

# Capítulo 4

## INTERPOLACIÓN.

### 4.6. Interpolación mediante splines (polinomios a trozos)

En las figuras siguientes se puede observar alguno de los problemas que la interpolación clásica con polinomios puede plantear debido, en parte, a la relación directa entre el grado del polinomio interpolante y el número de datos a interpolar (en general, grado  $n$  para  $n+1$  datos).

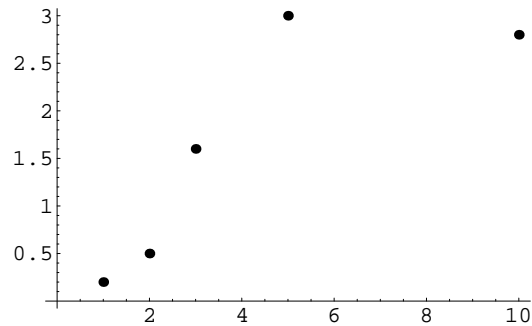


Figura 4.1: Datos de interpolación.

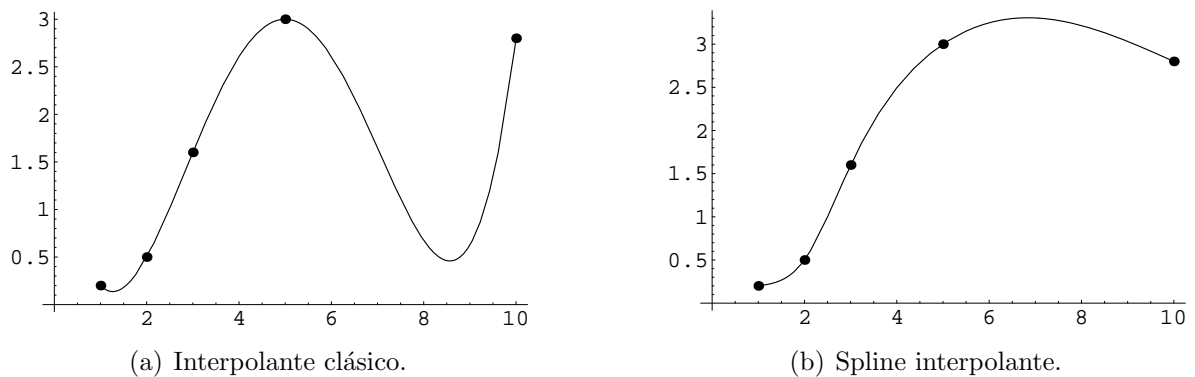


Figura 4.2: Dos tipos de interpolantes.

¿Qué entenderemos por función spline (polinomial)?

Pues bien, éstas serán funciones polinómicas a trozos asociadas a una partición de cierto intervalo

real; a saber: Dado el intervalo real  $[a, b]$  con nodos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , una función spline,  $s(x)$ , puede describirse por:

$$s(x) = \begin{cases} s_0 & x_0 \leq x < x_1 \\ s_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ s_{n-1} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (4.1)$$

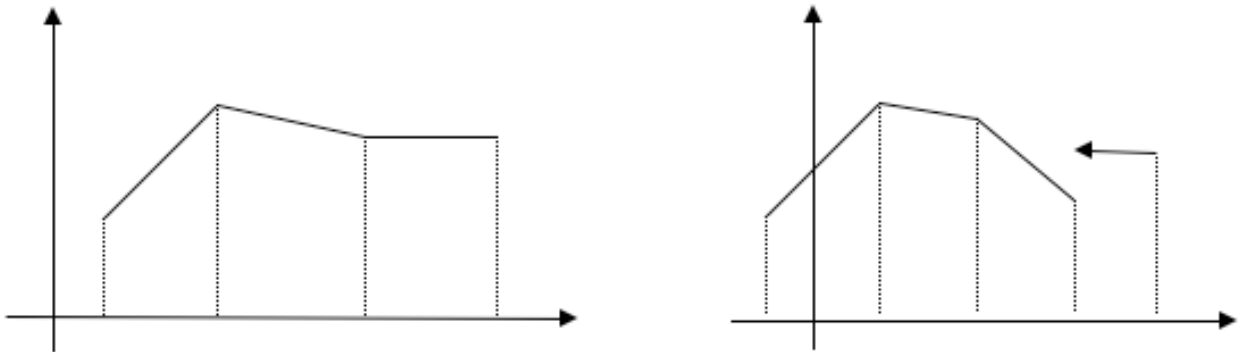
donde cada  $s_i = s_i(x)$  es un polinomio de cierto grado (1, 2, ó 3 es lo habitual). Además, la función total ha de cumplir ciertas propiedades de suavidad (continua, derivable, etc.). Vamos a considerar los casos particulares siguientes:

#### 4.6.1. Spline Lineal (poligonales continuas)

Una función como la de (4.1) se dice que es un spline lineal si cada  $s_i = s_i(x)$  es un polinomio de grado  $\leq 1$  y la función es continua en todo el intervalo; es decir,  $s_{i-1}(x_i) = s_i(x_i)$  para  $i = 1, \dots, n-1$ .

