Expresión de magnitudes y errores

1) Una vez conocida una medida (puede ser una única medida o un promedio de varias medidas de la misma magnitud) y su error absoluto, el resultado se expresa en la forma:

1. medida 2. error 3. unidades

$$x \pm \varepsilon(x) \quad \text{Unidades}$$

teniendo en cuenta que:

2) el <u>error absoluto</u> debe darse <u>con una sola cifra significativa</u>, y aumentando en una unidad la última cifra si la primera suprimida es ≥ 5.

3) el <u>valor medio</u> debe tener <u>el mismo orden de aproximacion que el error</u>.

Ejemplo, medidas de distancias:

Incorrectos	Motivo	Correctos
0,025 ± 0,003	Faltan las unidades	0,025 ± 0,003 m
8,2 m	Falta el error	8,2± 0,1 m
3,418 ± 0,123 m	Error con 3 cifras significativas	3,4 ± 0,1 m
6,3 ± 0,085 m	Error con 2 cifras significativas	6,30 ± 0,09 m
46288 ± 1553 m	Error con 4 cifras significativas	46000 ± 2000 m
428,351 ± 0,3 m	Magnitud y error con distinto orden de aproximación	428,4 ± 0,3 m

Ejemplo de aplicación del Ajuste por Mínimos Cuadrados: Determinación de la aceleración de la gravedad

Valores medidos en el laboratorio:

1. Magnitudes con unidades

	R (cm)	T^2 (s^2)	
x_1	10 ± 0.1	0.402 ± 0.006	y_1
x_2	20 ± 0.1	0.764 ± 0.006	y_2
x_3	30 ± 0.1	1.16 ± 0.01	y_3
	40 ± 0.1	1.57 ± 0.01	
	50 ± 0.1	1.98 ± 0.01	
x_N	60 ± 0.1	2.37 ± 0.02	y_N

2. Valor medido

3. Error calculado

Predicción Teórica (oscilaciones del péndulo)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} r + \frac{4\pi^2 r_0}{g}$$

$$y = \mathbf{a} \cdot x + \mathbf{b}$$

Ecuación de una recta

La predicción teórica dicta que los datos experimentales deben seguir un comportamiento lineal:
a) Lo verificamos representando gráficamente los puntos experimentales .
b) Realizamos un ajuste por mínimos cuadrados para extraer la pendiente "a" (con su error!) y la ordenada en el origen "b" (y error!) .

6×358 1734,66

$$a = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

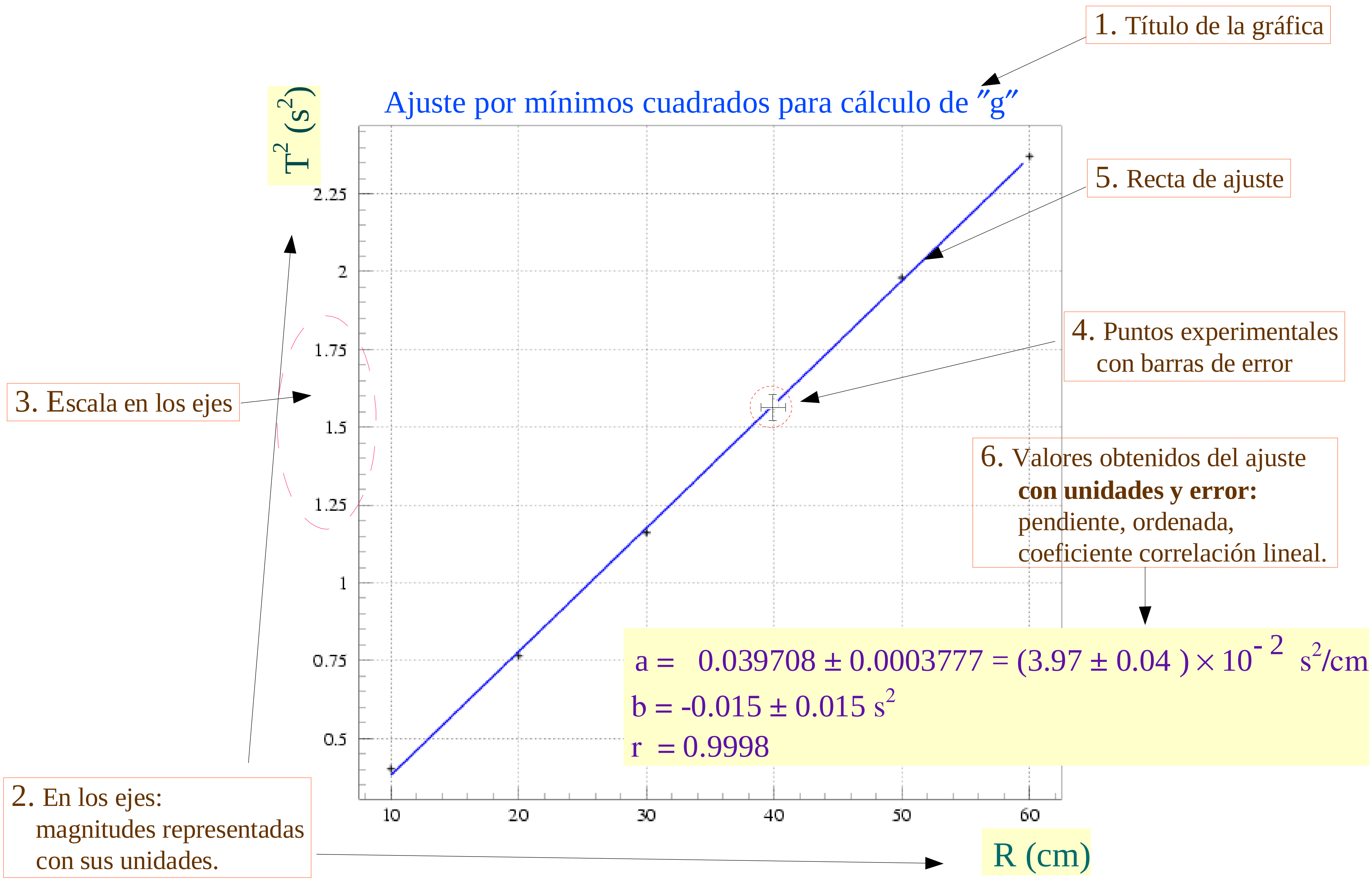
$$\Delta a = \sqrt{\frac{\sum (y_i - a x_i - b)^2}{(N-2) \sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

