1993), 245-263.
- [23] S.-Y. HA, E. TADMOR., *From particle to kinetic and hydrodynamic descriptions of flocking*, Kinetic and Related Models **1** no. 3, (2008), 415-435.
- [24] P. HARTMAN, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & sons, New York, (1964).

- [25] R. ILLNER, G. REIN, *Time decay of the solutions of the Vlasov–Poisson system in the plasma physical case*, Math. Methods Appl. Sci. **19** no. 17 (1996), 1409-1413.
- [26] J. KEVORKIAN, *Partial Differential Equations: Analytical Solution Techniques (2nd edition)*. Springer-Verlag, New York (2000).
- [27] E.M. LANDAU, E.M. LIPSHITZ, *Course of theoretical physics, Physical Kinetics, Vol. 10*, Butterworth-Heinemann, UK, (1981).
- [28] P. D. LAX, *Hyperbolic Partial Differential Equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, AMS, (2006).
- [29] R. LEVEQUE *Numerical Methods for Conservation Laws*, Lectures in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin (1992).
- [30] MARSDEN, J.E., TROMBA, A.J. *Cálculo vectorial, Cuarta edición*, Addison Wesley Longman, México (1998).
- [31] A. MOGILDER, L. EDELSTEIN-KESHET, *A non-local model for a swarm*, J. Math. Biol. **38** (1999), 534-570.
- [32] M. MOKHTAR-KHARROUBI, *Mathematical Topics in Neutron Transport Theory*, series on Advances in Mathematics for Applied Sciences 46, World Scientific, Singapore, (1997).
- [33] P. MURRAY, *Mathematical Biology*, Springer Verlag (1996).
- [34] M. LIGHTHILL, G. WHITHAM, *On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads*. Proceedings of the Royal Society of London: Series A, **229** (1955), 281-345.
- [35] D. POYATO, *Filippov flows and mean-field limits in the kinetic singular Kuramoto model*. arXiv:1903.01305.
- [36] B. PERTHAME, *Time decay, propagation of low moments and dispersive effects for kinetic equations*, Comm. Partial Differential Equations **21** no. 3-4 (1996), 659-686.
- [37] B. PERTHAME, *Transport Equations in Biology*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin (2007).
- [38] F. POUPAUD, J. SOLER, *Parabolic limit and stability of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, Math. Mod. Methods in App. Sci. **10**, (2000), 1027-1045.
- [39] M.RASCLE, *An improved macroscopic model of traffic flow: derivation and links with the Lighthill Whitham model*, *Mathematical and Computer Modelling* **35** (2002), 581-590.
- [40] P.A. RAVIART, *An analysis of particle methods*, CIME course, Como-Italia (1983).
- [41] G. REIN, *Collisionless Kinetic Equations from Astrophysics—The Vlasov-Poisson System*, *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations*, **3**, (2007), 383-476.
- [42] P.L. RICHARDS, *Shock waves on the highway*, Operations Research. **4**(1) (1955), 42-51.
- [43] L. TARTAR, *From Hyperbolic Systems to Kinetic Theory*. Springer-Verlag, Berlin (2008).
- [44] C.M. TOPAZ, A.L. BERTOZZI, *Swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups*. SIAM Journal on Applied Mathematics. **65**(1) (2004), 152–174.
- [45] C. TRUESDELL, W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin (1965).
- [46] S. Ukai, T. Yang, MATHEMATICAL THEORY OF BOTLZMANN EQUATION, <http://www.cityu.edu.hk/rcms/publications/ln8.pdf>.
- [47] J.L. VÁZQUEZ, *Fundamentos matemáticos de la mecánica de fluidos*. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid, (2003). <http://verso.mat.uam.es/~juanluis.vazquez/mex10chap.pdf>
- [48] C. VILLANI, *A Review of Mathematical Topics in Collisional Kinetic Theory. Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, Vol. I., 71-305, North-Holland, Amsterdam (2002).
- [49] G.B. WHITHAM, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, Inc. (1974).
- [50] V.I. YUDOVICH, *Nonstationary flow of an ideal incompressible liquid*, (Ž. Výchisl. Mat. i Mat. Fiz., **3** (1963), 1032-1066 –Russian) USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, **3**(6), (1963), 1407-1456.
- [51] E. ZEIDLER, *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics*, Appl. Math. Sci., vol. 108, Springer-Verlag, New York (1995).

Índice alfabético

- Curvas características, 23, 34, 47, 59, 77, 88, 93
- delta de Dirac, 59, 66
- derivada
 - débil, 105
 - material, 79
- difeomorfismo isométrico, 28
- dispersión
 - estadística, 64
 - fuerte, 63
- ecuación
 - curvas características, 23
 - del calor (difusión), 53
 - conservación de la masa, 11, 76
 - conservativa, 21
 - de Boltzmann, 17, 73
 - de Burgers, 12, 47
 - de Euler, 83, 86
 - de Hopf-Burgers, 54
 - de Liouville, 14, 28
 - de Navier-Stokes, 83
 - de Poisson, 17, 60, 66
 - de transporte libre, 16, 24, 27, 60
 - de Vlasov, 16
 - de Vlasov-Poisson, 16, 65, 71
 - incompresibilidad, 78, 79
 - lineal, 21
 - no conservativa, 21
 - Renewal (de Von Foerster), 13
- energía
 - cinética, 67
 - potencial, 67
 - total, 67
- fluido
 - homogéneo, 77, 83
 - ideal, 83
 - incompresible, 77, 83
 - laminar, 83
 - newtoniano, 82
 - turbulento, 83
- función
 - de distribución, 15
 - de distribución de masa, 16
 - Heaviside, 33
 - test, 105
- identidad
 - de dispersión, 70
 - virial, 73
- Jacobiano, 27
- ley pseudo-conforme, 69
- momento
 - cruzado, 61
 - lineal, 67
- potencial, 26
- presión, 80
- Rankine-Hugoniot
 - (condición de salto), 49
- Reynolds (número de), 84
- rotacional, 84, 86
- solución
 - clásica, 22
 - débil, 38
 - de entropía, 56
 - estacionaria, 26
 - fundamental, 117
- Teorema
 - de cambio de variable, 28
 - de Gronwall (lema), 89, 100

de Peano, 27, 31

de Picard-Lindelöf, 23

del transporte, 79

viscosidad, 53, 80

 cinemática, 83

 coeficientes de, 83

vorticidad, 85