Al conjunto de funciones de este tipo lo notamos<sup>1</sup> por:  $S(1, 0; \{x_0, x_1, \dots, x_n\})$

##### Ejemplo 1.1



(a) Es un spline lineal.

(b) No es un spline lineal.

Figura 4.3: Funciones lineales a trozos.

**Proposición 4.1** *El conjunto  $S(1, 0; \{x_0, x_1, \dots, x_n\})$  satisface las propiedades siguientes:*

1. *Es un espacio vectorial con  $\dim(S(1, 0; \{x_0, x_1, \dots, x_n\})) = n + 1$*
2. *Una base de tal espacio es:  $\{1, x, (x - x_1)_+, (x - x_2)_+, \dots, (x - x_{n-1})_+\}$*

La propiedad 2 nos permite escribir una función spline lineal en forma global como:

$$s(x) = a + bx + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (x - x_i)_+ \quad (4.2)$$

<sup>1</sup>En ocasiones se usan notaciones diversas para los espacios de splines; a saber:  $S_m^k(\{x_0, x_1, \dots, x_n\})$  indica el mismo espacio que  $S(m, k; \{x_0, x_1, \dots, x_n\})$ . Además, si se omite el valor  $k$  se entiende que es  $m - 1$ .

En esta expresión aparecen funciones denominadas potencias truncadas que, en general, se definen por:

$$(x - a)_+^k = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ (x - a)^k & \text{si } x > a \end{cases} \quad (4.3)$$

### Interpolación con spline lineales.

Para los datos  $\{(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, \dots, n\}$  con los nodos en orden creciente, el problema es:

Hallar $s(x) \in S(1, 0; \{x_0, x_1, \dots, x_n\})$ verificando : $s(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$	(4.4)
--	-------

El problema (4.4) admite una única solución que puede obtenerse trozo a trozo como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{Hallar } s_i(x) \text{ verificando :} \\ &s_i(x_i) = y_i; s_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{aligned}$$

Calculados los trozos se escribe la solución en la forma:

$$s(x) = \begin{cases} s_0 = y_0 + P_0(x - x_0) & x_0 \leq x < x_1 \\ s_1 = y_1 + P_1(x - x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ s_{n-1} = y_{n-1} + P_{n-1}(x - x_{n-1}) & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

donde  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  son las diferencias divididas de orden 1 (o pendientes) para los datos iniciales. Otra forma de calcular la solución del problema (4.4) es usar la forma global del spline lineal (4.2) e imponer las condiciones de interpolación resolviendo el sistema resultante.

#### Ejemplo 1.2

Calcular el spline lineal para los datos:

$x_i$	-1	1	3	6
$y_i$	0	2	-1	3

#### Solución

##### Método con una base de potencias truncadas:

En este caso el espacio a considerar es:  $S(1, 0; \{-1, 1, 3, 6\})$  (su dimensión es 4) con base:

$$\{1, x, (x - 1)_+, (x - 3)_+\}$$

Así, consideramos la expresión del spline lineal siguiente:

$$s(x) = a + bx + c(x - 1)_+ + d(x - 3)_+$$

Imponemos las condiciones de interpolación; es decir,

$$\left. \begin{aligned} s(-1) = 0 &\mapsto a - b = 0 \\ s(1) = 2 &\mapsto a + b = 2 \\ s(3) = -1 &\mapsto a + 3b + 2c = -1 \\ s(6) = 3 &\mapsto a + 6b + 5c + 3d = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = b = 1; c = -\frac{5}{2}; d = \frac{17}{6}$$

Por lo tanto, el spline lineal solución del problema es:

$$s(x) = 1 + x - \frac{5}{2}(x-1)_+ + \frac{17}{6}(x-3)_+$$

**Método a trozos:**

Usamos las D.D. de orden 1; a saber:

$x_i$	$y_i(D.D,0)$	$D.D,1$
-1	0	
1	2	1
3	-1	$-\frac{3}{2}$
6	3	$\frac{4}{3}$

Desde esta tabla se deducen las expresiones para cada trozo del spline lineal; a saber:

$$s(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x < 1 \\ 2 - \frac{3}{2}(x-1) & 1 \leq x < 3 \\ -1 + \frac{4}{3}(x-3) & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

### 4.6.2. Spline Cúbico clase 1

Una función como la de (4.1) se dice que es un spline cúbico clase 1 si cada  $s_i = s_i(x)$  es un polinomio de grado  $\leq 3$  y la función es continua y derivable en todo el intervalo; es decir, para  $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$\begin{cases} s_{i-1}(x_i) = s_i(x_i) \\ s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i) \end{cases}$$

Al conjunto de funciones de este tipo lo notamos por:  $S(3, 1; \{x_0, x_1, \dots, x_n\})$

**Proposición 4.2** *El conjunto  $S(3, 1; \{x_0, x_1, \dots, x_n\})$  satisface las propiedades siguientes:*

1. *Es un espacio vectorial con  $\dim(S(3, 1; \{x_0, x_1, \dots, x_n\})) = 2(n+1)$ ;*
2. *Una base de tal espacio es:  $\{1, x, x^2, x^3; (x-x_1)_+^2, (x-x_1)_+^3, \dots, (x-x_{n-1})_+^2, (x-x_{n-1})_+^3\}$*

La propiedad 2 nos permite escribir una función spline cúbico clase 1, en forma global, como:

$$s(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \sum_{i=1}^{n-1} [\alpha_i (x-x_i)_+^2 + \beta_i (x-x_i)_+^3] \quad (4.5)$$

### Interpolación con spline cúbicos clase 1.

Como la dimensión del espacio es  $2(n+1)$ , tomaremos en cada nodo de interpolación dos datos; es decir, valor  $(y_i)$  y derivada  $(d_i)$ . Así, el problema es:

$$\begin{cases} \text{Hallar } s(x) \in S(3, 1; \{x_0, x_1, \dots, x_n\}) \text{ verificando :} \\ s(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n \\ s'(x_i) = d_i \quad i = 0, 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.6)$$

El problema (4.6) admite una única solución que puede obtenerse trozo a trozo ( $s_i(x)$ ) como sigue:

$$\begin{cases} s_i(x_i) = y_i & s_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ s'_i(x_i) = d_i & s'_i(x_{i+1}) = d_{i+1} \end{cases}$$

Este problema se resuelve como en el caso del interpolante cúbico de Hermite sin más que intercambiar los papeles de  $x_0, x_1$  por los de  $x_{i-1}, x_i$  (es decir,  $0 \leftrightarrow i - 1, 1 \leftrightarrow i$ ). Calculados los trozos se escribe la solución en la forma:

$$s(x) = \begin{cases} s_0 & x_0 \leq x < x_1 \\ s_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ s_{n-1} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

con

$$s_i = y_i + d_i(x - x_i) + \frac{P_i - d_i}{h_i}(x - x_i)^2 + \frac{d_{i+1} + d_i - 2P_i}{h_i^2}(x - x_i)^2(x - x_{i+1})$$

Aquí,  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  son las diferencias divididas de orden 1 (o pendientes) para los datos iniciales y  $d_0, d_1, d_2, \dots, d_n$  son derivadas o aproximaciones de derivadas en los nodos  $x_i$  ( $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ).

En la práctica habitual no se conocen las derivadas pues los datos suelen ser de tipo experimental, en cuyo caso, se utilizan valores que representen aproximaciones de ellas (razones de cambio de una magnitud respecto de la otra). Una forma común es la siguiente:

Conocidos los datos  $\{(x_i, y_i) \mid i = 0, 1, \dots, n\}$ , se toman los valores siguientes para las derivadas (desde las D.D.1 o pendientes):

$$\begin{cases} d_0 = P_0 \\ d_i = \frac{h_{i-1}P_i + h_iP_{i-1}}{h_i + h_{i-1}} = \frac{P_{i-1} + P_i}{2} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n - 1 \\ d_n = P_{n-1} \end{cases}$$

$\uparrow$   
si  $h_i = h \forall i$

También puede utilizarse la base del espacio de spline cúbicos clase 1 para resolver el problema (4.6).