media de x_i

$$r = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{(N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)(N \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2)}}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\Delta b = \sqrt{\left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}\right)\left(\frac{\sum (y_i - a x_i - b)^2}{(N-2)}\right)}$$


1. Título de la gráfica
Ajuste por mínimos cuadrados para cálculo de "g"
T^2 (s^2)
2.25
2
1.75
1.5
1.25
1
0.75
0.5
10
20
30
40
50
60
R (cm)
5. Recta de ajuste
4. Puntos experimentales con barras de error
3. Escala en los ejes
6. Valores obtenidos del ajuste **con unidades y error:** pendiente, ordenada, coeficiente correlación lineal.
a = 0.039708 ± 0.0003777 = (3.97 ± 0.04) × 10^{-2} s^2/cm
b = -0.015 ± 0.015 s^2
r = 0.9998
2. En los ejes: magnitudes representadas con sus unidades.

Teoría de errores

T.1 Introducción

Todas las medidas experimentales vienen afectadas de una cierta imprecisión debida a las imperfecciones del aparato de medida o a las limitaciones impuestas por nuestros sentidos, que deben registrar la información. El principal objetivo de la teoría de errores consiste en acotar el valor de dichas imprecisiones, denominadas errores experimentales.

La **medidas** experimentales de las magnitudes físicas pueden ser **directas** o **indirectas**. Éstas últimas se obtienen a partir de los valores medidos de otras magnitudes ligadas con la magnitud problema mediante una fórmula física. Debe admitirse como postulado el que resulte imposible llegar a conocer el valor exacto de una magnitud, ya que los procedimientos experimentales de comparación con el patrón correspondiente para obtener las medidas directas vienen siempre afectados de errores inevitables. Así, aunque es imposible encontrar en la práctica el valor "cierto" o "exacto" de una magnitud determinada, aceptaremos que éste existe. Nuestro problema es establecer los límites dentro de los cuales se encuentra dicho valor.

T.2 Clasificación de los errores

El error se define como la diferencia entre el valor verdadero y el obtenido experimentalmente. Los errores no siguen una ley determinada y su origen reside en múltiples causas.

Atendiendo a las causas que los producen, los errores se pueden clasificar en dos grandes grupos: errores sistemáticos y errores accidentales.

Se denominan errores **sistemáticos** a aquéllos que son constantes a lo largo de todo el proceso de medida y, por tanto, afectan a todas las mediciones de un modo definido, siendo los mismos para todas ellas. Estos errores tienen un signo determinado y se pueden clasificar a su vez en:

- Errores **instrumentales**. Por ejemplo un error de calibrado.
- Errores **personales**. Éstos son, en general, difíciles de determinar y se deben a limitaciones de carácter personal. Por ejemplo, un problema visual del observador.
- Errores en la **elección del método** de medida de la magnitud.