**Ejemplo 1.3**

Calcular el spline cúbico clase 1 para los datos (con derivadas conocidas) siguientes:

$x_i$	-1	0	1
$y_i$	1	5	7
$d_i$	0	1	0

**Solución**

**Método Global (uso de una base):**

El espacio que usamos es:  $S(3, 1; \{-1, 0, 1\})$  cuya base es:  $\{1, x, x^2, x^3; x_+^2, x_+^3\}$

Para dar una expresión global hemos de escribir el spline como:

$$s(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \alpha x_+^2 + \beta x_+^3$$

Imponemos las condiciones de interpolación en todos los nodos resultando el sistema:

$$\begin{array}{llll} s(-1) = 1 & \mapsto & a - b + c - d = 1 & s'(-1) = 0 & \mapsto & b - 2c + 3d = 0 \\ s(0) = 5 & \mapsto & a = 5 & s'(0) = 1 & \mapsto & b = 1 \\ s(1) = 7 & \mapsto & a + b + c + d + \alpha + \beta = 7 & s'(1) = 0 & \mapsto & b + 2c + 3d + 2\alpha + 3\beta = 0 \end{array}$$

cuya solución es:  $a=5, b=1, c=-10, d=-7, \alpha=14, \beta=4$

Por lo tanto la solución se escribe como:

$$s(x) = 5 + x - 10x^2 - 7x^3 + 14x_+^2 + 4x_+^3$$

### Método Local (trozo a trozo)

La construcción a trozos es la que sigue (usando la tabla de D.D. con argumentos repetidos):

$x_i$	$y_i$	D.D,1	D.D,2	D.D,3
-1	1	-	-	-
-1	1	0	-	-
0	5	4	4	-
0	5	1	-3	-7

$x_i$	$y_i$	D.D,1	D.D,2	D.D,3
0	5	-	-	-
0	5	1	-	-
1	7	2	1	-
1	7	0	-2	-3

Cuadro 4.1: D.D. para  $s_1(x)$  y para  $s_2(x)$  respectivamente.

Desde aquí se deduce la expresión, a trozos, del spline interpolante siguiente:

$$s(x) = \begin{cases} s_1 = 1 + 4(x+1)^2 - 7(x+1)^2x - 1 \leq x \leq 0 \\ s_2 = 5 + x + x^2 - 3x^2(x-1) 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Cuando no se dispone de las derivadas, éstas se han de obtener antes de calcular las D.D. asociadas a cada trozo.

### 4.6.3. Spline Cúbico clase 2

Una función como la de (4.1) se dice que es un spline cúbico clase 2 si cada  $s_i = s_i(x)$  es un polinomio de grado  $\leq 3$  y la función es continua y derivable 2 veces en todo el intervalo; es decir, para  $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$\boxed{\begin{array}{l} s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i) \\ s'_i(x_i) = s'_{i-1}(x_i) \\ s''_i(x_i) = s''_{i-1}(x_i) \end{array}}$$

Al conjunto de funciones de este tipo lo notamos por:  $S(3, 2; \{x_0, x_1, \dots, x_n\})$

**Proposición 4.3** *El conjunto  $S(3, 2; \{x_0, x_1, \dots, x_n\})$  satisface las propiedades siguientes:*

1. Es un espacio vectorial con  $\dim(S(3, 2; \{x_0, x_1, \dots, x_n\})) = n + 3$ ;
2. Una base de tal espacio es:  $\{1, x, x^2, x^3; (x - x_1)_+^3, \dots, (x - x_{n-1})_+^3\}$

La propiedad 2 nos permite escribir una función spline cúbico, en forma global, como:

$$s(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (x - x_i)_+^3 \tag{4.7}$$

### Interpolación con spline cúbicos clase 2.

Como la dimensión del espacio es  $n+3$ , tendremos dos libertades en la resolución del problema de interpolar  $n+1$  datos  $\{(x_i, y_i); i = 0, 1, \dots, n\}$ . Así, un problema clásico es:

$$\begin{aligned} \text{Hallar } s(x) \in S(3, 2; \{x_0, x_1, \dots, x_n\}) \text{ verificando :} \\ s(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n \\ s''(x_0) = 0 = s''(x_n) \end{aligned} \tag{4.8}$$

El problema (4.8) admite una única solución llamada: "SPLINE CÚBICO NATURAL". Esta solución puede obtenerse desde la construcción del Spline Cúbico clase 1. Para ello, hemos de generar las derivadas  $d_0, d_1, d_2, \dots, d_n$  usando, para ello, las condiciones necesarias para que tal spline sea dos veces derivable y cumpla las dos condiciones agregadas ( $s''(x_0) = 0 = s''(x_n)$ ) a las de interpolación básica ( $s(x_i) = y_i \forall i$ ).