Este tipo de errores se ponen de manifiesto cambiando el aparato de medida, el observador o el método de medida.

Se denominan errores **accidentales** a aquéllos que se producen por variaciones fortuitas o aleatorias que aparecen entre observaciones sucesivas realizadas por un mismo observador. Las variaciones no son reproducibles de una medición a otra y no presentan, más que por azar, el mismo valor en dos mediciones cualesquiera de una serie. Estos errores son incontrolables.

Para un gran número de medidas, los errores accidentales, debido a su carácter aleatorio, presentan tantas desviaciones positivas como negativas. Aunque con los errores accidentales no se pueden hacer correcciones para obtener valores más concordantes con el real, aplicando métodos estadísticos al conjunto de medidas disponible, se puede llegar a algunas conclusiones acerca del valor más probable.

T.3 Conceptos de exactitud, precisión y sensibilidad

En lo que respecta a los aparatos de medida, hay tres conceptos muy importantes que vamos a definir: exactitud, precisión y sensibilidad.

La **exactitud** se define como el grado de concordancia entre el valor verdadero y el experimental, de modo que un aparato es tanto más exacto cuanto más próximo esté el valor de la medida realizada al valor verdadero de la magnitud medida.

La **precisión** hace referencia a la concordancia entre varias medidas de la misma magnitud, realizadas en condiciones sensiblemente iguales. Es por tanto un concepto relacionado con la dispersión de las medidas, de modo que un aparato será tanto más preciso cuanto menor sea la diferencia entre distintas medidas de una misma magnitud.

La exactitud implica normalmente precisión, pero la afirmación inversa no es cierta, ya que pueden existir aparatos muy precisos que posean poca exactitud debido a errores sistemáticos tales como error del cero, etc. En general se puede decir que es más fácil conocer la precisión de un aparato que su exactitud.

La **sensibilidad** de un aparato está relacionada con el valor mínimo de la magnitud que es capaz de medir. Por ejemplo, decir que la sensibilidad de una balanza es de 5 mg significa que para masas inferiores a la citada, la balanza no presenta ninguna desviación apreciable. Normalmente, se admite que la sensibilidad de un aparato viene indicada por el valor de la división más pequeña de la escala de medida. En muchas ocasiones, de un modo erróneo, se toman como idénticos los conceptos de precisión y sensibilidad, aunque ya hemos visto que se trata de conceptos diferentes. Toda medida realizada con un aparato viene afectada, al menos, de un error accidental de valor igual a la sensibilidad del aparato utilizado.

T.4 Error absoluto y error relativo

Si medimos una cierta magnitud física cuyo valor "verdadero" es x_0 y obtenemos un valor de la medida x, llamaremos **error absoluto** en dicha medida a la diferencia:

$$\Delta x = x - x_0 \ . \tag{T.1}$$

Si la medida es aceptable, $|\Delta x| \ll |x_0|$.

El error absoluto nos da una medida de la desviación, en términos absolutos, respecto al valor verdadero y obviamente tiene idénticas dimensiones físicas que la magnitud a la que afecta. No obstante, en ocasiones nos interesa resaltar la importancia relativa de esa desviación. Para tal fin se usa el error relativo.

El **error relativo** se define como el cociente entre el error absoluto y el valor verdadero:

$$\epsilon = \frac{\Delta x}{x_0} \; . \tag{T.2}$$

Se trata pues de una cantidad adimensional y usualmente se expresa en % ($100\ \epsilon$). Cuanto menor sea ϵ mejor será la medida.

T.5 Determinación de una magnitud y de su error por medida directa

La medida de cualquier magnitud carece de sentido si no se indica una estimación del error asociado a la misma. Dado que no conocemos el valor verdadero de la magnitud que deseamos medir, se siguen ciertos procedimientos para hacer una estimación tanto del valor de la magnitud como de una cota de error que nos indique la incertidumbre en la determinación realizada. El resultado de una medida lo indicaremos en la forma:

$$x \pm \Delta x \text{ (unidades)} \; . \tag{T.3}$$

El valor de la magnitud problema y su error se determinan estadísticamente, para lo cual la medida se ha de repetir varias veces según se especifica a continuación.

1. Se toman siempre **tres medidas** de la magnitud, se calcula el valor medio de estas tres medidas, $\bar{x}_3 = \sum x_i/3$ y se halla la **dispersión** total D de las mismas, es decir, la diferencia entre los valores extremos de las medidas:

   $$D = x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}} \; , \tag{T.4}$$

   (valor máximo de las medidas obtenidas menos el valor mínimo) y finalmente se obtiene el tanto por ciento de dispersión T, que viene dado por:

   $$T = \frac{100\ D}{\bar{x}_3} \; . \tag{T.5}$$

   (a) Si el valor de la dispersión total D no excede la sensibilidad S del aparato,

   $$D \leq S \; , \tag{T.6}$$

   se toma como valor verdadero de la magnitud el valor medio de las tres medidas $\bar{x}_3$ y como error absoluto la sensibilidad,

   $$\bar{x}_3 \pm \Delta x \; , \quad \Delta x = S \; . \tag{T.7}$$

(b) Si el valor de la dispersión total D es mayor que la sensibilidad del aparato,

$$D > S \ , \tag{T.8}$$

procederemos a aumentar el número de medidas de la magnitud. El criterio a seguir viene determinado por el valor del porcentaje de dispersión T de acuerdo con la siguiente tabla:

T en las tres primeras medidas	Nº total de medidas necesarias
$T \leq 2\ \%$	Bastan las tres medidas realizadas
$2\ \% < T \leq 8\ \%$	Hay que hacer 3 medidas más, hasta un total de 6
$8\ \% < T \leq 15\ \%$	Hay que hacer un total de 15 medidas
$15\ \% < T$	Hay que hacer un mínimo de 50 medidas

2. Una vez realizadas las medidas necesarias, se toma como valor de la magnitud el valor medio de las mismas y el error se determina según los casos como sigue:

(a) Si se han realizado tres medidas, se toma como error absoluto el valor de la sensibilidad del aparato que, como hemos indicado anteriormente, es el error absoluto de cada una de las medidas individuales,

$$\Delta x = S \ . \tag{T.9}$$

(b) Si se han realizado seis medidas, entonces se calcula el error de dispersión definido como $D_6/4$ (cuarta parte de la dispersión total de las seis medidas, es decir, la diferencia entre la mayor y menor de todas las medidas realizadas) y se asigna como error absoluto de las medidas el máximo entre este valor y la sensibilidad del aparato:

$$\Delta x = \text{máx}\ (D_6/4,\ S)\ . \tag{T.10}$$

(c) Si se han realizado quince o más medidas, el error absoluto viene dado por el error cuadrático medio o desviación estándar (σ) de las N medidas:[1]

$$\Delta x \equiv \sigma = \left[\frac{\sum\ (x_i - \bar{x})^2}{N-1}\right]^{1/2} \ . \tag{T.11}$$

El significado de la desviación estándar es el siguiente: en el intervalo $[\bar{x} - n\sigma, \bar{x} + n\sigma]$ se encuentran un 68.3, 95.4, 99.7 % de las medidas para $n = 1, 2, 3$, respectivamente.

[1]Una serie repetida de medidas de una misma magnitud posee alrededor de su valor medio una distribución típica llamada gaussiana o normal.

T.6 Determinación de una magnitud y de su error por medida indirecta

Como ya hemos indicado, la medida indirecta de una magnitud se debe a la aplicación de una fórmula a un conjunto de medidas directas (variables independientes o datos) que las relacionan con la magnitud problema. Mediante dicha fórmula se obtiene también el error de la medida según explicamos a continuación.

Si en la fórmula aparecen números irracionales tales como π, e, etc., debemos elegir el número de cifras significativas con que se toman a la hora de realizar los cálculos correspondientes de modo tal que los errores cometidos al truncar estos números irracionales no afecten al valor del error absoluto de la magnitud que queremos determinar.

Supongamos que la magnitud F es función de otras magnitudes físicas,

$$F = f(x, y, z, ...) \tag{T.12}$$

y que se han realizado medidas de las variables x, y, z... y se han determinado sus valores y errores correspondientes (esto es, conocemos $x \pm \Delta x$, $y \pm \Delta y$, $z \pm \Delta z$...). Para realizar el cálculo del error absoluto de F se procede como sigue.