Más concretamente, el SPLINE

$$s(x) = \begin{cases} s_0 & x_0 \leq x < x_1 \\ s_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ s_{n-1} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

con

$$s_i = y_i + d_i(x - x_i) + \frac{P_i - d_i}{h_i}(x - x_i)^2 + \frac{d_{i+1} + d_i - 2P_i}{h_i^2}(x - x_i)^2(x - x_{i+1})$$

será solución de (4.8) si las derivadas  $d_0, d_1, d_2, \dots, d_n$  son la única solución del S.E.L. de orden  $(n + 1) \times (n + 1)$  siguiente (forma matricial):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_0) & h_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3P_0 \\ 3(h_1P_0 + h_0P_1) \\ \vdots \\ 3(h_{n-1}P_{n-2} + h_{n-2}P_{n-1}) \\ 3P_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{h_0} & 2(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1}) & \frac{1}{h_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{h_{n-2}} & 2(\frac{1}{h_{n-2}} + \frac{1}{h_{n-1}}) & \frac{1}{h_{n-1}} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3P_0 \\ 3(\frac{P_0}{h_0} + \frac{P_1}{h_1}) \\ \vdots \\ 3(\frac{P_{n-2}}{h_{n-2}} + \frac{P_{n-1}}{h_{n-1}}) \\ 3P_{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Aquí, de nuevo,  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  son las diferencias divididas de orden 1 (o pendientes) para los datos iniciales  $\{(x_i, y_i) \mid i = 0, 1, \dots, n\}$

También puede usarse la base del espacio de spline cúbicos para resolver el problema (4.8) .

#### Ejemplo 1.4

Calcular el SPLINE NATURAL para los datos siguientes:

$x_i$	-1	0	1
$y_i$	1	5	7

#### Solución

##### Método Global (uso de una base)

El espacio que usamos es:  $S(3, 2; \{-1, 0, 1\})$  cuya base es:  $\{1, x, x^2, x^3; x_+^3\}$

Una expresión del spline es:  $s(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \alpha x_+^3$

Imponemos las condiciones de interpolación básica y las condiciones adicionales sobre la derivada segunda en los extremos resultando el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} s(-1) = 1 \mapsto a - b + c - d = 1 \\ s(0) = 5 \mapsto a = 5 \\ s(1) = 7 \mapsto a + b + c + d + \alpha = 7 \\ s''(-1) = 0 \mapsto 2c - 6d = 0 \\ s''(1) = 0 \mapsto 2c + 6d + 6\alpha = 0 \end{array} \right\} \text{cuya solución es: } \begin{cases} a = 5, b = 3 \\ c = -\frac{3}{2}, d = -\frac{1}{2} \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto la solución se escribe como:  $s(x) = 5 + 3x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + x_+^3$

##### Método Local (trozo a trozo)

Para la construcción a trozos lo primero es calcular las derivadas necesarias resolviendo el sistema (4.10) que en este caso particular (aquí  $h_i = 1 \forall i$ ) es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$$

cuya solución es:  $d_0 = \frac{9}{2}, d_1 = 3, d_2 = \frac{3}{2}$



Así, usando estas derivadas podemos proceder como en el Ejemplo 1.3 (las tablas de D.D. con nodos repetidos se verán afectadas por las nuevas derivadas):

$x_i$	$y_i$	D.D,1	D.D,2	D.D,3
-1	1	—	—	—
-1	1	$\frac{9}{2}$	—	—
0	5	4	$-\frac{1}{2}$	—
0	5	3	-1	$-\frac{1}{2}$

$x_i$	$y_i$	D.D,1	D.D,2	D.D,3
0	5	—	—	—
0	5	3	—	—
1	7	2	-1	—
1	7	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Cuadro 4.2: D.D. para  $s_1(x)$  y para  $s_2(x)$  respectivamente.

Desde aquí se deduce la expresión, a trozos, del SPLINE NATURAL siguiente:

$$s(x) = \begin{cases} s_1 = 1 + \frac{9}{2}(x + 1) - \frac{1}{2}(x + 1)^2 - \frac{1}{2}(x + 1)^2x & -1 \leq x \leq 0 \\ s_2 = 5 + 3x - x^2 + \frac{1}{2}x^2(x - 1) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Otros spline cúbicos clásicos son los llamados:

— Spline sujeto.- Es el que cumple las condiciones adicionales:

$$s'(x_0) = A, s'(x_n) = B$$

con  $A$  y  $B$  valores conocidos (por ejemplo, las derivadas exactas de la función  $f(x)$  si los datos son del tipo  $y_i = f(x_i)$ ).