Admitiendo que los errores se distribuyen de forma gaussiana, el error ΔF viene determinado por las derivadas parciales de F con respecto a las variables medidas directamente y por sus errores mediante la expresión:

$$(\Delta F)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2 + ... \tag{T.13}$$

T.6.1 Ejemplos sencillos

A continuación determinamos el error ΔF para algunas formas sencillas de la función F:

- $\boxed{F = x + ay}$, donde a es una constante. Aplicando la fórmula T.13 para esta función que sólo depende de dos variables (x e y) :

  $$(\Delta F)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 \tag{T.14}$$

  Para esta función tenemos que $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = a$. Por tanto:

  $$(\Delta F)^2 = (\Delta x)^2 + a^2(\Delta y)^2 \Rightarrow (\Delta F) = \sqrt{(\Delta x)^2 + a^2(\Delta y)^2} \tag{T.15}$$

- $\boxed{F = x\ y\ b}$, donde b es una constante.

  En este caso, $\frac{\partial F}{\partial x} = yb$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = xb$. Por tanto:

$$(\Delta F)^2 = (y\ b)^2(\Delta x)^2 + (x\ b)^2(\Delta y)^2 \Rightarrow (\Delta F) = b\sqrt{(y\ \Delta x)^2 + (x\ \Delta y)^2} \tag{T.16}$$

o equivalentemente,

$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 \tag{T.17}$$

Esta última relación nos indica que para una función de este tipo (producto de potencias), el error relativo al cuadrado de la magnitud F es igual a la suma de los errores relativos de las magnitudes físicas de las que depende F al cuadrado.

- $\boxed{F = \frac{mx}{ky}}$, donde m y k son constantes.

  Tenemos que $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{a}{by}$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-ax}{by^2}$. Por tanto:

$$(\Delta F)^2 = \left(\frac{m}{k\ y}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{-m\ x}{k\ y^2}\right)^2 (\Delta y)^2 \tag{T.18}$$

  operando en la expresión anterior, y teniendo en cuenta que $F = \frac{mx}{ky}$, podemos escribir ΔF en función de el valor de la magnitud F y de los errores relativos de las magnitudes x e y:

$$(\Delta F)^2 = \left(\frac{F}{x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{F}{y}\right)^2 (\Delta y)^2 = F^2 \left[\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2\right] \tag{T.19}$$

  Como vemos, en este caso se verifica también la ecuación T.17.

- $\boxed{F = k\ x^a}$, donde k y a son constantes (positivas o negativas). Para esta función, $\frac{\partial F}{\partial x} = k\ a\ x^{a-1}$ y por tanto:

$$\Delta F = \left|k\ a\ x^{a-1}(\Delta x)\right| = \left|F\ a\ \frac{\Delta x}{x}\right| \tag{T.20}$$

Para un caso más genérico de función producto de varias potencias (que engloba los tres ejemplos anteriores),

$$F = x^a\ y^b\ z^c\ ...$$

con a, b, c... constantes positivas o negativas, repitiendo el procedimiento anterior se puede demostrar que

$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2 = a^2\ \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + b^2\ \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2\ +\ c^2\ \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 + ... \tag{T.21}$$

T.7 Expresión del valor de una magnitud y de su error

De ordinario, dado el significado de cota de imprecisión que tiene el error absoluto, éste debe darse con una sóla cifra significativa, aumentándola en una unidad si la segunda fuera mayor o igual que 5, por convenio.

El valor de la magnitud debe tener sólo las cifras necesarias para que su última cifra significativa (cifra de acotamiento) sea del mismo orden decimal que el error absoluto.[2]

Como ejemplo damos la siguiente tabla de valores de distintas magnitudes para aclarar lo dicho anteriormente.

Valores incorrectos	**Valores correctos**
3.418 ± 0.123	3.4 ± 0.1
$6.3 \pm\ 0.09$	6.30 ± 0.09
46288 ± 1551	46000 ± 2000 o bien $(46 \pm 2) \cdot 10^3$
428.351 ± 0.27	428.4 ± 0.3
0.01683 ± 0.0058	0.017 ± 0.006

T.7.1 Ejemplos de cálculo de errores

Vamos a calcular el error absoluto de ciertas magnitudes, conociendo su dependencia funcional de otras magnitudes de las que poseemos medidas y cuyos errores absolutos son conocidos.

1. Consideremos la función $V = V_\circ + at$. Supongamos que tenemos medidas de las variables de las que depende V ($V_\circ$, a y t) y que se han determinado sus respectivos errores absolutos:

   $$V_\circ = (20.2\ \pm\ 0.1)\ \mathrm{m/s} \quad , \quad a = (4.1\ \pm\ 0.2)\ \mathrm{m/s^2} \quad , \quad t = (10.00\ \pm\ 0.01)\ \mathrm{s}$$

   Con estos datos podemos calcular el valor de V y el error de la misma:

   - Para calcular la magnitud, sustituímos los valores de la variables de las que depende V en la función $V(V_\circ, a, t)$:

     $$V = V_\circ + at = 20.2 + 4.1 \cdot 10 = 61.2\ \mathrm{m/s}$$

     Acotaremos esta cifra como corresponda una vez que hayamos calculado el error absoluto de V.

[2]Si un valor se extrae de una tabla u otro lugar, sin indicación de su error, se tomará como error una unidad del orden de la última cifra con que se expresa.

- Para calcular el error, aplicamos lo aprendido en la sección T.6 : dado que V depende de tres variables $(V_\circ, a, t)$, ΔV viene determinado por las derivadas parciales de V con respecto a dichas variables:

$$(\Delta V)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial V_\circ}\right)^2 (\Delta V_\circ)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2 (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 (\Delta t)^2$$

Calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial V}{\partial V_\circ} = 1 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial a} = t \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial t} = a$$

y sustituimos los resultados en la expresión anterior:

$$(\Delta V)^2 = (\Delta V_\circ)^2 + (t\Delta a)^2 + (a\Delta t)^2$$

Sustituyendo los valores de magnitudes y errores en esta fórmula y realizando los cálculos numéricos correspondientes, obtenemos:

$$\Delta V = \sqrt{(0.1)^2 + (10.00 \cdot 0.2)^2 + (4.1 \cdot 0.01)^2)} = 2.00291... \text{ m/s}$$

Teniendo en cuenta que el error se expresa con una única cifra significativa, $\Delta V = 2$ m/s y por tanto, la última cifra significativa de V debe ser la de las unidades (para que tenga el mismo orden decimal que el error absoluto, ver sección T.7):

$$V = (61 \pm 2) \text{ m/s}$$

2. Sea la función $E_p = m\ g\ h$. Los valores de las magnitudes de las que depende E_p han sido medidos y sus errores absolutos calculados:

$$m = (170.2\ \pm\ 0.5) \text{ g} \quad , \quad h = (50.15\ \pm\ 0.02) \text{ cm} \quad , \quad g = (9.81\ \pm\ 0.01) \text{ m/s}^2$$

- Calculamos el valor de la magnitud:

$$E_p = m\ g\ h = 0.1702 \cdot 9.81 \cdot 0.5015 = 0.8373354... \text{J}$$

- Calculamos el error de forma idéntica al ejemplo anterior:

$$(\Delta E_p)^2 = \left(\frac{\partial E_p}{\partial m}\right)^2 (\Delta m)^2 + \left(\frac{\partial E_p}{\partial g}\right)^2 (\Delta g)^2 + \left(\frac{\partial E_p}{\partial h}\right)^2 (\Delta h)^2$$

Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial E_p}{\partial m_\circ} = g\ h \quad , \quad \frac{\partial E_p}{\partial g} = m\ h \quad , \quad \frac{\partial E_p}{\partial h} = m\ g$$

Por tanto,

$$(\Delta E_p)^2 = (g\ h\ \Delta m)^2 + (m\ h\ \Delta g)^2 + (m\ g\ \Delta h)^2,$$

Sustituimos ahora los valores de magnitudes y errores, con especial cuidado a las unidades, y realizamos los cálculos numéricos:

$$\Delta E_p = \sqrt{(9.81 \cdot 0.5015 \cdot 5 \cdot 10^{-4})^2 + (0.1702 \cdot 0.5015 \cdot 0.01)^2 + (0.1702 \cdot 9.81 \cdot 2 \cdot 10^{-4})^2}$$

$$\Delta E_p = 2.625064283... \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

Ahora ya podemos expresar el error de E_p correctamente (con una única cifra significativa) y acotar de el valor de E_p :

$$E_p = (837 \pm 3) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

3. Por último, vamos a calcular el error de una magnitud genérica F que depende de otras a través de una expresión algo más compleja que las anteriores, del tipo

$$F = \frac{(x+y)\ z}{(u-v)\ w}\ .$$

Supongamos que se han medido las magnitudes correspondientes a cada variable y se han determinado sus errores absolutos con valores

$$x = 27.3\ \pm\ 0.1 \quad , \quad u = 50.2\ \pm\ 0.1 \quad , \quad z = 10.0\ \pm\ 0.1\ ,$$
$$y = 2.45\ \pm\ 0.05 \quad , \quad v = 1.03\ \pm\ 0.01 \quad , \quad w = 3.26\ \pm\ 0.02\ .$$