— Spline periódico.- Sus condiciones adicionales son:

$$s'(x_0) = s'(x_n), \quad s''(x_0) = s''(x_n)$$

en este caso, por la periodicidad, se supone que  $s(x_0) = y_0 = y_n = s(x_n)$ .

Para calcular el spline sujeto podemos razonar como en el caso del Natural pero, ahora, conocemos los valores de las derivadas en  $x_0$  y en  $x_n$ ; es decir,  $d_0 = A, d_n = B$  por lo que el sistema se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{h_0} & 2(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1}) & \frac{1}{h_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{h_{n-2}} & 2(\frac{1}{h_{n-2}} + \frac{1}{h_{n-1}}) & \frac{1}{h_{n-1}} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 3(\frac{P_0}{h_0} + \frac{P_1}{h_1}) \\ \vdots \\ 3(\frac{P_{n-2}}{h_{n-2}} + \frac{P_{n-1}}{h_{n-1}}) \\ B \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

que eliminando los valores  $d_0 = A, d_n = B$  (ecuaciones primera y última) el sistema queda reducido a:

$$\begin{pmatrix} 2\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1}\right) & \frac{1}{h_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{h_1} & 2\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{h_{n-3}} & 2\left(\frac{1}{h_{n-3}} + \frac{1}{h_{n-2}}\right) & \frac{1}{h_{n-2}} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{h_{n-2}} & 2\left(\frac{1}{h_{n-2}} + \frac{1}{h_{n-1}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\left(\frac{P_0}{h_0} + \frac{P_1}{h_1}\right) - \frac{A}{h_0} \\ 3\left(\frac{P_1}{h_1} + \frac{P_2}{h_2}\right) \\ \vdots \\ 3\left(\frac{P_{n-2}}{h_{n-2}} + \frac{P_{n-1}}{h_{n-1}}\right) - \frac{B}{h_{n-1}} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Resolviendo el sistema (4.12) (es de orden  $(n-1) \times (n-1)$ ) se puede obtener el spline sujeto trozo a trozo mediante interpolación de Hermite en cada intervalo.

### Error en la interpolación con spline.

Para terminar damos algunas estimaciones básicas del error cometido al evaluar una determinada función,  $f(x)$ , mediante un spline que interpola la función en los nodos  $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ . Pues bien, sea  $E(x) = f(x) - s(x)$  el error cometido en  $x \in [a = x_0, b = x_n]$ ; entonces, un análisis similar al realizado en la interpolación de Hermite nos permite obtener los resultados siguientes:

**Teorema 4.1** Sean  $f \in C^4([a, b])$ ,  $M$  una cota para  $|f^{(iv)}(x)|$  en  $[a, b]$  y  $h = \max_i \{h_i\}$ . Entonces,

1. Si  $s(x)$  es el spline cúbico de clase 1 que interpola  $f(x)$  y su derivada  $f'(x)$  en los nodos  $x_i$   $i = 0, 1, \dots, n$ ; entonces:

$$\|E\| = \max_{a \leq x \leq b} \{|f(x) - s(x)|\} \leq \frac{M}{384} h^4$$

2. Si  $s(x)$  es el spline cúbico de clase 1 que interpola  $f(x)$  en los nodos  $x_i$   $i = 0, 1, \dots, n$  y usa derivadas  $s'(x_i) = d_i$   $i = 0, \dots, n$ ; entonces:

$$\|E\| \leq \frac{M}{384} h^4 + \frac{h}{4} \max_i \{|d_i - f'(x_i)|\}$$

3. Si  $s(x)$  es el spline cúbico sujeto que interpola  $f(x)$  en los nodos  $x_i$   $i = 0, 1, \dots, n$  y  $s'(x_0) = A = f'(x_0)$ ,  $s'(x_n) = B = f'(x_n)$ ; entonces:

$$\|E\| \leq \frac{5M}{384} h^4$$

Este resultado permite asegurar la convergencia del interpolante spline a la función cuando  $h \rightarrow 0$ . También, el spline natural que interpola una función como la del teorema tiene una estimación del error del mismo orden (es proporcional a  $h^4$ ) que el sujeto pero más compleja de expresar. En cuanto al error de interpolación para el spline lineal es proporcional a  $h^2$  y por tanto converge a la función interpolada.