Vamos a calcular el valor de la magnitud F y el error correspondiente a la misma:

$$\begin{aligned} F &= 1.85596... \\ (\Delta F)^2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 (\Delta u)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 (\Delta v)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2 (\Delta w)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{z}{(u-v)\ w} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{(x+y)\ z}{(u-v)^2\ w} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{(x+y)}{(u-v)\ w}\ ,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{z}{(u-v)\ w} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{(x+y)\ z}{(u-v)^2\ w} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial w} = -\frac{(x+y)\ z}{(u-v)\ w^2}\ .$$

Tras realizar los cálculos numéricos obtenemos $\Delta F = 0.023176...$ Al igual que en los casos anteriores, teniendo en cuenta que el error absoluto se expresa correctamente con una sóla cifra significativa: $\Delta F = 0.02$ y por tanto,

$$F = 1.86\ \pm\ 0.02\ .$$

T.8 Construcción de tablas y gráficas

Las tablas y las gráficas son fundamentales en la presentación de los resultados científicos. Es imprescindible que se presenten con claridad, pues con ellas se pretende mostrar al lector las relaciones existentes entre magnitudes de interés que han sido medidas o calculadas en un experimento dado.

T.8.1 Tablas

En las tablas debe ser evidente para el lector la magnitud representada en cada entrada de la gráfica (poniendo su nombre en la cabecera o el símbolo con el que se representa en las fórmulas) y su correspondiente unidad de medida (que podemos poner entre paréntesis). Las magnitudes presentadas deben ir siempre acompañadas de su error. Se presenta un ejemplo de tabla a continuación:

Tiempo (s)	**Velocidad (m/s)**
0.0 ± 0.2	0 ± 2
2.0 ± 0.2	7 ± 2
4.0 ± 0.2	17 ± 2
6.0 ± 0.2	25 ± 2
8.0 ± 0.2	31 ± 2
10.0 ± 0.2	39 ± 2
12.0 ± 0.2	51 ± 2

Tabla T.1. Ejemplo de tabla

T.8.2 Gráficas

La representación gráfica de los fenómenos físicos que estudiemos debe ajustarse a las siguientes normas:

1. Gráficas en papel milimetrado con los ejes bien trazados en cuyos extremos indicaremos la magnitud representada en ellos y la unidad en que ha sido medida. El título de la gráfica será claro y vendrá indicado en la parte superior.

2. La variable independiente del fenómeno debe ir representada en abscisas (eje horizontal) y la dependiente en ordenadas (eje vertical).

3. Las escalas, sobre ambos ejes, han de permitir una lectura rápida y sencilla. Para ello se elegirán las escalas con intervalos equiespaciados.

4. Las escalas deben abarcar todo el intervalo de medidas realizadas, sin excederlo demasiado. De este modo los datos ocuparán toda la gráfica y permitirán una mejor lectura de los datos experimentales.

5. Sobre los ejes sólo se indican los valores correspondientes a las divisiones enteras de la escala (que han de quedar así uniformemente espaciadas). Nunca se señalan en los ejes de la gráfica los valores correspondientes a las medidas realizadas.

6. Los valores medidos se representan sobre el papel milimetrado por el punto correspondiente a sus dos coordenadas (punto experimental) rodeado por el denominado rectángulo de error o barras de error. Dado un dato experimental para el que la magnitud representada en abscisas vale $x_\circ \pm \Delta x_\circ$, y la representada en ordenadas $y_\circ \pm \Delta y_\circ$, la base del rectángulo de error abarca desde $x_\circ - \Delta x_\circ$ hasta $x_\circ + \Delta x_\circ$ y su altura se extiende desde $y_\circ - \Delta y_\circ$ hasta $y_\circ + \Delta y_\circ$.En el caso de que $\Delta x_\circ$ o $\Delta y_\circ$ sean despreciables en comparación con la escala utilizada, el rectángulo de error queda reducido a un simple segmento vertical u horizontal, según el caso.

   En el caso de las barras de error, éstas se extienden desde $x_\circ - \Delta x_\circ$ hasta $x_\circ + \Delta x_\circ$ para la variable representada en el eje de abscisas, y desde $y_\circ - \Delta y_\circ$ para la representada en odenadas. En el caso de que $\Delta x_\circ$ o $\Delta y_\circ$ sean despreciables en comparación con la escala utilizada, no se representa la(s) barra(s) de error correspondiente(s). Un rectángulo o barra de error de un dato experimental nos indica gráficamente la incertidumbre de dicho dato, o equivalentemente, el área de la gráfica en la que se encuentra el *valor verdadero* de la magnitud.

7. Las curvas de ajuste han de construirse con líneas finas y nunca quebradas, que deberían pasar por el área definida por los rectángulos o barras de error (ver figura T.1), aunque para ello dejen de pasar por los puntos experimentales (que pueden quedar a derecha o izquierda de la curva). Si al hacer esta operación alguno de puntos queda excesivamente alejado de la curva (teniendo en cuenta sus barras de error), esa medida es falsa por alguna causa accidental y debe repetirse.

T.9 Ajuste de la recta de regresión por el método de mínimos cuadrados

Con frecuencia se plantea el problema de encontrar una expresión matemática $y = f(x)$ de la ley física que rige el comportamiento de un determinado fenómeno, a partir de una serie de N medidas $(x_i,\ y_i)$ de las magnitudes x e y que lo caracterizan.

Cuando la representación gráfica del fenómeno estudiado proporciona una distribución de los puntos experimentales en forma prácticamente lineal es conveniente determinar la ecuación de la recta que será expresión de la ley física que rige el fenómeno estudiado, utilizando para ello el método de mínimos cuadrados.

Dicha recta debe cumplir la condición de que los puntos experimentales queden distribuidos simétricamente a ambas partes de la misma y además lo más próximos a ella que sea posible.

Para ello se obliga a que la recta de ecuación $y = ax + b$, cumpla con que la expresión:

$$c = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2 \tag{T.22}$$

tenga un valor mínimo. Derivando c respecto a a y a b y anulando ambas derivadas se obtiene:

$$\begin{aligned} a &= \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum y_i - Nb}{\sum x_i} && \text{(T.23)} \\ b &= \frac{\sum\ x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{N} \ . && \text{(T.24)} \end{aligned}$$

Si se ajusta una recta que pase por el origen de coordenadas el problema se simplifica puesto que al ser $b = 0$ se tiene:

$$a = \frac{\sum y_i}{\sum x_i} \ , \tag{T.25}$$

que proporciona directamente el valor de la pendiente de la recta.

Además de los valores de pendiente y ordenada en el origen, es interesante obtener el denominado **coeficiente de correlación lineal** r, que nos da una medida del grado de correlación entre los valores de las variables x e y, es decir, hasta qué punto x e y están relacionadas mediante una función lineal. La expresión de r es:

$$r = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2]\,[N \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}} \ , \tag{T.26}$$

que varía entre 0 (no existe correlación) y $\pm$ 1 (hay correlación completa).

Las expresiones correspondientes al cálculo del error de la pendiente y la ordenada en el origen son:

$$\begin{aligned} \Delta a &= \left[\frac{\sum (y_i - ax_i - b)^2}{(N-2) \sum (x_i - \bar{x})^2} \right]^{1/2} && \text{(T.27)} \\ \Delta b &= \left[\left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right) \left(\frac{\sum (y_i - ax_i - b)^2}{(N-2)} \right) \right]^{1/2} \ . && \text{(T.28)} \end{aligned}$$

T.10 Interpolación en tablas de simple entrada

Las tablas de simple entrada nos proporcionan el valor de una variable en función de otra. Cuando se quiere determinar el valor z que corresponde a uno dado x, no tabulado, se toman dos valores tabulados de x y z entre los que se encuentran nuestros valores problema. Sean:

x_1	z_1
x_2	z_2

La relación que liga x con z puede hallarse aproximadamente mediante interpolación lineal:

$$z = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} \, (x - x_1) \ . \tag{T.29}$$

que permite determinar z en función de x. El error de z es:

$$\Delta z = \left| \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} \right| \Delta x \ . \tag{T.30}$$

T.11 Interpolación en tablas de doble entrada

En las tablas de doble entrada a cada pareja de valores $(x,\ y)$ se asigna una tercera variable z. Para hallar valores no tabulados se procede de forma análoga al caso anterior tomando valores tabulados entre los que se encuentran los de nuestro problema:

	y_1	y_2
x_1	z_{11}	z_{12}
x_2	z_{21}	z_{22}

La relación aproximada que permite el cálculo de z es:

$$z = z_{11} + \frac{z_{21} - z_{11}}{x_2 - x_1} \, (x - x_1) \ + \ \frac{z_{12} - z_{11}}{y_2 - y_1} \, (y - y_1) \tag{T.31}$$

y puede ser utilizada en la interpolación inversa, es decir, en la determinación de x o y, conocidos los valores de (y, z) o de (x, z), respectivamente. El error de z viene dado por la expresión:

$$(\Delta z)^2 = \left(\frac{z_{21} - z_{11}}{x_2 - x_1} \right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{z_{12} - z_{11}}{y_2 - y_1} \right)^2 (\Delta y)^2 \ . \tag{T.32}$$